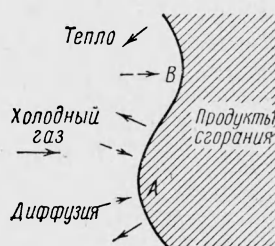


О ДИФФУЗИОННО-ТЕПЛОВОЙ УСТОЙЧИВОСТИ  
ЛАМИНАРНОГО ПЛАМЕНИ

Г. И. Баренблатт, Я. Б. Зельдович, А. Г. Истратов

(Москва)

§ 1. Введение. Вопрос об устойчивости пламени имеет несколько различных аспектов и возникает немедленно после того как доказано существование стационарного режима горения. Напомним, что предположение о стационарности решения является идеализацией постановки задачи. Эта идеализация оправдана только в том случае, когда стационарное решение представляет собой предел, к которому стремятся с течением времени решения определенного класса нестационарных задач. Для этого необходимо, чтобы стационарное решение было устойчивым. При исследовании горения в техническом аппарате представляет интерес выяснение устойчивости процесса в целом, включая подачу топлива, отвод продуктов горения, теплоотвод и т. п. Для того чтобы решить этот вопрос, нужно сначала убедиться в том, что устойчив отдельный небольшой элемент поверхности пламени при условии, что гидродинамические и тепловые условия на достаточном расстоянии с обеих сторон поверхности поддерживаются постоянными.



Л. Д. Ландау [1] показал гидродинамическую неустойчивость пламени. При этом пламя рассматривалось им как поверхность разрыва, на которой меняются скачком температура, плотность и скорость движения газа. Сама скорость движения пламени относительно горящего вещества, определяемая химической кинетикой, считалась постоянной и заданной. В этих предположениях оказалось, что пламя всегда неустойчиво и что скорость нарастания возмущений обратно пропорциональна длине волны возмущения. Таким образом, факторы, влияющие на возмущения с коротким периодом, имеют основное значение в вопросе об устойчивости. Наряду с тривиальным влиянием вязкости существенное влияние на развитие возмущений оказывают диффузия реагирующих веществ и теплопроводность. Вследствие диффузии и теплопроводности возмущения влияют на температуру пламени, и скорость пламени относительно газа не может уже считаться постоянной. Влияние изменения скорости пламени при искривлениях его поверхности на гидродинамическую неустойчивость рассматривалось Маркштейном [2].

На первый взгляд, имея в виду один только тепловой аспект вопроса об устойчивости, можно было бы предположить, что пламя всегда устойчиво. В самом деле, участок А, выпуклый в сторону свежей смеси (фигура), отдает больше тепла, чем плоский участок фронта, так что скорость пламени в точке А должна, казалось бы, быть меньше нормальной. Напротив, газ, поступающий слева в точку В, нагревается не только спереди, но и сбоку, что должно облегчать и ускорять его горение. Увеличение скорости горения на вогнутых участках и уменьшение ее на выпуклых участках, очевидно, приводит к выравниванию фронта, т. е. обуславливает устойчивость плоского пламени.

Однако, по замечанию одного из авторов [3], рассмотрение диффузии горючего может изменить этот результат, так как к выпуклым участкам притекает больше горючего, а к вогнутым — меньше. В работе [3] было высказано мнение, что если коэффициент диффузии горючего  $D$  больше коэффициента температуропроводности смеси  $\kappa$ , то уменьшение теплового потока на выпуклых участках с избытком компенсируется повышением притока горючего, температура выпуклых участков пламени повышается, скорость пламени на таких участках возрастает, и при  $D > \kappa$  пламя оказывается неустойчивым.

Роль  $D$  и  $\kappa$  в распространении пламени была впервые рассмотрена Льюисом и Эльбе [4]. Справедливо отметив, что при  $D > \kappa$  сумма химической и тепловой энергии (точнее, энтальпии) имеет минимум вблизи фронта, они сделали из этого неправильный вывод, что при  $D > \kappa$  пламя устойчиво, а при  $D < \kappa$  — неустойчиво.

В предлагаемой работе проделан расчет закона нарастания или затухания возмущений пламени в зависимости от соотношения  $D$  и  $\kappa$  и от химической кинетики реакции горения. Задача решается приближенно, в предположении сильной температурной зависимости скорости химической реакции (большой энергии активации). В этом приближении зону химической реакции можно считать узкой по сравнению с михельсоновской зоной подогрева и диффузии. Движение газа не рассматривается; значения  $D$  и  $\kappa$  считаются постоянными (не учитывается их зависимость от температуры). Возмущения всех величин берутся в виде

$$f(x) e^{\varphi t} \sin ky \quad (1.1)$$

где  $x$  — координата, отсчитываемая по перпендикуляру от невозмущенной поверхности пламени,  $y$  — координата, отсчитываемая вдоль поверхности пламени,  $t$  — время.

Уравнение поверхности пламени берется в виде

$$x = a(y, t) = \varepsilon e^{\varphi t} \sin ky \quad (1.2)$$

Проведенный расчет (см. ниже) дает

$$\varphi = k^2 [D (A / 2RT_b - 1) - \kappa A / 2RT_b] \quad (1.3)$$

где  $A$  — энергия активации,  $T_b$  — температура горения. При не очень малых  $(D - \kappa)$ , пренебрегая единицей по сравнению с  $A / 2RT_b$ , что в силу сделанного предположения о большой энергии активации возможно, получим

$$\varphi = k^2 (D - \kappa) A / 2RT_b \quad (1.4)$$

Этот результат вполне соответствует высказанным выше качественным соображениям о роли  $(D - \kappa)$  и температурной зависимости горения. С другой стороны, при  $D = \kappa$  члены с  $A / 2RT_b$  в (1.3) сокращаются и получается

$$\varphi = -k^2 \kappa = -k^2 D \quad (1.5)$$

Как известно (см., например, [5]), при  $D = \kappa$  имеет место точное подобие поля температуры и поля концентрации, причем не только для одномерной невозмущенной задачи, но и в общем случае (при надлежащих начальных условиях). При  $D = \kappa$  независимо от формы поверхности пламени окончание химической реакции (исчерпание горючего) происходит всегда при одной и той же температуре  $T_b$ . Поэтому в полученный окончательный ответ не входит энергия активации. Устойчивость одномерного стационарного решения при  $D = \kappa$  рассматривалась ранее в работах [6,7]. Было показано, что в этом случае всегда имеется тривиальное решение с  $\varphi = 0$  и нет решения с  $\varphi > 0$  (точнее, с  $\text{Re } \varphi > 0$ ). Отсюда элементарно получается для периодического по  $y$  возмущения выражение (1.5). Существенно, что исследование случая

$D = \kappa$  было проведено в [6,7] без дополнительного предположения о сильной температурной зависимости и тонкой зоне реакции. Поэтому совпадение результатов в этом частном случае является подтверждением правильности приближенного метода, примененного в настоящей работе.

Скорость сгорания  $u_*$  оказывается связанной с кривизной пламени следующим соотношением:

$$u_* = u + \frac{A(D - \kappa)}{2RT_b} \frac{\partial^2 a(y, t)}{\partial y^2}$$

Здесь  $u$  — невозмущенная скорость пламени. Наличие большого множителя  $A/2RT_b$  оправдывает подход Маркштейна [2], который из всех возможных влияний диффузии и теплопроводности учел лишь одно — изменение скорости пламени.

**§ 2. Постановка задачи.** Рассматриваются уравнения теплопроводности и диффузии в веществе, движущемся с постоянной скоростью слева направо вдоль оси  $x$ . Зону химической реакции выделяем особо, поэтому считаем, что вне зоны вещество не расходуется и не выделяется. Уравнения имеют вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -u \frac{\partial T}{\partial x} + \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -u \frac{\partial c}{\partial x} + D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \quad (2.2)$$

(не уменьшая общности, можно считать задачу двумерной). Зону химической реакции рассматриваем как поверхность, на которой имеет место разрыв потока вещества и потока тепла, причем температура и концентрация на этой поверхности остаются непрерывными.

Пусть  $x = a(y, t)$  — координата зоны реакции. Обозначим через  $\partial/\partial n$  производную по нормали к поверхности  $x = a(y, t)$ ; тогда имеем,

$$c|_{a-0} = c|_{a+0}, \quad T|_{a-0} = T|_{a+0} \quad (2.3)$$

$$\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{a+0} - \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{a-0} \right) + qD \left( \frac{\partial c}{\partial n} \Big|_{a+0} - \frac{\partial c}{\partial n} \Big|_{a-0} \right) = 0 \quad (2.4)$$

Эти уравнения получаются формально путем интегрирования уравнений типа (2.1) и (2.2) с добавочными членами, представляющими тепловыделение и расходование вещества при химической реакции, в пределе при стремлении к нулю толщины зоны реакции. Уравнения (2.3) представляют собой следствия конечности потоков, уравнение (2.4) выражает собой сохранение энергии и получается после почленного сложения уравнений теплопроводности и диффузии с коэффициентами, обеспечивающими уничтожение членов, зависящих от химической реакции.

Если  $c$  — концентрация вещества, находящегося в недостатке (например, концентрация горючего в смеси, содержащей избыток кислорода), то  $c \equiv 0$  при  $x > 0$ . Следовательно,  $c|_{a+0} = 0$  и  $\partial c / \partial n|_{a+0} = 0$ . Согласно (2.3), имеем также  $c|_{a-0} = 0$ .

Рассмотрим предельный случай такой кинетики реакции, при которой ширина зоны реакции стремится к нулю, причем одновременно стремится к нулю и средняя концентрация внутри зоны, но так, что количество вещества, сгорающего в единицу времени  $m$ , остается конечным

$$m = -D \frac{\partial c}{\partial n} \Big|_{a-0} \quad (2.5)$$

Концентрация в зоне реакции определяется из уравнения диффузии с реакцией и граничных условий

$$c|_{a+0} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial n} \Big|_{a+0} = 0 \quad (2.6)$$

Величина  $m$  зависит от температуры в зоне реакции

$$T_r = T|_{\alpha+0} = T|_{\alpha-0} \quad (2.7)$$

Как уже указывалось, в возмущенном пламени при  $D \neq \kappa$  температура  $T_r$  может отличаться от «теоретической» температуры горения плоского пламени  $T_b$ . Зависимость от  $T_r$  количества вещества, сгорающего в единицу времени на единице поверхности,  $m(T_r)$ , считаем известной из теории распространения пламени.

В простейшем случае нецепной реакции

$$m \sim \exp(-A/2RT_r) \quad (2.8)$$

Заметим, что скорость потребления вещества однозначно связана и прямо пропорциональна скорости передвижения зоны реакции относительно газа лишь в случае движения плоского пламени с постоянной скоростью. В рассматриваемой задаче о возмущенном пламени такой пропорциональности нет.

§ 3. Расчет устойчивости. Расчет проводится обычным методом малых возмущений; поверхность пламени задается при этом в виде

$$x = a(y, t) = \varepsilon \exp(iky + i\omega t + \varphi t) \quad (3.1)$$

где  $k, \omega, \varphi$  — вещественные константы,  $\varepsilon$  — малая величина. В виду малости  $\varepsilon$  производная по нормали отличается от производной по  $x$  на величину порядка  $\varepsilon^2$ , которой пренебрегаем. Невозмущенное решение имеет вид

$$\begin{aligned} T_n &= (T_b - T_0) e^{ux/\kappa} + T_0 & c_n &= c_0 (1 - e^{ux/D}) & (x < 0) \\ T_n &= T_b, & c_n &\equiv 0, & (x > 0) \end{aligned} \quad (3.2)$$

причем из (2.4) следует соотношение

$$c_p \rho (T_b - T_0) = c_0 q \quad (3.3)$$

Возмущенное решение ищем в виде

$$T = T_n + T_1 \quad (x < 0) \quad T = T_n + T_2 \quad (x > 0), \quad c = c_n + c_3 \quad (x < 0)$$

$$T_1 = g (T_b - T_0) \exp(r_1 x +iky + i\omega t + \varphi t) \quad (3.4)$$

$$T_2 = h (T_b - T_0) \exp(-r_2 x +iky + i\omega t + \varphi t)$$

$$c_3 = f c_0 \exp(r_3 x +iky + i\omega t + \varphi t)$$

Из уравнений (2.1) и (2.2) найдем

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{u}{2\kappa} + \sqrt{\frac{u^2}{4\kappa^2} + k^2 + \frac{(\varphi + i\omega)}{\kappa}} \\ r_2 &= -\frac{u}{2\kappa} + \sqrt{\frac{u^2}{4\kappa^2} + k^2 + \frac{(\varphi + i\omega)}{\kappa}} \\ r_3 &= \frac{u}{2D} + \sqrt{\frac{u^2}{4D^2} + k^2 + \frac{(\varphi + i\omega)}{D}} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Граничные условия (2.3) дадут

$$\begin{aligned} T_r = T(a) &= T_b + (T_b - T_0) \left( \frac{u\varepsilon}{\kappa} + g \right) e^{iky + i\omega t + \varphi t} = \\ &= T_b + (T_b - T_0) h e^{iky + i\omega t + \varphi t} \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$c(a) = c_0 \left( -\frac{u\varepsilon}{D} + f \right) e^{iky + i\omega t + \varphi t}$$

Отсюда получаем

$$\frac{u\varepsilon}{\kappa} + g - h = 0, \quad -\frac{u\varepsilon}{D} + f = 0 \quad (3.7)$$

Уравнение (2.4) с учетом (3.3) дает

$$\frac{u^2\varepsilon}{\kappa^2} + gr_1 + hr_2 = \left(\frac{u^2\varepsilon}{D^2} - r_3f\right)\frac{D}{\kappa} \quad (3.8)$$

Наконец, составим уравнение, выражающее зависимость химического потребления вещества от температуры

$$\frac{\delta m}{m} = \frac{A\delta T}{2RT_b^2} = \frac{A(T_b - T_0)}{2RT_b^2} h e^{iky + i\omega t + \varphi} = zh e^{iky + i\omega t + \varphi} \quad (3.9)$$

где

$$z = \frac{A(T_b - T_0)}{2RT_b^2} \approx \frac{A}{2RT_b} \quad (3.10)$$

С другой стороны, по (2.5) найдем

$$\frac{\delta m}{m} = \left(\frac{u\varepsilon}{D} - Dr_3\frac{j}{u}\right) e^{iky + i\omega t + \varphi} \quad (3.11)$$

Приравнявая (3.9) и (3.11), получаем

$$zh = \frac{u\varepsilon}{D} - Dr_3f/u \quad (3.12)$$

Однородная система из четырех линейных уравнений (3.7), (3.8), (3.12) с четырьмя неизвестными имеет нетривиальное решение при равном нулю определителе, что дает одно уравнение для нахождения  $\omega$  и  $\varphi$  (представляющих собой мнимую и вещественную части одной величины — комплексной частоты) в зависимости от волнового числа  $k$  и параметров  $D$ ,  $\kappa$ ,  $z$ .

Ограничимся случаем  $k \ll u/\kappa$ , т. е. возмущениями, длина волны которых больше ширины михельсоновской зоны прогрева. Нетрудно видеть, что  $\varphi$  и  $\omega$  при этом много меньше  $u^2/\kappa$ . Выражения для показателей  $r_i$  при этом упрощаются

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{u}{\kappa} + \frac{\kappa}{u} \left(k^2 + \frac{\varphi + i\omega}{\kappa}\right) \\ r_2 &= \frac{\kappa}{u} \left(k^2 + \frac{\varphi + i\omega}{\kappa}\right) \\ r_3 &= \frac{u}{D} + \frac{D}{u} \left(k^2 + \frac{\varphi + i\omega}{D}\right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

После простых вычислений окончательно получаем

$$\omega = 0, \quad \varphi = k^2 [D(z - 1) - \kappa z] \quad (3.14)$$

Так как обычно  $z$  велико, то, пренебрегая единицей сравнительно с  $z$ , найдем

$$\varphi = k^2 z (D - \kappa) \quad (3.15)$$

т. е.  $\varphi > 0$  при  $D > \kappa$  и пламя неустойчиво,  $\varphi < 0$  при  $D < \kappa$  и пламя устойчиво.

В случае  $D = \kappa$  из формулы (3.14) вытекает

$$\varphi = -\kappa k^2 \quad (3.16)$$

Но при  $D = \kappa$  величины  $T$  и  $s$  связаны алгебраическим соотношением, так что в одномерной задаче получается одно уравнение для  $T(x, t)$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -u \frac{\partial T}{\partial x} + \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho c_p} \Phi(T) \quad (3.17)$$

