ПМТФ, № 2, 1969

РАСПРОСТРАНЕНИЕ МАГНИТОУПРУГИХ ВОЛН НАПРЯЖЕНИЯ ОТ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

И. Т. Селезов

(Киев)

Исследуется влияние постоянного осевого магнитного поля на распространение магнитоупругих волн сжатия от полости, внутри которой — магнитоакустическая среда, а на стенке задан скачок поверхностной силы. В работе [1] рассматривается задача в случае, когда в полости — вакуум, а вне полости — идеальный проводник. Влияние магнитного поля не исследуется.

Здесь рассматриваются две задачи: для слабой и идеальной проводимостей. Уравнения линеаризуются и преобразуются по Лапласу. Построены приближенные асимптотические решения, справедливые в окрестности фронтов волн. Решения исследованы аналитически и численно.

1. Если принять, что для магнитоупругой среды выполняются условия упругой изотропности, геометрической и упругой линейности, изотропности диэлектрической и магнитной проницаемостей, то система уравнений магнитоупругости записывается в виде

$$G\nabla^2\mathbf{u} + (\lambda + G)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} = \rho_c\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} - \mathbf{j}\times\mathbf{B} - \rho_e\mathbf{E} - \mathbf{F} \tag{1.1}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{D} = \rho_e \tag{1.2}$$

$$\mathbf{j} = \sigma\left(\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\times\mathbf{B}\right), \qquad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \qquad \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \tag{1.3}$$

При аналогичных предположениях уравнения магнитоакустической среды имеют следующий вид:

$$-\operatorname{grad} p = \rho_0\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{j}^a\times\mathbf{B}^a - \rho_e{}^a\,\mathbf{E}^a - \mathbf{F}^a \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho_0\operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \qquad p = p(\rho) \tag{1.5}$$

Система (1.4), (1.5) дополняется также уравнениями, аналогичными (1.2), (1.3).

Граничные условия на поверхности раздела двух сред, вытекающие из законов сохранения

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = v_n, \quad (\sigma_{ik} + T_{ik})\,n^i = (\sigma_{ik}{}^a + T_{ik}{}^a)\,n^i + Q_k \quad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3) \tag{1.6}$$

$$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{B} - \mathbf{B}^a) = 0, \quad \mathbf{n}\times(\mathbf{H} - \mathbf{H}^a) = 0, \quad \mathbf{n}\cdot(\mathbf{D} - \mathbf{D}^a) = 0, \quad \mathbf{n}\times(\mathbf{E} - \mathbf{E}^a) = 0 \tag{1.7}$$

Здесь

$$\sigma_{ik} = c_{ikjl}\,\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_j}\right), \quad T_{ik} = \varepsilon E_i E_k + \mu H_i H_k - \frac{1}{2}\delta_{ik}(\varepsilon E^2 + \mu H^2)$$

В дальнейшем принимаем, что в каждой из сред отсутствуют массовые силы $\mathbf{F} = \mathbf{F}^a = 0$ и свободные электрические заряды $\rho_e = \rho_e{}^a = 0$. В магнитоупругой среде будем пренебрегать также токами смещения $\partial D / \partial t = 0$, а магнитоакустическую среду будем считать непроводящей $\sigma^a = 0$ и удовлетворяющей условию изэнтропичности. Магнитное поле представим в виде суммы невозмущенной и возмущенной составляющих $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}$, причем $|\mathbf{h}| \ll |\mathbf{H}_0|$, что позволяет линеаризовать все уравнения.

С учетом указанных предположений после некоторых преобразований получаем из уравнений (1.1) — (1.3) для магнитоупругой среды

$$G\nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + G) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} = \rho_c \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \mu (\operatorname{rot} \mathbf{h}) \times \mathbf{H}_0 \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = \frac{1}{\mu\sigma} \nabla^2 \mathbf{h} + \operatorname{rot}\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \mathbf{H}_0\right), \qquad \operatorname{div} \mathbf{h} = 0 \tag{1.9}$$

и из уравнений (1.4) и (1.5) для магнитоакустической среды

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_0{}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \varphi = 0, \qquad \left(\nabla^2 - \frac{1}{c_1{}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \begin{Bmatrix} \mathbf{h}^a \\ \mathbf{e}^a \end{Bmatrix} = 0 \tag{1.10}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{h}^a = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{e}^a}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{e}^a = -\mu \frac{\partial \mathbf{h}^a}{\partial t}, \quad \mathbf{v} = -\operatorname{grad} \varphi, \quad p = \rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \tag{1.11}$$

В случае слабой проводимости все величины можно разложить по малому магнитному числу Рейнольдса R_m и сохранить в уравнениях члены первого порядка малости [2]. В таком приближении индуцированные магнитные поля оказываются величинами более высокого порядка малости [3]. В этом случае последний член в уравнении (1.8) и первое уравнение (1.9) принимают вид

$$-\mu\sigma\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \mathbf{H}_0\right) \times \mathbf{H}_0, \qquad \operatorname{rot} \mathbf{h} = \frac{\mu\sigma}{R_m} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \mathbf{H}_0 \tag{1.12}$$

В случае идеальной проводимости последний член в уравнении (1.8), уравнение (1.9) и первое уравнение (1.3) приводятся к виду

$$-\mu [\operatorname{rot} \operatorname{rot} (\mathbf{u} \times \mathbf{H}_0)] \times \mathbf{H}_0, \quad \mathbf{h} = \operatorname{rot} (\mathbf{u} \times \mathbf{H}_0), \quad \mathbf{e} = -\mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \mathbf{H}_0 \tag{1.13}$$

2. Рассмотрим в цилиндрической системе координат r, θ, z магнитоупругую среду с цилиндрической полостью радиуса a, заполненной магнитоакустической средой, при действии невозмущенного магнитного поля $(0, 0, B_{0z})$ и действии на стенку полости нагрузки $Q_r = -q_0 s(t)$, где $s(t)$ — функция Хевисайда.

Вводя безразмерные параметры по формулам

$$(r^*, u_r^*) = \frac{1}{a}(r, u_r), \quad t^* = \frac{c_e}{a} t, \quad (v^*, c^*) = \frac{1}{c_e}(v, c)$$

$$(\sigma_{ik}^*, q_0^*) = \frac{1}{\lambda + 2G}(\sigma_{ik}, q_0), \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_c}, \quad \varphi^* = \frac{\varphi}{c_e a}, \quad h_i^* = \frac{h_i}{H_{0z}}$$

$$e_i^* = \frac{e_i}{\mu H_{0z} c_e}, \quad R_m = \mu\sigma c_e a, \quad P_H = \frac{\mu H_{0z}{}^2}{\lambda + 2G}$$

и опуская звездочки, получаем из уравнений (1.10) и (1.11) в области $0 < r < a$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi = 0, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)h_z^a = 0 \tag{2.1}$$

$$-\frac{\partial h_z^a}{\partial r} - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial e_\theta^a}{\partial t}, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r e_\theta^a = -\frac{\partial h_z^a}{\partial t} \tag{2.2}$$

Из уравнений (1.8), (1.9), (1.12) и (1.13) в области $a \leqslant r \leqslant \infty$ получаем в случае слабой проводимости

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\right)u_r = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + R_m P_H \frac{\partial}{\partial t}\right)u_r, \quad \frac{\partial h_z}{\partial r} = \frac{\partial u_r}{\partial t} \tag{2.3}$$

в случае идеальной проводимости

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\right)u_r = \frac{1}{1 + P_H}\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \quad h_z = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r u_r, \quad e_\theta - \frac{\partial u_r}{\partial t} \tag{2.4}$$

Из условий (1.6) и (1.7) определяем линеаризованные граничные условия на поверхности $r = 1$ (приведены все условия, кроме тождественно удовлетворяющихся). В случае слабой проводимости

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\lambda}{\lambda + 2G} u_r =$$

$$= \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial t} = q_0 s(t) + \frac{1}{2} P_H \left(1 - \frac{\mu^a}{\mu}\right) + P_H \left(R_m h_z - \frac{\mu^a}{\mu} h_z^a\right) \tag{2.5}$$

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial u_r}{\partial t}, \quad R_m h_z = h_z^a \tag{2.6}$$

В случае идеальной проводимости последний член в уравнении (2.5) и второе уравнение (2.6) заменяются следующими:

$$P_H \left(h_z - \frac{\mu^a}{\mu} h_z^a\right), \qquad e_\theta = e_\theta^a \tag{2.7}$$

Кроме того, искомые функции должны удовлетворять условиям излучения и ограниченности при $r \to \infty$.

Начальные условия принимаются нулевые.

Отметим, что первые уравнения в (2.3) и (2.4), в которые входят члены, учитывающие влияние магнитного поля, являются независимыми, т. е. системы уравнений в каждом из рассматриваемых приближений частично распались. Но в граничных условиях (2.5) — (2.7) связь между упругим и электромагнитным полями остается.

В дальнейшем будем рассматривать ненамагничиваемые среды $\mu = \mu^a$, тогда граничные условия упрощаются. В случае слабой проводимости, как видно из условий (2.5) и (2.6), связь между полями исчезает и в граничных условиях, т. е. можно независимо определить поле упругих перемещений, а затем электромагнитное поле. Аналогичное упрощение имеет место и в магнитной гидродинамике [2]. В случае идеальной проводимости при $\mu = \mu^a$, как видно из формул (2.7), связь между полями в граничных условиях остается.

3. Уравнения (2.1) — (2.7) преобразуются по Лапласу

$$F(r,\ \varkappa) = \int\limits_0^\infty f(r,\ t) \exp(-\varkappa t)\, dt$$

Решения в пространстве изображений, удовлетворяющие граничным и начальным условиям, записываются в случае слабой проводимости

$$\Phi = q_0 c_0 \frac{I_0(\varkappa r / c_0)}{\varkappa \Delta I_1(\varkappa / c_0)} \qquad (0 < r < a) \tag{3.1}$$

$$U_r = -q_0 \frac{K_1(\Omega r)}{\varkappa \Delta K_1(\Omega)}, \quad \Sigma_{rr} = -\frac{q_0}{\varkappa \Delta K_1(\Omega)} \left[\Omega K_1{}'(\Omega r) + \frac{\lambda}{\lambda + 2G} \frac{1}{r} K_1(\Omega r)\right] \qquad (a \leqslant r \leqslant \infty) \tag{3.2}$$

Здесь $I_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя, $K_1(z)$ — функция Макдональда

$$\Omega = \sqrt{\varkappa^2 + R_m P_H \varkappa}, \quad \Delta = \frac{\lambda}{\lambda + 2G} + \Omega \frac{K_1{}'(\Omega)}{K_1(\Omega)} - \rho_0 c_0 \varkappa \frac{I_0(\varkappa / c_0)}{I_1(\varkappa / c_0)} \tag{3.3}$$

В случае идеальной проводимости

$$(0 < r < a) \qquad (a \leqslant r \leqslant \infty)$$

$$\Phi = -q_0 c_0 \frac{I_0(\varkappa r / c_0)}{\varkappa \Delta_1 I_1(\varkappa / c_0)}, \quad U_r = q_0 \frac{K_1(\varkappa_1)}{\varkappa \Delta_1} K_1(\varkappa_1 r)$$

$$H_z{}^a = -\frac{q_0}{c_1} \frac{I_0(\varkappa r / c_1)}{\Delta_1 I_1(\varkappa / c_1)}, \quad H_z = \frac{q_0}{\sqrt{1 + P_н}} \frac{K_1(\varkappa_1)}{\Delta_1} K_0(\varkappa_1 r) \tag{3.4}$$

$$E_\theta{}^a = q_0 \frac{I_1(\varkappa r / c_1)}{\Delta_1 I_1(\varkappa / c_1)}, \quad E_\theta = q_0 \frac{K_1(\varkappa_1)}{\Delta_1} K_1(\varkappa_1 r)$$

$$\Sigma_{rr} = -q_0 \frac{K_1(\varkappa_1)}{\varkappa \Delta_1} \left[\varkappa_1 K_0(\varkappa_1 r) + \frac{2G}{\lambda + 2G} \frac{1}{r} K_1(\varkappa_1 r)\right] \tag{3.5}$$

где

$$\varkappa_1 = \frac{\varkappa}{\sqrt{1 + P_н}}, \quad \Delta_1 = \frac{2G}{\lambda + 2G} + \varkappa \sqrt{1 + P_н} \frac{K_0(\varkappa_1)}{K_1(\varkappa_1)} +$$

$$+ \rho_0 c_0 \varkappa \frac{I_0(\varkappa / c_0)}{I_1(\varkappa / c_0)} + P_н \frac{\varkappa}{c_1} \frac{I_0(\varkappa / c_1)}{I_1(\varkappa / c_1)}$$

Отметим, что в выражениях для Δ и Δ_1, входящих в формулы (3.1) — (3.5), первый и второй члены характеризуют магнитоупругость, третий — акустику, четвертый — электромагнитное поле в акустической среде.

Построить точное обращение полученных решений с помощью интеграла Римана — Меллина весьма затруднительно. Поэтому ниже построены приближенные асимптотические решения, справедливые вблизи фронта магнитоупругой волны.

Цилиндрические функции, входящие в выражения (3.1) — (3.5), заменяются их асимптотическими представлениями при больших $\varkappa$, в которых удерживаются два члена. Сохраняя в выражениях (3.1) — (3.5) все члены до порядка $1/\varkappa$ включительно и производя оценки отброшенных членов, получаем приближенные значения изображений, по которым затем определяем оригиналы. Приведем окончательные выражения для радиальных напряжений σ_{rr}.

Для слабопроводящей среды

$$\text{при } t > (r-1) \geqslant 0 \tag{3.6}$$

$$\frac{\sigma_{rr}}{q_0} \approx -\frac{\exp\left[-{}^1/_2 R_m P_{\text{н}} (r-1)\right]}{(1+\rho_0 c_0)\sqrt{r}} \{s[t-(r-1)] + (A_0 + A_1 r^{-1})[t-(r-1)]\}$$

$$\text{при } t < (r-1)$$

$$\sigma_{rr}/q_0 = 0$$

Для идеальнопроводящей среды (3.7)

$$\frac{\sigma_{rr}}{q_0} \approx -\frac{1}{A\sqrt{r}}\left\{\frac{-\lambda+14G}{\lambda+2G}\frac{1}{r} + \right. \qquad \text{при } t > \frac{r-1}{\sqrt{1+P_H}} \geqslant 0$$

$$\left. + \left(\frac{A}{B\sqrt{1+P_H}} - \frac{-\lambda+14G}{\lambda+2G}\right)\exp\left[-\frac{A}{B}\left(t - \frac{r-1}{\sqrt{1+P_H}}\right)\right]\right\}$$

$$\sigma_{rr}/q_0 = 0 \quad \text{при } t < \frac{r-1}{\sqrt{1+P_H}}$$

Здесь

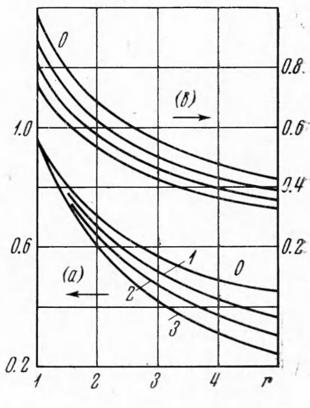
$$A_0 = \frac{{}^3/_8 c_0 - {}^1/_2 \rho_0 c_0^2 - {}^7/_8 + \lambda/(\lambda+2G) + {}^1/_2 R_m R_H}{1+\rho_0 c_0} - \frac{3}{8}c_0, \quad A_1 = \frac{7}{8} - \frac{\lambda}{\lambda+2G}$$

$$A = -\frac{1}{8} + \frac{2G}{\lambda+2G} + \frac{1}{2}\rho_0 c_0^2\left(1 + \frac{3}{4}\frac{\sqrt{1+P_H}}{c_0}\right) + \frac{3}{8}P_H\left(1 + \frac{\sqrt{1+P_H}}{c_1}\right)$$

$$B = \sqrt{1 \times P_H} + \rho_0 c_0 + \frac{P_H}{c_1} \tag{3.8}$$

Решение (3.6) получено с асимптотической погрешностью $[t-(r-1)] \leqslant {}^3/_8\,\varepsilon$, где ε — заданная точность вычислений. Решение (3.7) справедливо в очень малой окрестности фронта волны. При $[t-(r-1)] \to 0$ в (3.6) и $[t-(r-1)]/\sqrt{1+P_H} \to 0$ в (3.7) эти решения переходят в точные для фронтов волн.

4. Исследуем влияние магнитного поля на σ_{rr}. В случае слабой проводимости из решения (3.6) видно, что при $r > 1$ с увеличением R_m и P_H величина $|\sigma_{rr}|$ убывает по экспоненциальному закону. За фронтом волны имеет место некоторое увеличение напряжений, что следует из (3.8): величина A_0 возрастает с увеличением $R_m P_H$.



В случае идеальной проводимости оценим прежде всего влияние электромагнитного поля магнитоакустической среды. В выражения (3.8) для A и B входят члены $\sqrt{1+P_H}/c_1$ и P_H/c_1, которые запишем в виде $c_e/c_1\sqrt{1+P_H}$ и $c_e/c_1 P_H$ и будем сравнивать с единицей. Если исходить из того, что сильные постоянные магнитные поля, создаваемые в лабораторных условиях в настоящее время, имеют порядок 10 *тл* [4,5], то указанные члены будут малыми высшего порядка. Отсюда следует, что в рассматриваемом случае в акустической среде (или вакууме) можно не учитывать токи смещения, если рассматриваются медленные движения в примыкающей магнитоупругой среде ($c_e/c_1 \ll 1$).

В случае идеальной проводимости с увеличением P_H увеличивается скорость распространения фронта волны в $\sqrt{1+P_H}$ раз и уменьшается амплитуда фронта волны как $(B\sqrt{1+P_H})^{-1}$: величина B, как это следует из (3.8), возрастает.

Наличие акустической среды уменьшает напряжения в обоих случаях, что объясняется ее инерционными и упругими свойствами.