

АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК 621.391

СОГЛАСОВАНИЕ УГЛОВЫХ И ВЕКТОРНЫХ ОПИСАНИЙ
ТРЕХМЕРНЫХ ГРУППОВЫХ ТОЧЕЧНЫХ ОБЪЕКТОВ

Я. А. Фурман, И. Л. Егошина, Р. В. Ерусланов

*Поволжский государственный технологический университет,
424000, г. Йошкар-Ола, пл. Ленина, 3
E-mail: krtmbs@volgatech.net*

Решена задача различения пространственно расположенного трёхмерного группового точечного объекта в условиях действия координатных шумов и априорной неопределённости угловых параметров и сдвига начальной компоненты вектора, задающего объект. Предложен итерационный подход к согласованию угловых параметров и векторных описаний различаемого и эталонных групповых точечных объектов.

Ключевые слова: ассоциированный многогранник, групповой точечный объект, итерационная процедура, мера схожести, скалярное произведение, согласованная фильтрация, согласование векторных описаний, проволоочная модель.

Введение. Результатами работы многочисленных информационных систем являются изображения объектов, находящихся в поле зрения датчиков. Некоторые из них отображаются изолированными точками, и для них нельзя выделить отдельные детали кроме координат и в ряде случаев яркости свечения. Подобные изображения формируются радиолокационными станциями, а также различного рода астрономической и микробиологической аппаратурой. В целях извлечения из таких изображений большего количества информации стараются перейти от обработки одиночной точки к обработке изображений группы точек — групповых точечных объектов (ГТО). Граничные точки множества ГТО задают форму, а внутренние — структуру объекта.

Типичной задачей обработки точечных изображений является их идентификация, состоящая в распознавании на различных изображениях отметок, создаваемых одним и тем же объектом [1]. Близкая задача решается системами вторичной обработки радиолокационной информации, которые обнаруживают при каждом новом обзоре контролируемого сектора пространства точечные отметки от целей, коррелируют их с отметками предыдущих обзоров и связывают каждую с траекторией ранее обнаруженной цели. При этом выполняется сглаживание координат цели и вычисление её прогнозируемых положений в последующих обзорах. Наблюдая за перемещениями точечной отметки от цели, можно найти её скорость, ускорение и определить другие, принципиально ненаблюдаемые, параметры [2]. На этапе третичной обработки анализируется вся целевая (и помеховая) обстановка в зоне обзора, параметры траекторий целей, их взаимные характеристики, виды целей и т. д. Ещё одной важной проблемой является выделение изображений групп точек в сцене с точечными объектами [3, 4].

В работе [5] пространственно расположенному ГТО ставится в соответствие (ассоциируется) система вложенных выпуклых многогранников, вершинами которых служат точки ГТО. Такой предметный образ позволяет упорядочить все точки объекта и единственным образом провести через вершины ассоциированных многогранников $3D$ -контур. В закодированном виде он служит математической моделью ГТО. Подобная модель была названа проволоочной моделью ГТО. Проволоочная модель $\mathbf{D} = \{d(n)\}_0^{s-1}$ представляет

собой s -мерный вектор, компоненты которого в определённой последовательности задают элементарные векторы контура. Модель позволяет корректно вычислять с помощью нормированного скалярного произведения (НСП) [5, 6]

$$(\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2)^\circ = \cos \Phi = \varepsilon_{1,2} \quad (1)$$

меру схожести $\varepsilon_{1,2}$ двух ГТО, заданных проволочными моделями \mathbf{D}_1 и \mathbf{D}_2 , и решать задачу распознавания (различения) ГТО. В выражении (1) Φ — угол между векторами \mathbf{D}_1 и \mathbf{D}_2 , а символ « \circ » — операция их нормирования. Рассмотрим более подробно подход к различению ГТО на базе проволочной модели. Пусть дан алфавит $A = \{A_m\}_0^{M-1}$ из M классов трёхмерных групповых точечных объектов одинаковой размерности s . Каждый из M классов представлен одним эталонным ГТО $\mathbf{W}_m = \{w_m(n)\}_0^{s-1}$, $m = 0, 1, \dots, M-1$. В качестве различаемого выбирается ГТО $\mathbf{W}_l = \mathbf{G}$ класса A_l (номер l заранее неизвестен). Задача различения заключается в обоснованном отнесении ГТО \mathbf{G} к одному из классов алфавита A . Решение в пользу одного из классов часто принимается по критерию максимума меры схожести

$$\mathbf{G} \in A_t \quad \text{при} \quad \varepsilon_t \xrightarrow{m} \max. \quad (2)$$

На основании выражений (1) и (2) устройство различения имеет многоканальную по числу классов структуру (рис. 1), формирующую значения ε_m , $m = 0, 1, \dots, M-1$, и звено, определяющее номер канала с максимальным значением меры схожести ε_m .

1. Постановка задачи. Реально помеховые факторы редко допускают такой простой подход к различению ГТО, алгоритм которого приведён на рис. 1. Хотя выбор одного из эталонных ГТО \mathbf{W}_l в качестве различаемого является легко выполняемым условием, предварительно этот ГТО подвергается действию шума, масштабированию, вращению в трёхмерном пространстве и смещению номера начальной компоненты вектора проволочной модели с неизвестными или случайными значениями параметров. Математическая модель ГТО \mathbf{G} , полученная на основании ГТО класса A_l , имеет вид

$$\mathbf{G}^{(v)} = \text{rot}_{\psi, \rho} \mathbf{W}_l^{(v)} + \mathbf{Z}, \quad v = 0, 1, \dots, s-1. \quad (3)$$

Здесь ψ — угол поворота эталонного ГТО относительно оси с направляющим вектором ρ ; v — сдвиг номера начальной компоненты вектора \mathbf{D}_g относительно начальной компоненты вектора \mathbf{D}_l ; $\mathbf{Z} = \{z(n)\}_0^{s-1}$ — шумовой вектор. Чаще всего его компоненты $z(n)$, $n = 0, 1, \dots, s-1$, являются независимыми нормально распределёнными центрированными

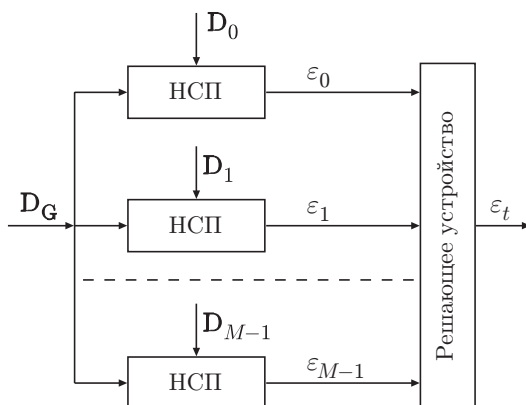


Рис. 1. Структура устройства различения полностью известных ГТО

случайными величинами с дисперсией σ^2 . С учётом принятой математической модели (3) ГТО $\mathbf{G}^{(v)}$ НСП (1) принимает вид

$$\varepsilon_m = (\mathbf{G}^{(v)}, \mathbf{W}_m)^\circ = (\text{rot}_{\psi, \rho} \mathbf{W}_l^{(v)} + \mathbf{Z}, \mathbf{W}_m), \quad m = 0, 1, \dots, M-1. \quad (4)$$

Групповой точечный объект \mathbf{W}_l будем называть прототипом различаемого ГТО \mathbf{G} . Из (4) следует, что мера схожести становится случайной величиной, зависящей при этом не только от степени схожести форм (структур) ГТО \mathbf{G} и \mathbf{W}_m , но и от параметров вращения Φ и ρ , а также величины смещения v начальных компонент векторов проволочных моделей $\mathbf{D}_g^{(v)}$ и \mathbf{D}_m , $m = 0, 1, \dots, M-1$.

Цель данной работы заключается в решении задач согласования угловых параметров и векторных описаний различаемого ГТО $\mathbf{G}^{(v)}$ с каждым из эталонных ГТО \mathbf{W}_m , $m = 0, 1, \dots, s-1$, а также в получении значения меры схожести ε_l с максимально возможным отношением сигнал/шум.

Уточним используемую терминологию. Два ГТО \mathbf{G} и \mathbf{W}_m считаются согласованными по угловым параметрам при условии

$$\psi \leq \psi_0, \quad (5)$$

где ψ_0 — близкое к нулю пороговое значение угла взаимного поворота многогранников, ассоциированных с этими ГТО. При отсутствии шума и равенстве нулю параметра сдвига v задача будет корректной лишь для одного случая, т. е. при согласовании ГТО \mathbf{G} со своим прототипом \mathbf{W}_l . Но поскольку номер l неизвестен, процедуру необходимо выполнить для всех M классов алфавита. Если же $\mathbf{Z} \neq 0$ и $v \neq 0$, то задача станет некорректной и для пары \mathbf{G} и \mathbf{W}_l . Ряд подходов, которые можно применить для решения углового согласования трёхмерных ГТО, рассмотрен в работах [7–9]. Предлагаемый далее подход отличается простой и регулярной структурой алгоритма, а также возможностью получения решений как для корректной, так и для некорректной задач.

Под согласованием векторных описаний трёхмерных ГТО будем понимать устранение сдвига $v \neq 0$ номеров начальных компонент векторов, задающих эти ГТО. Данная процедура также имеет значение лишь для различаемого ГТО $\mathbf{G}^{(v)}$ и его прототипа \mathbf{W}_l , так как величина l неизвестна, процедуру следует выполнять для всех пар ГТО $\mathbf{G}^{(v)}$ и \mathbf{W}_m , $m = 0, 1, \dots, M-1$.

2. Используемый математический аппарат. Решение задачи углового согласования ГТО основано на свойствах НСП векторов, являющихся элементами кватернионного пространства H [10, 6]. Для этого случая парциальные векторы $\mathbf{d}_g(n)$ и $\mathbf{d}_m(n)$ проволочных моделей $\mathbf{D}_g = \{\mathbf{d}_g(n)\}_0^{s-1}$ и $\mathbf{D}_m = \{\mathbf{d}_m(n)\}_0^{s-1}$ ГТО \mathbf{G} и \mathbf{W}_m , $m = 0, 1, \dots, s-1$, представлены векторными кватернионами

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_g(n) &= d_{g1}(n)\mathbf{i} + d_{g2}(n)\mathbf{j} + d_{g3}(n)\mathbf{k}, \\ \mathbf{d}_m(n) &= d_{m1}(n)\mathbf{i} + d_{m2}(n)\mathbf{j} + d_{m3}(n)\mathbf{k}, \end{aligned} \quad n = 0, 1, \dots, s-1.$$

НСП проволочных моделей ГТО в пространстве H_s имеет вид

$$(\mathbf{D}_g, \mathbf{D}_m)_{H_s}^\circ = \sum_{n=0}^{s-1} e(n) \cos \varphi(n) + \sum_{n=0}^{s-1} \mathbf{r}(n) e(n) \sin \varphi(n), \quad (6)$$

где $\varphi(n)$ — угол между парциальными векторами $\mathbf{d}_g(n)$ и $\mathbf{d}_m(n)$; $\mathbf{r}(n)$ — нормаль к собственной плоскости Ω_n этих векторов: $\|\mathbf{r}(n)\| = 1$; $e(n)$ — парциальный нормирующий множитель:

$$e(n) = \|\mathbf{d}_g(n)\| \|\mathbf{d}_m(n)\| / \|\mathbf{D}_g\| \|\mathbf{D}_m\|, \quad m = 0, 1, \dots, M - 1.$$

Из (6) видно, что НСП векторов в пространстве H по сравнению с НСП этих векторов в пространстве R дополнительно содержит ещё и гиперкомплексную часть, задающую нормаль $\mathbf{r}(n)$ к собственной плоскости Ω_n парциальных векторов. В тригонометрическом виде НСП векторов проволочных моделей \mathbf{D}_g и \mathbf{D}_m представляется как

$$(\mathbf{D}_g, \mathbf{D}_m)^\circ = \cos \Phi_m + \mathbf{r}_m \sin \Phi_m, \quad (7)$$

где Φ_m — угол между векторами проволочных моделей \mathbf{D}_g и \mathbf{D}_m ; $\cos \Phi_m$ — реальная и $\mathbf{r} \sin \Phi_m$, $\|\mathbf{r}\| = 1$, — гиперкомплексная части НСП (6).

Поворот $3D$ -вектора \mathbf{D} вокруг оси с направляющим вектором $\boldsymbol{\rho} = \rho_1 i + \rho_2 j + \rho_3 k$, $|\boldsymbol{\rho}| = 1$, на угол ψ (рис. 2) выполняется с помощью следующего преобразования [11]:

$$\mathbf{D}_{\boldsymbol{\rho}, \psi} = b \mathbf{D} b^{-1}, \quad (8)$$

где $b = \cos \psi/2 + \boldsymbol{\rho} \sin \psi/2$ — вращающий кватернион. Как следует из (7) при вращении вектора \mathbf{D}_l на один и тот же угол ψ вокруг оси поворачиваются все парциальные компоненты этого вектора.

3. Угловое согласование ГТО (корректная задача). Как видно из рис. 2, вектор \mathbf{D}_l и полученный его поворотом на угол ψ вокруг оси с направляющим вектором $\boldsymbol{\rho}$ вектор \mathbf{D}_g могут быть разложены на осевую и тангенциальную компоненты: $\mathbf{D}_l = \mathbf{a} + \mathbf{u}$, $\mathbf{D}_g = \mathbf{a} + \mathbf{v}$. Найдём связь величины угла φ между векторами \mathbf{D}_l и \mathbf{D}_g с величиной угла поворота ψ . Учтём, что $\|\mathbf{D}_l\| = \|\mathbf{D}_g\|$ и $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$. Пары этих векторов опираются на хорду, задаваемую вектором \mathbf{c} . Используя теорему косинусов для треугольников, получим $\|\mathbf{D}_g\|^2 \sin^2 \varphi/2 = \|\mathbf{u}\|^2 \sin^2 \psi/2$, $\psi \neq \pi$, откуда следует, что

$$\psi \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varphi \rightarrow 0. \quad (9)$$

При $\psi = \pi$ треугольник со сторонами $\|\mathbf{u}\|$ и $\|\mathbf{v}\|$ вырождается в прямую линию и угловое согласование становится невозможным. Таким образом, для случая корректной

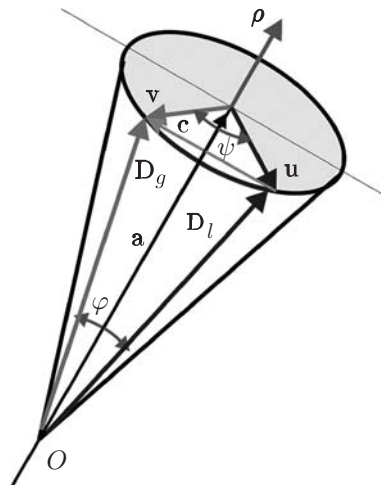


Рис. 2. Геометрические соотношения при повороте вектора \mathbf{D}_l

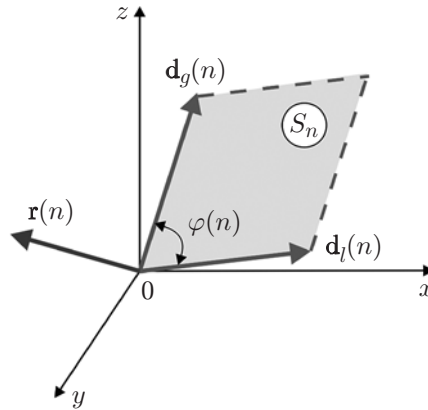


Рис. 3. Геометрическая интерпретация СП

задачи угловое согласование двух ГТО достигается в результате процедуры, уменьшающей до нуля угол φ между векторами их проволочных моделей. Подобной процедурой может быть поворот вектора \mathbf{D}_m на угол $(-\varphi)$ или вектора \mathbf{D}_g на угол φ . Для выполнения таких поворотов $3D$ -векторов необходимо задать ось вращения, информация о которой отсутствует в выражении (1) для скалярного произведения (СП) векторов, представленных в пространстве R . Она содержится лишь в выражении для СП векторов, являющихся элементами кватернионного пространства H [7]. На основании (6) запишем выражение для СП одной парциальной компоненты в пространстве H :

$$(\mathbf{d}_g(n), \mathbf{d}_l(n)) = e(n)(\cos \varphi(n) + \mathbf{r}(n) \sin \varphi(n)), \quad \|\mathbf{r}(n)\| = 1.$$

Компоненты $\mathbf{d}_g(n)$ и $\mathbf{d}_l(n)$ с весом $e(n)$ задают собственную плоскость Ω_n в виде параллелограмма площадью S_n с углом $\varphi(n)$ между векторами. Нормаль $\mathbf{r}(n)$ перпендикулярна плоскости Ω_n и определяет её положение в пространстве (рис. 3). Поэтому $\mathbf{r}(n)$ можно рассматривать в качестве оси вращения для совмещения векторов, лежащих в плоскости Ω_n . Требуемый поворот осуществляется вращающим кватернионом $b_m = \cos \varphi(n)/2 + \mathbf{r}(n) \sin \varphi(n)/2$, причём при совмещении достигается нулевое значение $\varphi(n)$.

Если же надо совместить s -мерные векторы ($s > 1$), задаваемые ГТО \mathbf{G} и \mathbf{W}_l , то процедура совмещения их проволочных моделей усложняется. Как видно из выражения (6), гиперкомплексная часть СП определяется не одной нормалью $\mathbf{r}(n)$ к собственной плоскости Ω_n , а взвешенной суммой s нормалей $\mathbf{r}(0), \mathbf{r}(1), \dots, \mathbf{r}(s-1)$ к собственным плоскостям $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_{s-1}$. В результате гиперкомплексная часть выражения (6) задаёт усреднённую нормаль \mathbf{r}_l к этим плоскостям (см. (7)). Поэтому поворот вектора \mathbf{D}_g проволочной модели ГТО \mathbf{G} на угол Φ_l вокруг оси с направляющим вектором \mathbf{r}_l не компенсирует полностью, а лишь уменьшает угол между векторами проволочных моделей \mathbf{D}_g и \mathbf{D}_l , т. е. $\cos \Phi_l^{(1)} > \cos \Phi_l$, где $\Phi_l^{(1)}$ — угол между повёрнутыми на угол Φ_l вокруг оси \mathbf{r}_l векторами \mathbf{D}_g и \mathbf{D}_l . Повёрнутый вектор \mathbf{D}_g обозначим как $\mathbf{D}_g^{(1)}$. Новое СП имеет вид

$$(\mathbf{D}_g^{(1)}, \mathbf{D}_l)^\circ = \cos \Phi_l^{(1)} + \mathbf{r}_l^{(1)} \sin \Phi_l^{(1)}.$$

Вращая вектор $\mathbf{D}_g^{(1)}$ вокруг оси с направляющим вектором $\mathbf{r}_l^{(1)}$, получим вектор $\mathbf{D}_g^{(2)}$, для которого $\cos \Phi_l^{(2)} \geq \cos \Phi_l^{(1)}$. Продолжая данную итерационную процедуру, в соответствии с соотношением (9) будем иметь

$$\cos \Phi_l^{(t)} \rightarrow 1 \quad \text{при } t \rightarrow \infty, \tag{10}$$

где

$$\cos \Phi_l^{(t)} = \text{Re}(\mathbf{D}_g^{(t)}, \mathbf{D}_l)^\circ; \quad \mathbf{D}_g^{(t)} = \text{rot}_{\Phi_l^{(t-1)}, \mathbf{r}_l^{(t-1)}} \mathbf{D}_g^{(t-1)}, \quad t = 0, 1, \dots \quad (11)$$

На основании последних выражений итерационный алгоритм корректного углового согласования ГТО \mathbf{G} с прототипом \mathbf{W}_l для каждой t -й итерации будет состоять из следующих шагов.

1. Вычисление скалярного произведения векторов $\mathbf{D}_g^{(t)}$ и \mathbf{D}_l :

$$(\mathbf{D}_g^{(t)}, \mathbf{D}_l) = \sum_{n=0}^{s-1} \left| |\mathbf{d}_g^{(t)}(n)| |\mathbf{d}_l(n)| \right| (\cos \varphi^{(t)}(n) - \mathbf{r}^{(t)}(n) \sin \varphi^{(t)}(n)). \quad (12)$$

2. Определение косинуса угла $\Phi_l^{(t)}$ и направляющего вектора $\mathbf{r}^{(t)}$:

$$\cos \Phi_l^{(t)} = \frac{1}{\|\mathbf{D}_g^{(t)}\| \|\mathbf{D}_l\|} \sum_{n=0}^{s-1} \left| |\mathbf{d}_g^{(t)}(n)| |\mathbf{d}_l(n)| \right| (\cos \varphi^{(t)}(n)),$$

$$\mathbf{r}^{(t)} = \left(\sum_{n=0}^{s-1} \mathbf{r}^{(t)} \|\mathbf{d}_g^{(t)}(n)\| |\mathbf{d}_l(n)| \sin \varphi^{(t)}(n) \right)^\circ.$$

3. Поворот вектора $\mathbf{D}_g^{(t)}$ на угол $\Phi_l^{(t)}$ вокруг оси с вектором $\mathbf{r}^{(t)}$:

$$\mathbf{D}_g^{(t+1)} = (\cos \Phi_l^{(t)}/2 + \mathbf{r}^{(t)} \sin \Phi_l^{(t)}/2) \mathbf{D}_g^{(t)} (\cos \Phi_l^{(t)}/2 - \mathbf{r}^{(t)} \sin \Phi_l^{(t)}/2).$$

4. Вычисление меры схожести $\varepsilon_{t+1} = \cos \Phi^{(t+1)}$ векторов $\mathbf{D}_g^{(t+1)}$ и \mathbf{D}_l .

Пример 1. Проиллюстрируем работу алгоритма на примере углового согласования вектора \mathbf{D}_l с векторами \mathbf{D}_{g1} , \mathbf{D}_{g2} и \mathbf{D}_{g3} , полученными поворотом \mathbf{D}_l вокруг оси с направляющим вектором $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ соответственно на углы $\psi_1 = 10^\circ$, $\psi_2 = 50^\circ$ и $\psi_3 = 90^\circ$. Векторы имеют следующий вид:

$$\mathbf{D}_l = \{\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}; -\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}; 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}\};$$

$$\mathbf{D}_{g1} = \{1,12\mathbf{i} + 1,8\mathbf{j} + 3,085\mathbf{k}; -1,19\mathbf{i} + 0,98\mathbf{j} - 0,79\mathbf{k}; 1,86\mathbf{i} - 0,59\mathbf{j} - 2,27\mathbf{k}\};$$

$$\mathbf{D}_{g2} = \{1,8\mathbf{i} + 1,15\mathbf{j} + 3,085\mathbf{k}; -1,65\mathbf{i} + 0,52\mathbf{j} + 0,12\mathbf{k}; 0,72\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2,73\mathbf{k}\};$$

$$\mathbf{D}_{g3} = \{2,58\mathbf{i} + 0,85\mathbf{j} + 2,58\mathbf{k}; -1,49\mathbf{i} - 0,33\mathbf{j} + 0,82\mathbf{k}; -0,91\mathbf{i} - 1,98\mathbf{j} - 2,06\mathbf{k}\}.$$

Величина угла $\Phi^{(t)}$ для векторов \mathbf{D}_{g1} , \mathbf{D}_{g2} и \mathbf{D}_{g3} с ростом шага итерации t монотонно снижается (рис. 4). Для иллюстрации результатов углового согласования вектора \mathbf{D}_g с каждым из векторов \mathbf{D}_{g1} , \mathbf{D}_{g2} и \mathbf{D}_{g3} приведём значения нормированного расстояния после десятого шага итерации:

$$R_{\mathbf{D}_{g1}; \mathbf{D}_l}^{(10)} = 0,000097; \quad R_{\mathbf{D}_{g2}; \mathbf{D}_l}^{(10)} = 0,000519; \quad R_{\mathbf{D}_{g3}; \mathbf{D}_l}^{(10)} = 0,001101.$$

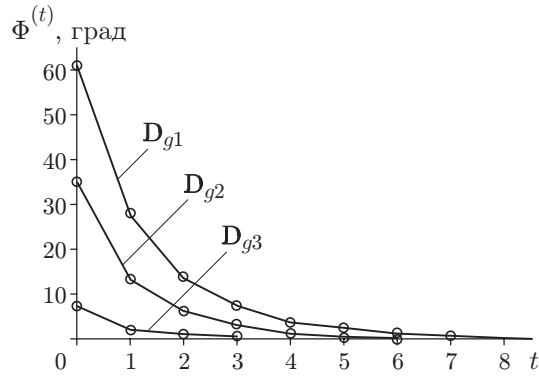


Рис. 4. Зависимость угла между вектором \mathbf{D}_l и векторами \mathbf{D}_{g1} , \mathbf{D}_{g2} и \mathbf{D}_{g3} от шага итерации

При этом начальными значениями нормированных расстояний были

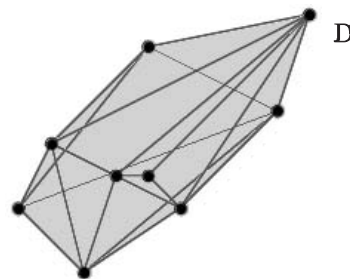
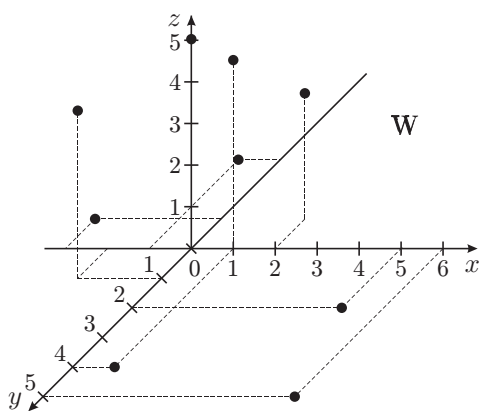
$$R_{\mathbf{D}_{g1}; \mathbf{D}_l}^{(0)} = 0,124; \quad R_{\mathbf{D}_{g2}; \mathbf{D}_l}^{(0)} = 0,6053; \quad R_{\mathbf{D}_{g3}; \mathbf{D}_l}^{(0)} = 1,013.$$

Исходные значения мер схожести вектора \mathbf{D}_l с векторами $\mathbf{D}_{g1}^{(t)}$, $\mathbf{D}_{g2}^{(t)}$, $\mathbf{D}_{g3}^{(t)}$ равны соответственно

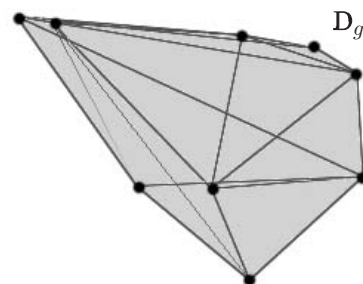
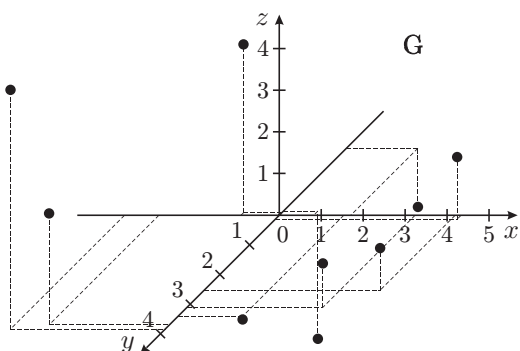
$$\varepsilon_1^{(10)} = 0,9999999957; \quad \varepsilon_2^{(10)} = 0,99999988; \quad \varepsilon_3^{(10)} = 0,99999942.$$

На рис. 5 проиллюстрирована динамика углового согласования более сложных ГТО, один из которых был сформирован в результате произвольного вращения другого ГТО в трёхмерном пространстве.

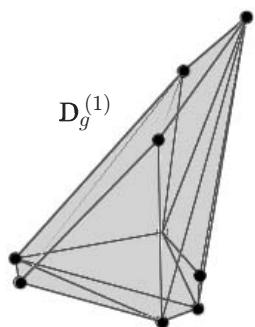
4. Угловое согласование ГТО (некорректная задача). Как отмечалось ранее, различаемый ГТО $\mathbf{G} = \text{rot}_{\psi, \rho} \mathbf{W}_l$ был получен поворотом эталонного ГТО класса A_l на угол ψ вокруг оси с направляющим вектором ρ . Поскольку номер класса A_l неизвестен, то для принятия решения необходимо формировать значения меры схожести ГТО \mathbf{W}_m , $m = 0, 1, \dots, M - 1$. Для этого следует формально выполнить процедуру углового согласования различаемого ГТО \mathbf{G} с каждым эталонным ГТО \mathbf{W}_m , т. е. представить нормированный вектор проволочной модели \mathbf{D}_g как результат поворота вектора проволочной модели \mathbf{D}_m вокруг некоторой оси с вектором ρ_m на неизвестный угол ψ_m . Операции связаны с решением достаточно сложной нелинейной системы уравнений вида $b_m \mathbf{D}_m^\circ b_m^{-1} = \mathbf{D}_g^\circ$, где $b_m = \cos \psi_m / 2 + (\rho_{m1} \mathbf{i} + \rho_{m2} \mathbf{j} + \rho_{m3} \mathbf{k}) \sin \psi_m / 2$ — вращающий кватернион, определением параметров вращения и выполнением компенсирующего поворота. Однако воспользоваться результатами подобного согласования \mathbf{D}_g с векторами \mathbf{D}_m , $m = 0, 1, \dots, M - 1$, для решения задачи различения ГТО \mathbf{G} невозможно, так как его мера схожести со всеми эталонами ГТО \mathbf{W}_m , $m = 0, 1, \dots, M - 1$, будет одной и той же и близкой к единице. Такой подход существенно отличается от рассмотренного в разд. 3 алгоритма, использующего свойство совпадения парциальных компонент двух векторов при уменьшении угла между ними до нуля только в том случае, если один из векторов получен вращением другого, т. е. при корректном характере задачи углового согласования. Если же задача некорректная, то уменьшение угла Φ между векторами не приведёт к совпадению их парциальных компонент. Поэтому высокое, близкое к единице, значение меры схожести будет достигнуто только для пары \mathbf{D}_g и \mathbf{D}_l . Для всех остальных пар \mathbf{D}_g и \mathbf{D}_m , $m = 0, 1, \dots, M - 1$, $m \neq l$, итерационный алгоритм приведёт сначала к некоторому росту меры схожести, а затем — к её стабилизации на уровне $\varepsilon < \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 < 1$. Это произойдёт по следующей причине. Представим угол между векторами \mathbf{D}_g и \mathbf{D}_m в виде суммы $\Phi_m = \Phi_f + \Phi_{\text{rot}}$, где



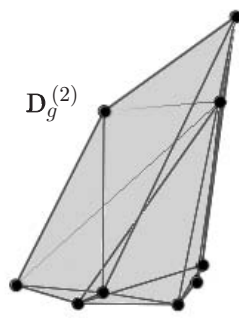
Эталонный ГТО и его проволочная модель D



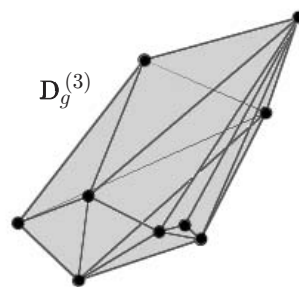
Различаемый ГТО G и его проволочная модель D_g



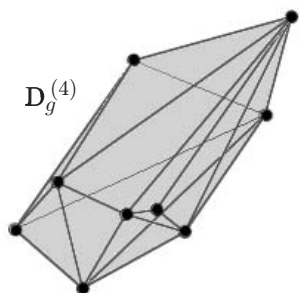
$$D_g^{(1)} = \text{rot}_{\Phi=83,7^\circ} D_g$$



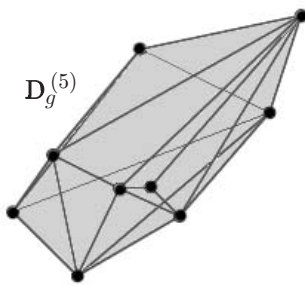
$$D_g^{(2)} = \text{rot}_{\Phi=54,4^\circ} D_g^{(1)}$$



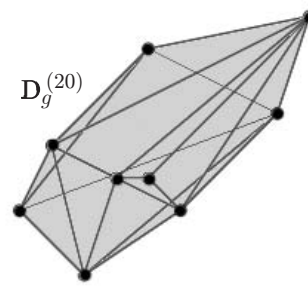
$$D_g^{(3)} = \text{rot}_{\Phi=30,2^\circ} D_g^{(2)}$$



$$D_g^{(4)} = \text{rot}_{\Phi=14,4^\circ} D_g^{(3)}$$



$$D_g^{(5)} = \text{rot}_{\Phi=6,62^\circ} D_g^{(4)}$$



$$D_g^{(20)} = \text{rot}_{\Phi=0,00007^\circ} D_g^{(19)}$$

Рис. 5. Процесс углового согласования ГТО со сложной структурой

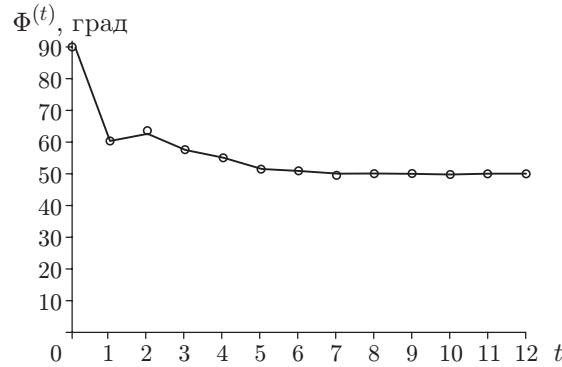


Рис. 6. Стабилизация угла между векторами при решении некорректной задачи углового согласования

Φ_f — угол между векторами, вызванный различием форм сигналов, которые они задают, а Φ_{rot} — угол неконтролируемого поворота вектора \mathbf{D}_g вокруг вектора \mathbf{D}_m с неизвестными угловыми параметрами. При решении корректной задачи формы сигналов одинаковые, поэтому $\Phi_f = 0$. Применение итерационного алгоритма приводит к обнулению значения Φ_{rot} , поэтому угол $\Phi_m = 0$. Решение некорректной задачи также обнуляет значение Φ_{rot} , но из-за различия форм сигналов угол между векторами остаётся на уровне $\Phi_m = \Phi_f > 0$, $m = 0, 1, \dots, M - 1$, $m = l$.

Пример 2. Заданы векторы

$$\mathbf{D}_l = \{\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}; -\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}; 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}\},$$

$$\mathbf{D}_g = \{-4\mathbf{i} + \mathbf{k}; \mathbf{i} - 4\mathbf{j}; 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}\}.$$

Итерационный процесс их углового согласования представлен на рис. 6.

5. Согласование векторных описаний ГТО. Угловое согласование различаемого ГТО \mathbf{G} с прототипом \mathbf{W}_l , рассмотренное в разд. 3, проводилось в отсутствие сдвига номеров парциальных компонент \mathbf{d}_g и \mathbf{d}_l векторов проволочных моделей \mathbf{D}_g и \mathbf{D}_l . Поскольку различаемый ГТО $\mathbf{G}^{(v)}$ был получен поворотом прототипа \mathbf{W}_l , то закон следования парциальных компонент векторов \mathbf{D}_g и \mathbf{D}_l при этом не нарушился, но начало отсчёта компонент \mathbf{D}_g в соответствии с моделью (3) сдвигается на неконтролируемую величину v , $v = 0, 1, \dots, s - 1$. При ненулевом значении v задача углового согласования моделей ГТО \mathbf{G} и \mathbf{W} становится некорректной. Поэтому угловое согласование различаемого ГТО $\mathbf{G}^{(v)}$ с прототипом \mathbf{W}_l должно выполняться методом перебора всех значений v для всех M классов алфавита. Для каждого класса отбирается результат с максимальным значением $\varepsilon_{m\max} = \cos \Phi_m^{(t_0), (v)}$ и определяется величина сдвига v , при котором оно было достигнуто. Через t_0 обозначен номер шага, после которого величина угла Φ_m практически не меняется; t_0 имеет порядок нескольких десятков шагов. Один из вариантов этой процедуры представлен на рис. 7. Совместное согласование векторных описаний и угловых параметров различаемого ГТО \mathbf{G} с эталонным ГТО \mathbf{W}_m класса A_m выполняется итерационным способом.

На каждом t -м шаге вычисляется НСП

$$\cos \Phi_m^{(t), (v)} = \text{Re}(\mathbf{D}_g^{(t), (v)}, \mathbf{D}_m)^\circ, \quad (13)$$

$$t = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, \dots, M - 1, \quad v = 0, 1, \dots, s - 1,$$

где

$$\mathbf{D}_g^{(t), (v)} = \text{rot}_{\Phi_m^{(t-1), (v)}, \mathbf{r}_m^{(t-1), (v)}} \mathbf{D}^{(t-1), (v)} \quad (14)$$

— повёрнутая на угол $\Phi_m^{(t-1), (v)}$ вокруг оси с вектором $\mathbf{r}_m^{(t-1), (v)}$ векторная модель различаемого ГТО на $(t-1)$ -м шаге итерации. При этом все компоненты выражения (14) получены при сдвиге на величину v , $m = 0, 1, \dots, M-1$, начал векторных описаний. Модель \mathbf{D}_g различаемого ГТО \mathbf{G} считается согласованной по угловым параметрам и векторному описанию (корректно или некорректно) с векторной моделью эталонного ГТО \mathbf{W}_m при выполнении условия

$$\cos \Phi_m^{(t_0), (v)} \xrightarrow{v} \max, \quad m = 0, 1, \dots, M-1, \quad v = 0, 1, \dots, s-1. \quad (15)$$

Пример 3. Выполним совместное согласование модели различаемого ГТО

$$\mathbf{D}_g = \{4,67\mathbf{i} + 7,264\mathbf{j} + 3,071\mathbf{k}; -7,6811\mathbf{i} + 4,55\mathbf{j} - 1,145\mathbf{k}; \\ -3,069\mathbf{i} + 5,484\mathbf{j} + 2,55\mathbf{k}; 5,537\mathbf{i} + 7,19\mathbf{j} + 2,578\mathbf{k}\}$$

по угловым параметрам и векторным описаниям с эталонными ГТО \mathbf{W}_0 , \mathbf{W}_1 и \mathbf{W}_2 , имеющими следующие проволоочные модели:

$$\mathbf{D}_0 = \{\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}; -\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}; 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}; -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}\};$$

$$\mathbf{D}_1 = \{3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - \mathbf{k}; 4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 3\mathbf{k}; 4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 2\mathbf{k}; 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 7\mathbf{k}\};$$

$$\mathbf{D}_2 = \{-2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}; -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}; 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}; \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}\}.$$

Как видно из рис. 8, наибольшее значение меры схожести между векторами \mathbf{D}_g и \mathbf{D}_0 достигается при $v = 2$ и составляет $\varepsilon_0 = \cos 25^\circ = 0,906$.

На рис. 9 приведены аналогичные зависимости для моделей \mathbf{D}_g , \mathbf{D}_1 и \mathbf{D}_g , \mathbf{D}_2 . Как следует из рис. 9, *a*, при сдвиге $v = 2$ векторных описаний \mathbf{D}_g и \mathbf{D}_1 достигается полное угловое согласование, т. е. $\varepsilon_1 = \cos 0^\circ = 1$. Графики на рис. 9, *b* показывают, что наилучшее

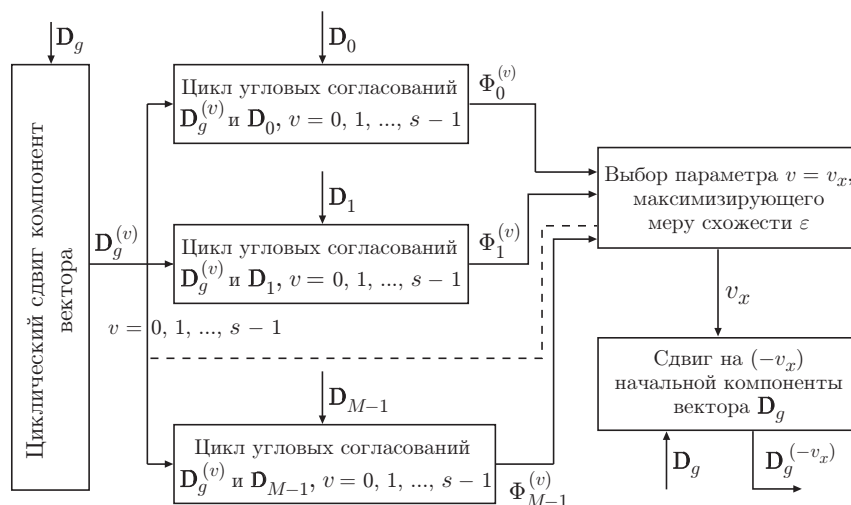


Рис. 7. Структура устройства согласования векторных описаний различаемого и эталонного ГТО

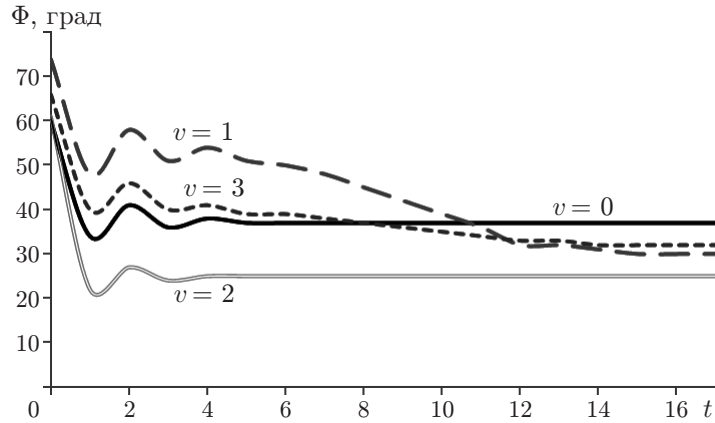


Рис. 8. Согласование векторных моделей \mathbf{D}_g и \mathbf{D}_0

угловое согласование достигается при сдвиге $v = 1$, что даёт значение меры схожести $\varepsilon_2 = \cos 42^\circ = 0,743$.

Из приведённых результатов можно сделать вывод, что для обеспечения максимальной меры схожести с эталонным ГТО начало векторного описания \mathbf{D}_g различаемого ГТО \mathbf{G} должно быть сдвинуто на $v = 2$, т. е. иметь вид

$$\mathbf{D}_g^{(v=2)} = \{-3,069\mathbf{i} + 5,484\mathbf{j} + 2,55\mathbf{k}; -5,5371\mathbf{i} + 7,19\mathbf{j} + 2,0785\mathbf{k}; \\ -4,67\mathbf{i} + 7,264\mathbf{j} + 3,071\mathbf{k}; 7,81\mathbf{i} + 4,55\mathbf{j} - 1,145\mathbf{k}\}.$$

Рис. 10 иллюстрирует совместное согласование различаемого ГТО \mathbf{G} с эталонными ГТО \mathbf{W}_0 , \mathbf{W}_1 и \mathbf{W}_2 . При этом были достигнуты следующие значения мер схожести:

$$\varepsilon_0 = \cos 25^\circ = 0,906; \quad \varepsilon_1 = \cos 0^\circ = 1; \quad \varepsilon_2 = \cos 42^\circ = 0,743.$$

6. Структура системы различения ГТО в условиях действия шумов и априорной неопределённости угловых параметров и сдвига векторного сигнала. На рис. 11 представлен вариант структуры системы, выполняющей в соответствии с полученными в разд. 3–5 выражениями обработку векторной модели \mathbf{D}_g зашумлённого про-

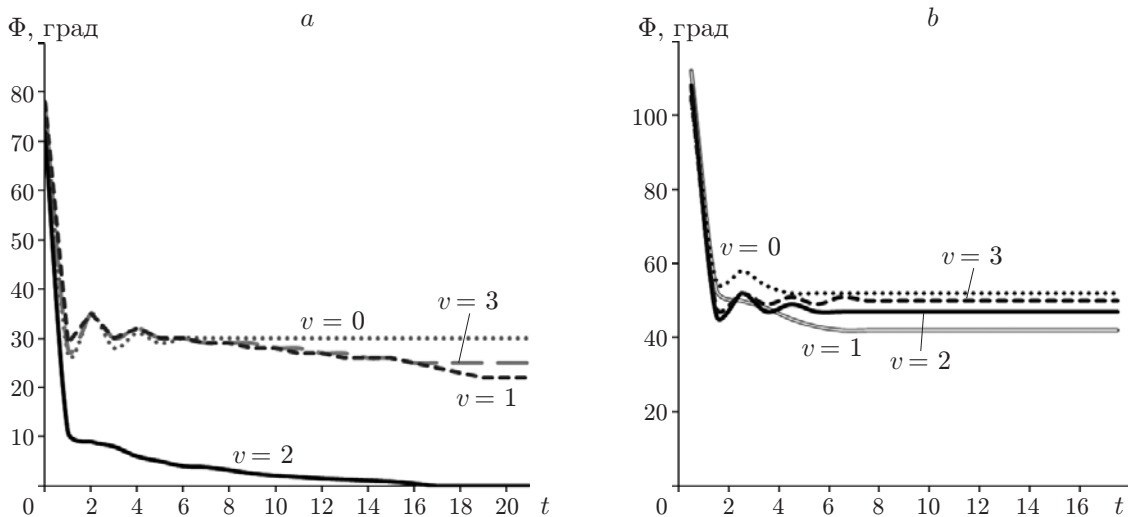


Рис. 9. Согласование векторных моделей: а — \mathbf{D}_g и \mathbf{D}_1 ; б — \mathbf{D}_g и \mathbf{D}_2

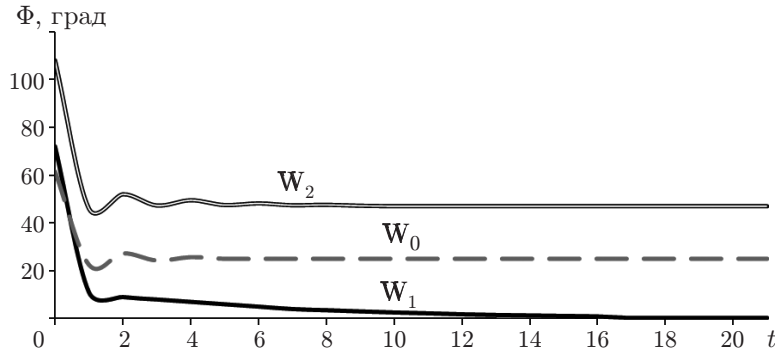


Рис. 10. Процесс совместного согласования различаемого ГТО \mathbf{G} с эталонными ГТО \mathbf{W}_0 , \mathbf{W}_1 и \mathbf{W}_2 по угловым параметрам и векторным описаниям

странственного ГТО \mathbf{G} с априорно неизвестными угловыми параметрами и сдвигом векторного описания относительно векторных описаний векторов \mathbf{D}_m эталонных ГТО \mathbf{W}_m , $m = 0, 1, \dots, M - 1$. Система состоит из четырёх звеньев: I — согласование векторных описаний различаемого ГТО с векторными описаниями \mathbf{W}_m , $m = 0, 1, \dots, M - 1$, эталонных ГТО; II — согласование угловых параметров; III — вычисление мер схожести различаемого ГТО с эталонными ГТО; IV — решающее устройство. Модель \mathbf{D}_g зашумлённого различаемого ГТО задана выражением (3) и определяет его как результат случайного поворота в трёхмерном пространстве одного из эталонных ГТО со смещённой на величину v начальной компонентой.

При работе первого и второго звеньев вектор \mathbf{D}_g различаемого ГТО получил согласование по векторным описаниям и угловым параметрам с векторами $\mathbf{D}_0, \mathbf{D}_1, \dots, \mathbf{D}_{M-1}$ эталонных ГТО, при этом вектор \mathbf{D}_g ГТО \mathbf{G} был согласован по номеру своей первой компоненты и угловым параметрам с векторами \mathbf{D}_m , $m = 0, 1, \dots, M - 1$, эталонных ГТО. В результате мера схожести различаемого и эталонных ГТО перестала зависеть от таких

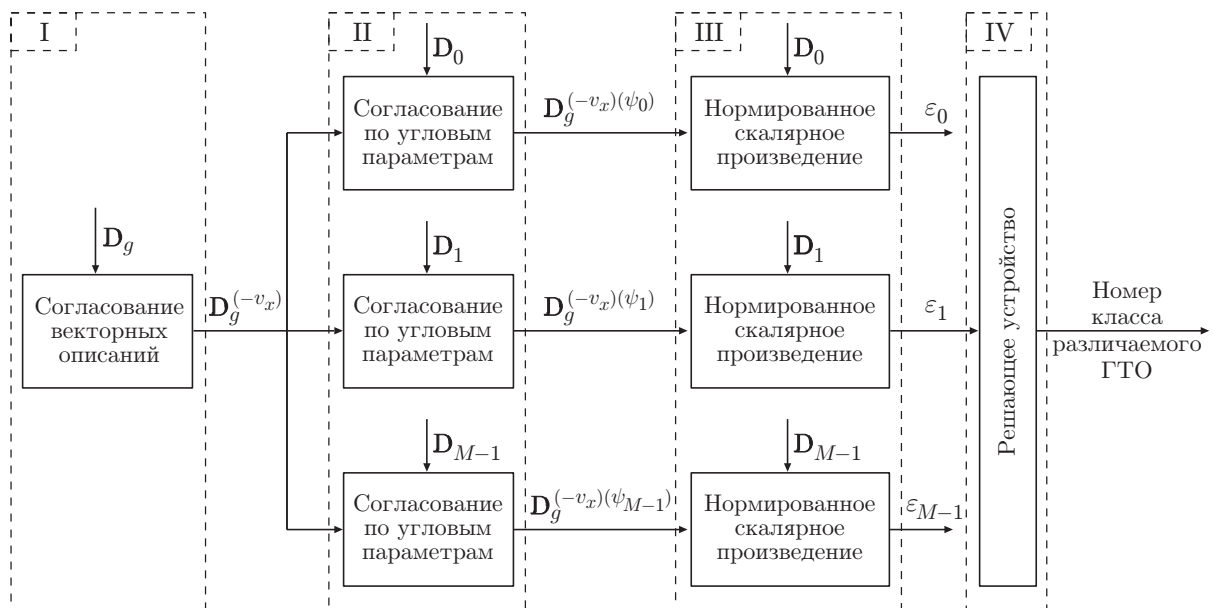


Рис. 11. Структура системы различения зашумлённого ГТО в условиях априорной неопределённости параметров

неинформативных параметров, как угол его поворота и сдвиг номера первой компоненты проволочной модели, и определяется лишь различием его формы (структуры) и форм эталонных ГТО.

Количественные значения мер схожести $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{M-1}$ образует третье звено системы, состоящее из $M - 1$ формирователей скалярного произведения (1):

$$\varepsilon_m = (\mathbf{D}_g, \mathbf{D}_m), \quad m = 0, 1, \dots, s - 1. \quad (16)$$

Рассмотрим помехоустойчивость данной процедуры. Как известно, среди линейных устройств при воздействии на сигнал белого шума максимальное выходное отношение сигнал/шум обеспечивает согласованный фильтр [3]. Импульсная характеристика фильтра повторяет с задержкой во времени зеркальное изображение согласованного сигнала. В нашем случае такой сигнал задаётся проволочной моделью \mathbf{D}_m эталонного ГТО класса A_m , $m = 0, 1, \dots, M - 1$. Дискретный согласованный фильтр вырабатывает s отсчётов. Текущий r -й отсчёт равен СП векторов \mathbf{D}_g и $\mathbf{D}_m^{(s-r-1)}$, где $(s - r - 1)$ — величина сдвига номера начальной компоненты вектора \mathbf{D}_m . Полученный $(s - 1)$ -й отсчёт фильтра равен СП $(\mathbf{D}_g, \mathbf{D}_m)^\circ = \cos \Phi_m$ и в соответствии с (16) мере схожести этих векторов. Если решена корректная задача углового согласования ГТО \mathbf{G} и \mathbf{W}_l , то $\mathbf{D}_g = \mathbf{D}_l$, $\varepsilon = 1$ и

$$\cos(\mathbf{D}_g, \mathbf{D}_l)^\circ = (\|\mathbf{D}_l\|^\circ) = 1. \quad (17)$$

Отсчёт $(s - 1)$ согласованного фильтра носит чисто вещественный характер и имеет максимально возможную величину, равную энергии сигнала. Такой отсчёт называют пиковым. В случае, когда номер начальной компоненты фильтруемого сигнала смещён на величину v , аналогичному смещению подвергается и пиковый отсчёт. Поэтому согласованный фильтр позволяет не только получить меру схожести фильтруемого и эталонного сигналов, но и по номеру пикового отсчёта оценить величину смещения их начальных компонент. Проиллюстрируем механизм согласованной фильтрации плоского изображения в виде контура треугольника Γ :

$$\Gamma = \{\gamma(n)\}_0^2 = \{4; 3i; -4 - 3i\} = \{4 \exp\{i0^\circ\}; 3 \exp\{i\}; -5 \exp\{i38,87^\circ\}\}.$$

Векторные диаграммы на рис. 12, *a* соответствуют последнему шагу фильтрации. Каждый вектор $\gamma(n) = |\gamma(n)| \exp\{i\varphi(n)\}$ поворачивается на угол $(-\varphi(n))$, $n = 0, 1, 2$, и

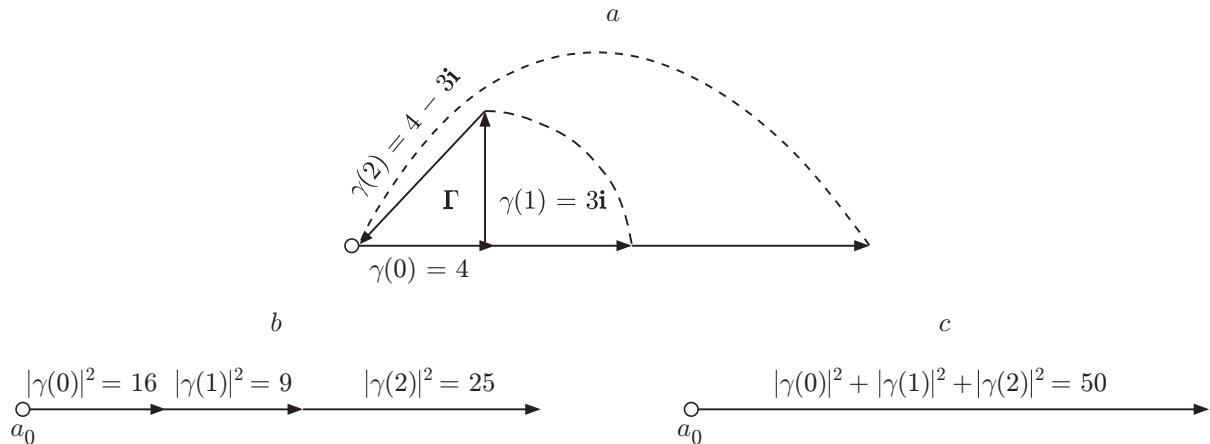


Рис. 12. Механизм работы согласованного фильтра: *a* — повороты векторов контура при обнулении их аргументов; *b* — квадрированные по длине и повёрнутые векторы контура; *c* — образование выходного сигнала фильтра

квадрируется по длине (рис. 12, *b*). Выходной отсчёт фильтра образуется суммированием квадрированных отсчётов (рис. 12, *c*). Из этой векторной диаграммы становится понятным свойство высокой помехоустойчивости фильтра, достигаемое при образовании пикового отсчёта: векторные компоненты полезного сигнала складываются арифметически, а поступающие на выход компоненты шума — геометрически с учётом случайных значений своих аргументов. В результате энергия полезного сигнала с увеличением размерности сигнала s растёт быстрее энергии шума.

Серьёзным препятствием для применения согласованных фильтров при различении ГТО является их неинвариантность к вращению фильтруемых сигналов. Но если на этапе предварительной обработки различаемого ГТО эти требования были выполнены, то для получения максимально помехоустойчивого значения меры схожести достаточно найти лишь НСП $(\mathbf{D}_g^{(v)}, \mathbf{D}_m)^\circ$, $m = 0, 1, \dots, M - 1$. Вычисление такого НСП является операцией, осуществляемой фильтром при получении пикового отсчёта.

Оценим эффективность подавления аддитивного белого шума при нахождении НСП вектора \mathbf{D}_g различаемого ГТО \mathbf{G} и вектора \mathbf{D}_l эталонного ГТО \mathbf{W}_l . Заметим, что различаемый ГТО \mathbf{G} был получен на базе эталонного ГТО \mathbf{W}_l , а затем согласован по угловым параметрам и векторному описанию с прототипом \mathbf{W}_l (см. разд. 5). Кроме того, учтём с помощью вектора $\mathbf{Z} = \{z(n)\}_0^{s-1}$ действие координатного шума, где $z(n)$ — ошибка измерения координаты n -й точки ГТО \mathbf{G} ($z_1(n)i + z_2(n)j + z_3(n)k$). Ошибки измерений предполагаются независимыми центрированными нормально распределёнными случайными величинами с дисперсией по каждой координате, равной σ^2 . В условиях аддитивного зашумления вектор различаемого ГТО равен $\mathbf{D}_g + \mathbf{Z}$. Отношение сигнал/шум для этого сигнала вычисляется как $q_{\text{вх}} = \|\mathbf{D}_g\|^2 / 3\sigma^2 s$, а для НСП имеет вид $q_{\text{вых}} = \|\mathbf{D}_g\|^4 / 3\|\mathbf{D}_g\|^2 \sigma^2$. Таким образом, при оговорённых выше условиях операция НСП улучшает отношение сигнал/шум в $k_{\text{ш}} = q_{\text{вых}} / q_{\text{вх}} = s$ раз.

Заключение. В представленной работе рассмотрен пошаговый подход к снижению углового рассогласования двух пространственных ГТО одинаковой размерности s . Он применим в следующих случаях: либо когда один ГТО получен вращением другого с неизвестными параметрами поворота ρ, ψ (корректная задача углового согласования), либо когда оба ГТО являются разными объектами (некорректная задача углового согласования объектов). В первом случае существует возможность полного устранения углового рассогласования между объектами, т. е. их совмещение. Во втором случае угловое рассогласование между ГТО устанавливается на некотором уровне, зависящем от степени различия их форм и внутренней структуры. Пошаговый (итерационный) процесс углового согласования ГТО базируется на свойствах СП дискретных кватернионных сигналов, задающих данные объекты. Основной операцией процесса углового согласования является поворот трёхмерной векторной модели одного из ГТО на некоторый угол $\Phi^{(t)}$, где t — номер шага итерации относительно другого ГТО. Величина угла $\Phi^{(t)}$ может быть найдена по величине СП векторов, представляющих эти ГТО, но для конечного вращения векторов в трёхмерном пространстве кроме значения $\Phi^{(t)}$ необходимо задать ещё и плоскость, в которой расположены векторы, или же нормаль к ней. Если операция СП выполняется для векторов, являющихся элементами линейного действительного пространства R , то информация о такой нормали отсутствует. Более информативно скалярное произведение $3D$ -векторов, составленное из элементов кватернионного пространства. Соотношение между гиперкомплексной и вещественной частями такого СП позволяет получить однозначное значение угла $\Phi^{(t)}$ между векторами, а представленная в нормированном виде гиперкомплексная часть содержит информацию об искомой оси вращения. В качестве практически полезного приложения полученного способа углового согласования в данной работе рас-

смотрено решение задачи различения ГТО при его произвольном вращении с последующим зашумлением одного из ГТО, входящих в состав алфавита из M классов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Анисимов Б. В., Курганов В. Ф., Злобин В. К.** Распознавание и цифровая обработка изображений. М.: Высш. шк., 1983. 296 с.
2. **Информационные** технологии в радиотехнических системах /Под ред. И. Б. Федорова. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. 764 с.
3. **Withman R. L., O'Rear R. L.** Automatic clustering of synthetic aperture radar (SAR) targets // Proc. of the IEEE NAESCON. May, 1980. Dayton, USA. Vol. 1. P. 717–724.
4. **Введение** в контурный анализ и его приложения к обработке изображений и сигналов /Под ред. Я. А. Фурмана. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 592 с.
5. **Фурман Я. А., Рябинин К. Б., Красильников М. И.** Проволочная модель пространственного группового точечного объекта // Автометрия. 2008. **44**, № 3. С. 3–16.
6. **Комплекснозначные** и гиперкомплексные системы в задачах обработки многомерных сигналов /Под ред. Я. А. Фурмана. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 456 с.
7. **Методы** компьютерной обработки изображений /Под ред. В. А. Сойфера. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 784 с.
8. **Фурман Я. А., Егошина И. Л.** Обратная задача вращения трехмерных векторных сигналов // Автометрия. 2010. **46**, № 1. С. 46–56.
9. **Арнольд В. И.** Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов. М.: МЦНМО, 2002. 40 с.
10. **Фу К., Гонсалес Р., Ли К.** Робототехника: Пер. с англ. М.: Мир, 1989. 624 с.
11. **Кантор И. Л., Солодовников А. С.** Гиперкомплексные числа. М.: Наука, 1973. 144 с.

Поступила в редакцию 24 апреля 2012 г.
