

## О СООТНОШЕНИИ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НЕСТАЦИОНАРНОГО ГОРЕНИЯ ПОРОХА С МОДЕЛЬЮ ГРАНУЛЯРНО-ДИФФУЗИОННОГО ПЛАМЕНИ

Ю. А. Гостинцев  
(Москва)

В течение длительного времени феноменологический подход к проблеме нестационарного горения пороха, развиваемый в СССР [1—4], не находил понимания и зачастую неверно трактовался [5—6] американскими учеными, считающими обязательным моментом в теории нестационарных процессов построение детальной математической картины стационарного горения.

В то же время, а priori, чувствовалось, что оба подхода к проблеме получения граничных условий<sup>1</sup>  $u = u(p, \varphi)$ ,  $T_s = T_s(p, \varphi)$ ,  $T_F = T_F(p, \varphi)$  при достаточной точности эксперимента по определению  $u^0(p, T_0)$ ,  $T_s^0(p, T_0)$ ,  $T_F^0(p, T_0)$  в методе градиентного пересчета и удачном теоретическом описании стационарного пламени должны давать одинаковые результаты ( $u$  — скорость горения пороха,  $T_s$  и  $T_F$  — температуры поверхности и пламени,  $\varphi$  — градиент температуры у поверхности со стороны к-фазы,  $p$  — давление,  $T_0$  — начальная температура, индексом 0 сверху помечены стационарные значения величин).

В связи с этим во время пребывания автора в Принстонском университете США было предпринято [8] сравнение феноменологической модели нестационарного горения порохов с моделью гранулярно-диффузионного пламени, развитой для описания горения определенных классов смесевых топлив [9]. Модель стационарного гранулярно-диффузионного пламени, так называемая GDF-модель (Granular Diffusion Flame), широко используется в работах американских ученых, пределы ее применимости и ограничения экспериментально определены и оговорены [9].

Прежде чем переходить к результатам сравнительного анализа двух подходов опишем основные положения нестационарной GDF-модели [10]. В предположении квазистационарности всех процессов в газовой фазе уравнение энергии имеет вид:

$$\rho_g u_g c_p \frac{dT}{dx} - \lambda_g \frac{d^2 T}{dx^2} = \sum_j^m q_j r_j \quad (0 \leq x < \infty). \quad (1)$$

Принимается допущение, что функция тепловыделения представима  $\sum_j q_j r_j = \rho q_F \epsilon$ , где  $q_F$  и  $\rho \epsilon$  — эффективные теплота (кал/г) и массовая скорость (г/см<sup>3</sup>·с) суммарной реакции (строго говоря, подобное соотношение имеет место лишь при наличии одной реакции  $j=1$ ). Тогда после интегрирования (1) в безразмерных переменных

$$\vartheta = \frac{T - T_0}{T_s^0 - T_0}, \quad \xi = \frac{x u_s^0}{\lambda_s}, \quad v = \frac{u_s}{u_s^0}, \quad Q = \frac{q_F}{c_s (T_s^0 - T_0)}$$

<sup>1</sup> Именно к получению этих зависимостей и их решению совместно с уравнением Фурье для к-фазы пороха и известным законом изменения внешних факторов во времени сводится математическая задача нестационарного горения при квазистационарных реакционных зонах [7].

получим

$$\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_F e^{-\frac{c_p \lambda_s}{c_s \lambda_g} v \xi_F} - \left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{0+} = - \int_0^{\xi_F} \frac{Q \dot{\epsilon} \rho_g \kappa_s^2 c_s}{\lambda_g u_s^2} e^{-\frac{c_p \lambda_s}{c_s \lambda_g} v \xi} d\xi. \quad (2)$$

С точностью до малых величин порядка

$$\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_F \cdot e^{-\frac{c_p \lambda_s}{c_s \lambda_g} v \xi_F} \ll \left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{0+}$$

пламя можно считать адиабатическим по отношению к продуктам. В этом случае уравнение (2), определяющее тепловой поток из газа в к-фазу пороха, принимает вид

$$\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{0+} = \int_0^{\xi_F} \frac{Q \dot{\epsilon} \rho_g \kappa_s^2 c_s}{\lambda_g u_s^2} \cdot e^{-\frac{c_p \lambda_s}{c_s \lambda_g} v \xi} \cdot d\xi. \quad (3)$$

Для дальнейшей детализации (3) необходимо построение модели зоны пламени. В модели стационарного гранулярно-диффузионного пламени постулируется наличие в газе двух пламен, теплоотдачей из которых и регулируется скорость газификации к-фазы. (Обычно процесс газификации окислителя и связки эндотермичен. Так, для  $\text{NH}_4\text{ClO}_4$  это диссоциативная сублимация на  $\text{NH}_3$  и  $\text{HClO}_4$ .) При этом первое низкотемпературное пламя, располагающееся при обычных ракетных давлениях очень близко к поверхности кристаллов окислителя, является результатом реакции взаимоперемешанных  $\text{NH}_3$  и  $\text{HClO}_4$ . В теории эта зона обычно формально приписывается к поверхности горения, так что суммарный положительный эффект процессов там определяется эндотермической газификацией и экзотермической реакцией  $\text{NH}_3 + \text{HClO}_4$ .

Продукты первичной реакции, богатые кислородом, служат окислителем для испаряющегося горючего в зоне второго пламени. Эта высокотемпературная зона удалена значительно дальше от поверхности, нежели первое пламя (~нескольких десятков микрон), и требует для своего математического описания рассмотрения уравнений диффузии и теплопроводности в газе.

Газифицированное горючее предполагается поступающим в зону второго пламени в виде «карманов», неперемешанных с окисляющей средой. Ясно, что общая скорость реакции в такой зоне зависит от интенсивности идущих параллельно процессов диффузии и химической кинетики. Можно, однако, выделить два предельных случая. В первом из них горение полностью контролируется диффузионным перемешиванием пакетов горючего с окислителем (высокие давления и высокие температуры) и функция тепловыделения  $\rho_g \dot{\epsilon}$  описывается зависимостью:

$$\begin{aligned} \rho_g \dot{\epsilon}_{\text{dif}} &= \omega_{\text{dif}}, & 0 \leq \xi \leq \xi_F; \\ \rho_g \dot{\epsilon}_{\text{dif}} &= 0, & \xi > \xi_F. \end{aligned}$$

Во втором предельном случае лимитирующим процессом является скорость химических реакций (низкие давления и низкие температуры). Здесь функция тепловыделения может быть представлена в виде импульсной дельта-функции при  $\xi = \xi_F$ :  $\rho_g \dot{\epsilon}_{\text{ch}} = \omega_{\text{ch}} \delta(\xi - \xi_F)$ . Для расчета переходных процессов в нестационарной GDF-модели далее произвольно полагается

$$\rho_g \dot{\epsilon} = \sqrt{\frac{\tau'_{\text{ch}}}{\tau_R}} \omega_{\text{ch}} \cdot \delta(\xi - \xi_F) + \sqrt{\frac{\tau'_{\text{dif}}}{\tau_R}} \omega_{\text{dif}} \quad (4)$$

(косвенным оправданием такой записи служит согласование (4) с экспериментом). В (4)

$$\begin{aligned}\tau'_{\text{ch}} &= \frac{A^2 u_s^{0^2} T_F^2}{\rho^2 T_F^{0^2}} \exp \left[ \frac{E_F}{RT_F^0} \left( \frac{T_F^0}{T_F} - 1 \right) \right], \\ \tau'_{\text{dif}} &= \frac{B^2 u_s^{0^2}}{\rho^{2/3}} \cdot \left( \frac{T_F}{T_F^0} \right)^{5/3} \cdot \left( \frac{T_s^0}{T_s} \right)^{7/4}, \\ \sqrt{\tau'_R} &= \sqrt{\tau'_{\text{dif}}} + \sqrt{\tau'_{\text{ch}}}\end{aligned}\quad (5)$$

характерные безразмерные времена химической кинетики, диффузии и пламени. Коэффициенты  $A$  и  $B$  определяются из стационарного закона скорости горения [9]

$$\frac{1}{u_s(p)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^{1/3}}, \quad (6)$$

который можно экспериментально найти для исследуемого топлива при данной начальной температуре  $T_0$ .

Значение температур поверхности  $T_s^0$  и пламени  $T_F^0$  при каждом давлении энергия активации в  $\kappa$ -фазе  $E_s$ , а также эффективные теплоты поверхностных  $q_s$  и пламенных  $q_F$  реакций в GDF-модели предполагаются известными (зависимость  $T_F$  от  $p$  берется из термодинамического расчета, а  $T_s(u)$  — из закона пиролиза).

Величины  $\omega_{\text{ch}}$  и  $\omega_{\text{dif}}$  находятся из условия сохранения энергии в квазистационарных зонах химических реакций

$$\vartheta_F = \vartheta_s + Q \frac{c_s}{c_p} - \frac{\lambda_g}{\lambda_s} \cdot \frac{1}{v} \left( \frac{d\vartheta}{d\xi} \right)_{0+} \cdot \frac{c_s}{c_p}, \quad (7)$$

$$\frac{c_p}{c_s} \cdot \frac{\lambda_s}{\lambda_g} v (\vartheta_F - \vartheta_s) + \left( \frac{d\vartheta}{d\xi} \right)_{0+} - \frac{Q \kappa_s^2 c_s}{\lambda_s u_s^{0^2}} \int_0^\infty \rho_g \dot{\varepsilon} d\xi = 0. \quad (8)$$

Отсюда следует

$$\int_0^\infty \rho_g \dot{\varepsilon} d\xi = v \frac{\rho_s u_s^{0^2}}{\kappa_s}. \quad (9)$$

Для контролируемого скоростью химической кинетики пламени

$$\int_0^\infty \rho_g \dot{\varepsilon} d\xi = \int_0^\infty \omega_{\text{ch}} \delta(\xi - \xi_F) d\xi = \omega_{\text{ch}}$$

и

$$\omega_{\text{ch}} = v \frac{\rho_s u_s^{0^2}}{\kappa_s}. \quad (10)$$

Аналогичные выкладки для гранулярно-диффузионного пламени дают

$$\omega_{\text{dif}} = \frac{\rho_s u_s^{0^2}}{\kappa_s} \cdot \frac{v}{\xi_F}. \quad (11)$$

Процессы в газовой фазе квазистационарны, поэтому зависимости  $\tau'_{\text{ch}}$ ,  $\tau'_{\text{dif}}$ ,  $\tau'_R$  от температур пламени, поверхности и от давления будут

оставаться одними и теми же как для стационарных, так и для переходных процессов. Тогда, выполняя интегрирование в (3), получим

$$\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{0+} = \frac{\lambda_s}{\lambda_g} \cdot \frac{Qv}{\sqrt{\tau_R}} \left[ \sqrt{\tau_{ch}} \cdot e^{-\frac{c_s \lambda_g}{c_p \lambda_s} v \xi_F} + \sqrt{\tau_{dif}} \left( 1 - e^{-\frac{c_s \lambda_g}{c_p \lambda_s} v \xi_F} \right) \right] + \frac{\sqrt{\tau_{dif}} \left( 1 - e^{-\frac{c_s \lambda_g}{c_p \lambda_s} v \xi_F} \right)}{c_s \lambda_g v \xi_F / (c_p \lambda_s)}$$

Если учесть, что средняя скорость газа  $u \cong x_F / t'_R$ , то в безразмерном виде будем иметь дополнительное соотношение для

$$v = \frac{c_p \lambda_s}{c_s \lambda_g} \cdot \frac{\xi_F}{\tau_R}$$

Отсюда окончательная форма уравнения для градиента температуры у поверхности со стороны газа принимает вид

$$\frac{\lambda_g}{\lambda_s} \left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{0+} = \frac{Qv}{\sqrt{\tau_R}} \left[ \sqrt{\tau_{ch}} \cdot e^{-v^2 \tau_R} + \left( 1 - e^{-v^2 \tau_R} \right) \cdot \frac{\sqrt{\tau_{dif}}}{v^2 \tau_R} \right]. \quad (12)$$

Тепловой баланс на поверхности горения дает дополнительную связь

$$\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{0-} = \frac{\lambda_g}{\lambda_s} \left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{0+} - Hv, \quad H = \frac{Q_s}{c_s (T_s^0 - T_0)}. \quad (13)$$

Таким образом, в уравнениях (4), (12), (13) содержится 5 неизвестных ( $v_R$ ,  $v$ ,  $v_s$ ,  $\varphi_{0+}$ ,  $\varphi_{0-}$ ). Добавляя сюда закон пиролиза, связывающий скорость газификации поверхности с ее температурой,

$$u_s = D \exp\left(-\frac{E_s}{RT_s}\right) \quad (14)$$

и считая  $p$  известной функцией времени, можно, как это показано в [2, 4, 7], получить зависимости

$$u_s(p, \varphi), T_s(p, \varphi), T_F(p, \varphi), \quad (15)$$

необходимые для решения нестационарных задач горения пороха под действием изменяющегося давления. После этого вся проблема сводится к решению нестационарного уравнения Фурье для к-фазы с алгебраическими связями (15).

Известен упрощенный вариант GDF-теории нестационарного горения, так называемая KTSS-модель, использованная для анализа устойчивости горения пороха в объеме [11]. Смысл KTSS-модели заключается в следующем.

В частном случае высоких давлений можно пренебречь вкладом времени химических реакций в общее время, т. е. положить  $\tau'_{dif} \gg \tau'_{ch}$ , или, что то же самое,  $\tau_R \approx \tau'_{dif}$ . Но тогда, в соответствии с (12) и (13), имеем

$$\frac{\lambda_g}{\lambda_s} \left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{0+} = \frac{Q}{v \tau'_{dif}} \cdot \left( 1 - e^{-v^2 \tau'_{dif}} \right),$$

$$\frac{\bar{\theta}_s + H}{Q} = \frac{1}{v^2 \tau'_{dif}} \cdot \left( 1 - e^{-v^2 \tau'_{dif}} \right),$$

причем первое выражение годится для переходных процессов с нестационарной к-фазой, а второе — только для стационарных. Пренебрегая здесь экспоненциальным членом, получим

$$\frac{\lambda_g}{\lambda_s} \left( \frac{d\theta}{d\xi} \right)_{0+} = \frac{Q}{v\tau'_{\text{dif}}}, \quad \frac{Q}{\tau'_{\text{dif}}} = \frac{\bar{v}^2 (\bar{\theta}_s + H)}{L^2 v}, \quad (16)$$

откуда следует возможность записи

$$\frac{\lambda_g}{\lambda_s} \left( \frac{d\theta}{d\xi} \right)_{0+} = \frac{\bar{v}^2 (\bar{\theta}_s + H)}{v}. \quad (17)$$

Если игнорировать в (16) температурную зависимость  $\tau'_{\text{dif}}$ , т. е. положить

$$\tau'_{\text{dif}} \cong \bar{\tau}'_{\text{dif}} = \frac{B}{\rho^{2/3}} \cdot u_s^{0.2},$$

то в размерном виде оно будет выглядеть следующим образом:

$$(\rho u)_s c_s (T_s - T_0) = \Phi(\rho) / u - (\rho u)_s Q_s, \quad (18)$$

где член  $\Phi(\rho)$  представляет размерную форму записи  $Q/\tau'_{\text{dif}}$ .

Сравнение феноменологической и GDF-моделей нестационарного горения проводилось по двум направлениям. С одной стороны, используя модель GDF и эмпирический закон пиролиза, рассчитывали зависимость стационарной скорости горения от давления и начальной температуры  $u_s^0(\rho, T_0)$  (в феноменологической модели эта зависимость определяется экспериментально). Продифференцируем по  $T_0$  при постоянном давлении выражение (18) для теплового потока из газа в к-фазу

$$\begin{aligned} \rho c_s (T_s^0 - T_0) \cdot \left( \frac{\partial u^0}{\partial T_0} \right)_p + \rho u^0 \cdot c_s \left[ \left( \frac{\partial u^0}{\partial T_0} \right)_p \cdot \left( \frac{\partial T_s^0}{\partial u^0} \right) - 1 \right] = \\ = - \left( \frac{\partial u^0}{\partial T_0} \right)_p \cdot \left[ \rho Q_s + \frac{\Phi(\rho)}{u^{0.2}} \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Совместно (18) и (19) дают выражение для температурной чувствительности скорости горения

$$\left( \frac{\partial \ln u^0}{\partial T_0} \right)_p = \left[ u^0 \frac{dT_s^0}{du^0} + 2(T_s^0 - T_0) \cdot (1 + H) \right]^{-1.0}. \quad (20)$$

Используя закон пиролиза (14) для связи скорости горения с температурой поверхности, будем иметь

$$\left( \frac{\partial \ln u^0}{\partial T_0} \right)_p = \left[ u^0 \frac{RT_s^{0.2}}{E_s} + 2(T_s^0 - T_0) \cdot (1 + H) \right]^{-1.0}. \quad (21)$$

На основании (21) и таблицы опытных данных [8] для топлива 75%  $\text{NH}_4\text{ClO}_4 + 25\%$  полибутадиенового каучука (PBAA) с монодисперсным (45 м) окислителем при  $p=20$  атм получим расчетную величину  $(\partial \ln u^0 / \partial T_0) = 0.0020$   $(^\circ\text{K})^{-1}$ , весьма близкую к экспериментально определенной (рис. 1: 1 — бидисперсный окислитель (70% 180 м, 30%, 40 м), 2 — монодисперсный окислитель (45 м)).

Таким образом, соотношение (21) указывает на возможность использования даже упрощенной модели пламени для расчета зависимости  $u_s^0(\rho, T_0)$ . Аналогичным способом, используя полную GDF-модель, можно численно рассчитать зависимость  $u_s^0(\rho, T_0)$  в широком диапазоне изменения  $p-T_0$ . Результаты такого счета (1) и их сравнение с экспериментальными данными (2) представлены на рис. 2 (75%  $\text{NH}_4\text{ClO}_4 +$

Параметр	Единица измерения	Значение
$\lambda_s$	кал/(см·с·°К)	0,0009
$c_s$	кал/г·°К	0,30
$\kappa_s$	см <sup>2</sup> /с	0,00187
$D$	см/с	2,241
$E_s$	кал/г·моль	1600
$u^0(p, T_0)$	—	(см. рис. 1)
$\beta = (\partial \ln u^0 / \partial T_0)_p$	—	0,00003 p + 0,00124

$u_s(p, T_0)$ , путем градиентного пересчета находилась зависимость  $u(p, \varphi)$ . После этого на ЭВМ численно решались: система уравнений (5), (7), (12) — (14) + уравнение Фурье для к-фазы, описывающие нестационарное горение топлива в GDF-модели, и система

$$\frac{\partial T}{\partial t} - u(p, \varphi) \frac{\partial T}{\partial x} = \kappa_s \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (-\infty < x \leq 0),$$

$$T \rightarrow T_0, \quad x \rightarrow -\infty, \quad T = T_s = -\frac{E_s}{R \ln(u/D)}, \quad x = 0,$$

$$T = T_0 + (T_s^0 - T_0) \exp\left(-\frac{u^0 x}{\kappa_s}\right), \quad t = 0,$$

$$u = u(p, \varphi), \quad p = p(t), \quad \left[\varphi = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{0-}\right],$$

феноменологической модели при известном (определяемом экспериментально при сбросе давления в двигателе) законе  $p(t)$  [1—4]. Результаты,

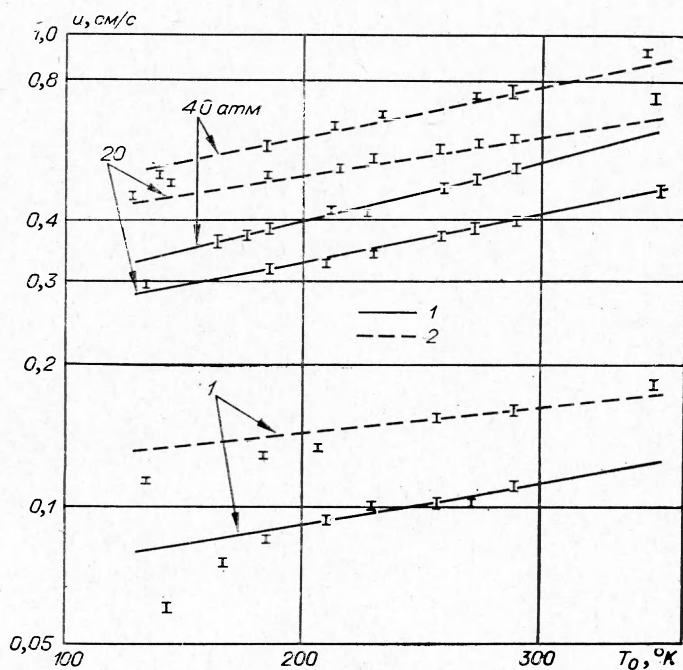


Рис. 1.

25% РВАА, монодисперсный окислитель).

Описанный выше этап работы является лишь демонстрацией пригодности GDF-модели пламени к используемому топливу, но не относится непосредственно к обоснованию феноменологического подхода. Поэтому далее, используя экспериментально полученные данные

$u_s(p, T_0)$ , путем градиентного пересчета находилась зависимость  $u(p, \varphi)$ . После этого на ЭВМ численно решались: система уравнений (5), (7), (12) — (14) + уравнение Фурье для к-фазы, описывающие нестационарное горение топлива в GDF-модели, и система

$$\frac{\partial T}{\partial t} - u(p, \varphi) \frac{\partial T}{\partial x} = \kappa_s \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (-\infty < x \leq 0),$$

$$T \rightarrow T_0, \quad x \rightarrow -\infty, \quad T = T_s = -\frac{E_s}{R \ln(u/D)}, \quad x = 0,$$

$$T = T_0 + (T_s^0 - T_0) \exp\left(-\frac{u^0 x}{\kappa_s}\right), \quad t = 0,$$

$$u = u(p, \varphi), \quad p = p(t), \quad \left[\varphi = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{0-}\right],$$

феноменологической модели при известном (определяемом экспериментально при сбросе давления в двигателе) законе  $p(t)$  [1—4]. Результаты,

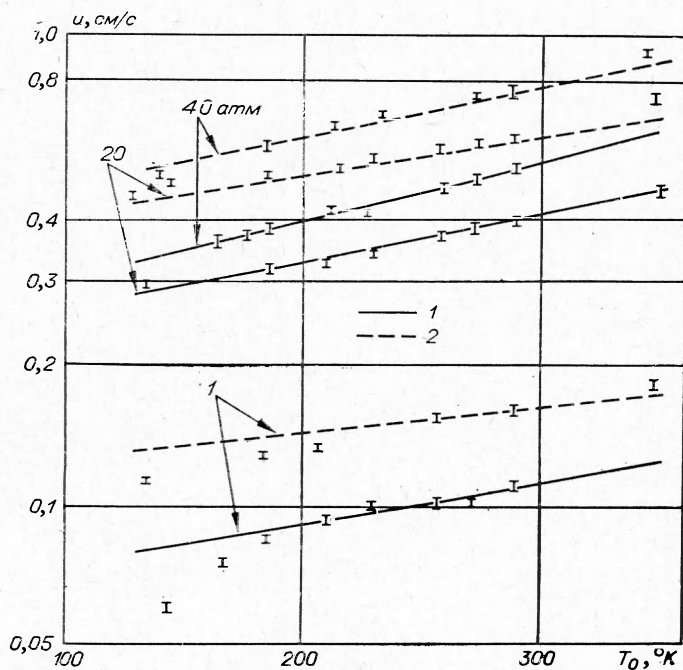


Рис. 1.

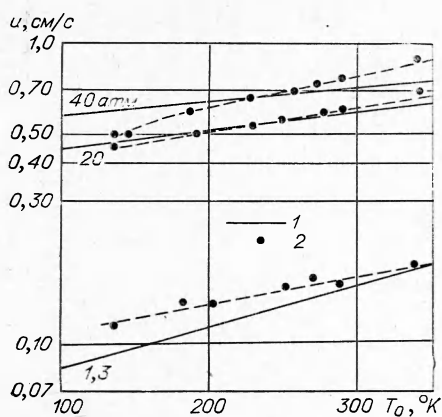


Рис. 2.

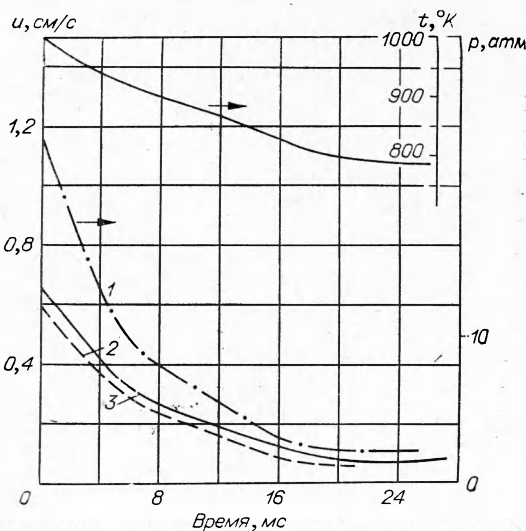


Рис. 3.

приведенные на рис. 3, показывают, что любую модель можно использовать для расчета ( $l-p(t)$ , эксперимент;  $u(t)$  (теория): 2 — GDF, 3 — феноменология).

Таким образом, можно считать, что имеет место совпадение феноменологической модели с моделью пламени в диапазоне применимости последней.

Однако, в принципе, первый подход обладает большим универсализмом, так как не требует предварительной детализации механизма стационарного горения, хотя и связан с трудностями экспериментального нахождения зависимостей  $u^0(p, T_0)$ ,  $T_s^0(p, T_0)$  в широком интервале изменения начальной температуры и давления.

Поступила в редакцию  
7/V 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Б. Зельдович. ЖЭТФ, 1942, 11—12.
2. Б. В. Новожилов. ФГВ, 1968, 4, 4.
3. Ю. А. Гостинцев, Л. А. Суханов, П. Ф. Похил. Докл. АН СССР, 1970, 195, 1.
4. Ю. А. Гостинцев, Л. А. Суханов, П. Ф. Похил. Тр. III Симпозиума по горению и взрыву. Л., 1971.
5. M. Summerfield, H. Krier. AIAA Paper 69—178, Jan., 1969.
6. C. Wooldridge, L. Dickinson. Review of Soviet Transient Combustion Research. ICRPG/AIAA 2-nd Solid Propulsion Conf., June 1967.
7. Ю. А. Гостинцев, Л. А. Суханов, П. Ф. Похил. ПМТФ, 1971, 5.
8. M. Summerfield, L. Caveny a. o. J. of Spacecr. Rock, 1971, 8, 3.
9. J. Steinz, P. Stang, M. Summerfield. AIAA Paper 68—658, 1968.
10. C. Merkle, S. Turke. AIAA Paper 69—176, 1969.
11. Н. Крир, Дж. Тьен и др. Ракетная техника и космонавтика, 1968, 2.