

случае чисто упругой задачи, когда пластическая зона у вершины трещины отсутствует [16]. Из представленных на рис. 6 результатов видно, что зависимости (9) и (19) согласуются между собой лишь при $x > \Delta$, где $\Delta \sim R_0$. Однако так как $R_0 \sim T^2$ при $T \ll 1$, то в случае малой нагрузки решение упругой задачи с хорошей точностью аппроксимирует решение упругопластической задачи практически во всей полосе $|y| \leq d$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Макклиток Ф. Пластические аспекты разрушения // Разрушение.— М.: Мир, 1976.— Т. 3.
2. Кудрявцев Б. А., Партон В. З. и др. О локальной пластической зоне вблизи конца щели // Изв. АН СССР. МТТ.— 1970.— № 1.
3. Кудрявцев Б. А., Партон В. З. и др. О локальной пластической зоне вблизи конца щели (плоская деформация) // Изв. АН СССР. МТТ.— 1970.— № 5.
4. Партон В. З., Морозов Е. М. Механика упругопластического разрушения.— М.: Наука, 1974.
5. Слепян Л. И. Механика трещин.— Л.: Судостроение, 1981.
6. Греков М. А. О пластических зонах у вершины трещины при плоской деформации // ФХММ.— 1978.— № 5.
7. Hilton P. D., Hutchinson J. W. Plastic intensity factors for cracked plates // Engng Fract. Mech.— 1971.— V. 3, N 4.
8. Levy N., Marcal P. V. et al. Small scale yielding near a crack in plane strain: a finite element analysis // Intern. J. Fracture Mech.— 1971.— V. 7, N 2.
9. Hult J. A., H. McClintock F. A. Elastic-plastic stress and strain distribution around sharp notches under repeated shear // 9th Intern. Congr. Appl. Mech. Brussels, 1956; Actes.— Bruxeless, 1957.— V. 8.
10. Rice J. R. Contained plastic deformation near cracks and notches under longitudinal shear // Intern. J. Fracture Mech.— 1966.— V. 2, N 2.
11. Edmunds T. M., Willis J. R. Analysis of a crack sited at a notch in an elastic-perfectly plastic strip subjected to longitudinal shear // Intern. J. Fracture.— 1976.— V. 12, N 3.
12. Черепанов Г. П. Упругопластическая задача в условиях антиплоской деформации // ПММ.— 1962.— Т. 26, вып. 4.
13. Сегалов А. Е. О форме пластических зон, возникающих при антиплоской деформации полупространства, ослабленного вырезом конечной ширины // Изв. АН СССР. МТТ.— 1970.— № 5.
14. Артур П., Блэкбери У. Влияние формы пластической зоны на ее протяженность и раскрытие трещин // Новые методы оценки сопротивления металлов хрупкому разрушению.— М.: Мир, 1972.
15. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами.— Киев: Наук. думка, 1981.
16. Новиков В. Г., Тулин Б. М. Стационарное движение системы параллельных трещин продольного сдвига // ПМТФ.— 1984.— № 2.

Поступила 30/1 1986 г.

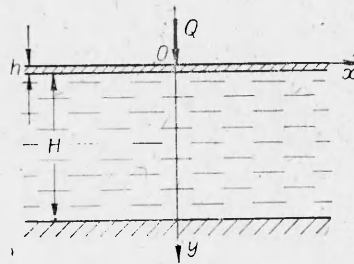
УДК 624.131 + 539.215

ПОЛЗУЧЕСТЬ ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА, ЛЕЖАЩЕГО НА ГИДРАВЛИЧЕСКОМ ОСНОВАНИИ, ПРИ СОСРЕДОТОЧЕННОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

В. М. Александров, Л. М. Моносов, А. М. Цыбин,
А. А. Шматкова
(Москва, Ленинград)

Рассмотрена бесконечная тонкая пластинка, находящаяся в условиях цилиндрического квазистатического изгиба, на гидравлическом основании — слое вязкой жидкости конечной глубины. Материал пластинки несжимаем и таков, что интенсивности девиатора скоростей деформаций и девиатора напряжений связаны степенной зависимостью. Такие соотношения часто принимают для описания напряженно-деформированного состояния конструкций из льда, находящихся в условиях развитой установившейся ползучести. В случае изгиба пластинки сосредоточенной силой получены асимптотические разложения для прогиба при большом и малом времени. Построенные решения дали возможность найти зависимость прогибов ледяного покрова от времени, аналогичную той, которая имеется при выполнении натуральных исследований.

1. Постановка задачи. Рассмотрим случай цилиндрического изгиба пластинки толщины h , лежащей на слое несжимаемой вязкой жидкости конечной глубины H (рис. 1). Изгиб осуществляется сосредоточенной силой Q . При проведении экспериментов на ледяной покров в створе водопропускного сооружения устанавливалось специальное ледорезное устройство весом 2,5 т, длиной около 7 м, площадью опирания 0,13 м², снабженное дополнительными грузами от 2 до 30 т. Толщина ледовой пластинки $h = 0,25 - 0,35$ м, глубина слоя жидкости $H = 10 - 16$ м.



Р и с. 1

Считаем, что для описания материала пластинки может быть использован закон Глена, постулирующий степенную связь между интенсивностями касательных напряжений и скоростей деформаций [1], $\dot{\epsilon} = B\sigma^b$, где B и b — коэффициент и показатель ползучести (больше единицы). При решении задачи используем для пластинки уравнение установившейся ползучести, т. е. ее прогиб должен возрастать линейно по времени. На самом же деле, вследствие взаимодействия пластинки с основанием, прогиб ее оказывается зависящим от времени t нелинейным образом, но линейный член главный как при малом, так и при большом относительном времени.

Прогиб пластинки всегда можно представить в виде $y = y_e + y_p$, где слагаемое y_e учитывает упругую и пластическую деформации, которые развиваются практически мгновенно после приложения нагрузки, а y_p — деформацию, которая возникает в результате ползучести материала. Учет первого слагаемого y_e по сравнению с развитой деформацией ползучести y_p представляется излишним, это опять-таки только усложнит задачу, не повлияв на результаты. Пренебрежение упругой и пластической частью деформации при развитой ползучести общепринято.

Будем моделировать гидравлическое основание вязкоупругим винклеровским основанием. Тогда реактивное давление, действующее на пластинку со стороны жидкости, описывается уравнением [2]

$$(1.1) \quad P = ly + my.$$

Задача об изгибе пластинки при степенном упрочнении приводится к дифференциальному уравнению четвертого порядка [3]

$$(1.2) \quad P = K[(v'')^\mu]'', \quad v = y.$$

Сопоставляя (1.1) и (1.2), получаем, что для участков пластинки вне приложенной силы должно быть найдено решение дифференциального уравнения

$$(1.3) \quad K[(y'')^\mu]'' + my + ly = 0$$

при нулевом начальном условии $y|_{t=0} = 0$ и при условиях затухания на бесконечности прогиба и его первой производной

$$(1.4) \quad y(\pm\infty) = 0;$$

$$(1.5) \quad y'(\pm\infty) = 0.$$

В уравнении (1.3) коэффициенты K и μ характеризуют реологические свойства материала пластинки и связаны с реологическими постоянными в законе Глена: $\mu = 1/b$, $K = gD_\mu$, причем $D_\mu = B^{-\mu}h^{\mu+2}/2^\mu(2 + \mu)$ соответствует жесткости пластинки на изгиб в условиях установившейся ползучести [1].

Коэффициент m характеризует сопротивление перетеканию жидкости под пластинкой вследствие нарастания во времени прогиба последней, т. е. характеризует вязкостные свойства основания Винклера. Несмотря

ча медленный рост деформации ползучести пластинки, учет вязкости основания представляется нам существенным, так как дает возможность удовлетворить условиям на бесконечности (1.4) и (1.5). Принимается, что при относительно малой глубине H (поскольку эксперименты проводились на мелководе) коэффициент m обратно пропорционален величине H и прямо пропорционален плотности жидкости ρ и ее вязкости ν . Итак, $m = \nu\rho/H$. При больших глубинах m вообще перестает зависеть от H ; какая-либо другая зависимость m от H не изменит существа работы, а лишь повлияет на числовые результаты. Наконец, l в (1.3) — коэффициент постели основания Винклера $l = \rho g$, где g — ускорение силы тяжести.

В начале координат должны выполняться условия сопряжения решений уравнения (1.3) для положительных и отрицательных значений x , которые заключаются в отсутствии скачка для изгибающего момента и равенстве скачка перерезывающей силы заданной силе Q . Таким образом,

$$(1.6) \quad (\dot{y}'')^\mu|_{+0} - (\dot{y}'')^\mu|_{-0} = 0;$$

$$(1.7) \quad K\{[(\dot{y}'')^\mu]'|_{+0} + [(\dot{y}'')^\mu]'|_{-0}\} = Q.$$

Заметим, что условие $y'|_{x=0} = 0$ в линейном случае ($\mu = 1$) выполняется автоматически, в нелинейном ($\mu \neq 1$) — его выполнение оказывается несовместимым с выполнением более важного условия (1.6).

Решение поставленной задачи (1.3)—(1.7) построим при относительно малом времени t в форме асимптотического разложения по степеням t ; при относительно большом времени решение для y состоит из линейного агрегата по времени и асимптотического ряда по степеням некоторой затухающей при $t \rightarrow \infty$ экспоненты. Оба решения применимы для среднего диапазона изменения времени и, таким образом, вместе полностью перекрывают весь диапазон изменения $t \in (0, \infty)$.

2. Исследование в случае малого времени. Будем искать решение уравнения (1.3) в виде ряда

$$(2.1) \quad y = \sum_{k=1}^{\infty} y_k t^k.$$

Ограничимся сначала двумя членами разложения. Подставляя (2.1) в (1.3), приходим к системе двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно y_1 и y_2 :

$$(2.2) \quad \mu y_1^{\text{IV}} (y_1'')^{\mu-1} + \mu(\mu-1)(y_1''')^2 (y_1'')^{\mu-2} + m y_1 / K = 0;$$

$$(2.3) \quad 2\mu [(\mu-1)y_1^{\text{IV}} (y_1'')^{\mu-2} y_2'' + (\mu-1)(\mu-2)(y_1''')^2 (y_1'')^{\mu-3} y_2'' + 2(\mu-1)y_1''' (y_1'')^{\mu-2} y_2''' + (y_1'')^{\mu-1} y_2^{\text{IV}}] + 2m y_2 / K + l y_1 / K = 0.$$

Одно из решений уравнения (2.2), справедливое всюду, за исключением точки $x = 0$, есть

$$(2.4) \quad y_1 = A(|x| + C)^{-\alpha},$$

где

$$(2.5) \quad \alpha = 2(1 + \mu)/(1 - \mu), \quad \alpha > 0;$$

$$(2.6) \quad A = \left\{ \frac{m(1-\mu)^2}{4K\mu(1+3\mu)} \left[\frac{2(1+\mu)(3+\mu)}{(1-\mu)^2} \right]^{-\mu} \right\}^{1/(\mu-1)}.$$

Подставляя (2.4) в (2.3), найдем уравнение для определения y_2^2

$$(2.7) \quad x_1^4 y_2^{\text{IV}} + 8x_1^3 y_2''' + 12x_1^2 y_2'' + A_1 y_2 = A_2 x_1^{-\alpha},$$

$$A_1 = -8(1 + \mu)(3 + \mu)(1 + 3\mu)/(1 - \mu)^4, \quad A_1 < 0, \quad x_1 = x + C, \quad A_2 = -l A A_1 / 2m.$$

В дальнейшем индекс y опускается. Однородным для (2.7) является уравнение Эйлера [4]

$$(2.8) \quad y_2^0 = x^{-1/2} \sum_{i=1}^4 C_i^1 x^{a_i}, \quad a_i = 5/4 \pm (1 - A_1)^{1/2}.$$

Частное решение уравнения (2.7) имеет вид

$$(2.9) \quad y_2^* = -LAx^{-\alpha}/2m(1 - \mu).$$

Нетрудно заметить закономерность при составлении уравнений типа (2.3) с увеличением числа членов разложения ряда (2.1). Так, для k -го члена разложения ряда (2.1)

$$(2.10) \quad (ay_k'' + a'y_k'')' + my_k/K = -ly_{k-1}/kK + \\ + F_k(y_1'', \dots, y_{k-1}'', y_1'', \dots, y_{k-1}'', y_1^{IV}, \dots, y_{k-1}^{IV});$$

$$(2.11) \quad a = \mu (y_1'')^{\mu-1}.$$

Например, если $k = 3$, то

$$F_3 = (-2/3)(\mu - 2) \{ [a'(y_1'')^{-1}]' (y_2'')^2 + 2 [a'(y_1'')^{-1}] [(y_2'')^2]' \} + \\ + 2(\mu - 1) [a(y_1'')^{-1}] [(y_2'')^2 + y_2'' y_2^{IV}].$$

Однородные для соотношений типа (2.10) уравнения Эйлера, решения их — (2.8). Зная для каждого приближения вид правой части, можно выписать частное решение и затем общее.

Обратимся теперь к определению постоянных, входящих в общее решение задачи для случая малого времени. Ограничимся пока двумя членами разложения (2.1). Тогда решение представляется формулами (2.4), (2.8) и (2.9). Выпишем значения для a_i ($i = 1, \dots, 4$), входящих в соотношение (2.8):

$$a_1 = (\alpha + 1/2) > 0, \quad a_2 = -(\alpha + 1/2), \quad a_3 = iB_1, \\ a_4 = -iB_1, \quad B_1 = (\alpha^2 + \alpha - 9/4)^{1/2} > 0.$$

Рассматривая лишь действительную часть, получим

$$y_2^0 = C_1^1 x^\alpha + C_2^1 x^{-(1+\alpha)} + C_3^1 x^{-1/2} \cos(B_1 \ln x).$$

Условие на бесконечности позволяет сделать заключение, что $C_1^1 = 0$. Общее решение задачи для рассматриваемого приближения следующее:

$$y = Ax^{-\alpha} t + [C_2^1 x^{-(1+\alpha)} + C_3^1 x^{-1/2} \cos(B_1 \ln x) - LAx^{-\alpha}/2m(1 - \mu)] t^2, \\ x = |x| + C.$$

Здесь постоянные C , C_2^1 и C_3^1 определяются из граничных условий

$$C = [2mA/Q(\alpha - 1)]^{1/(\alpha-1)},$$

$$C_2^1 = (LA/m) [\mu(1 + \mu)/(1 - \mu)(1 + 3\mu)] C + [(1 - \mu)^2/2(1 + 3\mu)] \times \\ \times [(1/2) \cos(B_1 \ln C) + B_1 \sin(B_1 \ln C)] C_3^1 C^{1/2+\alpha},$$

$$C_3^1 = -C^{1/2-\alpha} D_1 [\alpha(1 + \alpha)/(\alpha - 1)] \{ [2 + \alpha(1 + \alpha)/(\alpha - 1)] \times \\ \times [(1/2) \cos(B_1 \ln C) + B_1 \sin(B_1 \ln C)] - (\alpha - 1)(\alpha + 2) \cos(B_1 \ln C) \}^{-1}, \\ D_1 = -LA/2m(1 - \mu).$$

Увеличивая число членов разложения ряда (2.1) и анализируя полученные решения аналогично тому, как это было сделано для предыдущего приближения, нетрудно установить связь между постоянными для предыдущего и последующего приближений на любом шаге решения задачи:

$$C_2^k = C_2^{k-1} D_k / D_{k-1}, \quad C_3^k = C_3^{k-1} D_k / D_{k-1}, \quad k = 2, \dots$$

Заметим, например, что при $k = 3$ $D_3 = l^2 A / 6m^2 (1 - \mu)$, при $k = 4$ $D_4 = -Al^3(2 + \alpha)[1 + (\alpha - 2)^2/16]/96m^3$.

3. Исследование в случае большого времени. Решение уравнения (1.3) будем искать в виде ряда

$$(3.1) \quad y = y_0 + f_0 t + \sum_{k=1}^{\infty} f_k \exp(-kRt), \quad R = \text{const} > 0.$$

Поскольку $y|_{t=0} = 0$, то

$$(3.2) \quad y_0 = - \sum_{k=1}^{\infty} f_k.$$

Рассмотрим первое приближение. Пусть

$$(3.3)' \quad y = y_0 + f_0 t + f_1 \exp(-Rt).$$

Подставляя (3.3) в исходное уравнение (1.3) и вводя обозначение (2.11), получим

$$(3.4) \quad (af_0''')' + mf_0/K = -ly_0/K;$$

$$(3.5) \quad (af_1''' + a'f_1'')' + (Rm - l)f_1/KR = (lf_0 t/KR) \exp(Rt).$$

Увеличим число членов разложения ряда (3.1). Пусть $y = y_0 + f_0 t + f_1 \exp(-Rt) + f_2 \exp(-2Rt)$. Тогда приходим к системе трех уравнений для определения f_0 , f_1 и f_2 , причем f_0 и f_1 находятся соответственно из (3.4) и (3.5), а для f_2

$$(3.6) \quad (af_2''' + a'f_2'')' + (m/K - l/2KR)f_2 = [R(\mu - 2)/4] \{ [a'(f_0'')^{-1}]' (f_1'')^2 + 2[a'(f_0'')^{-1}] [(f_1'')^2]' \} + (1/2)R(\mu - 1) [a(f_0'')^{-1}] [(f_1'')^2 + f_1 f_1^{IV}].$$

Однородные уравнения для (3.4)–(3.6) такие же, как и в п. 2, — уравнения Эйлера, решения которых известны [4]. Для каждого приближения, зная вид правой части уравнения, выписываем частное решение и затем составляем общее.

Обратимся теперь к определению постоянных, входящих в общее решение задачи для случая большого времени. Ограничимся пока разложением (3.3). Тогда

$$(3.7) \quad y = (y_0 + f_1) + (f_0 - Rf_1)t + f_1 \sum_{n=2}^k (-Rt)^n/n!$$

Введем обозначения:

$$F_0 = y_0 + f_1, \quad F_1 = f_0 - Rf_1, \quad F_2 = R^2 f_1 / 2, \dots, \quad F_k = (-1)^k R^k f_1 / k!$$

Выразим f_0 , f_1 и R через F_1 , F_2 , F_3 :

$$f_0 = F_1 - (2/3)(F_2^2/F_3), \quad R = -3F_3/F_2, \quad f_1 = (2/9)(F_2^3/F_3^2).$$

Вообще для $k \geq 4$ $F_k = (3/k)(F_3/F_2)F_{k-1}$.

На основании (3.2) заключаем, что $F_0 = 0$. Сопоставление (3.7) и (2.1) позволяет сделать заключение, что $F_1 = y_1$, $F_2 = y_2$, $F_3 = y_3$. Выражения для y_1 , y_2 и y_3 приведены в п. 2. Итак,

$$y = (F_1 + 2mF_2/l)t + [1 - \exp(-lt/m)]2m^2 F_2/l^2, \\ F_1 = Ax^{-\alpha}, \quad F_2 = Dx^{-\alpha} + C_2 x^{-(\alpha+1)} + C_3 x^{-1/2} \cos(B_1 \ln x).$$

Таким образом, зная решение задачи для малых значений времени, можно выписать его для больших значений времени. Исследования, проведенные в п. 2 и 3, дают возможность считать, что найдены решения нелинейного уравнения (1.3), справедливые для любых моментов времени и удобные для практического использования.

4. Натурные исследования. Эксперименты проведены на ледяном покрове одного из арктических морей СССР. Наличие пресного стока и

низких температур воздуха позволило создавать лед различной солёности и толщины. Подготовка эксперимента заключалась в создании устойчивого ледяного покрова, определении температуры, толщины, солёности и текстуры льда в районе контрольной площадки. Прогибы естественного ледяного покрова во времени фиксировались одновременным включением стереофотограмметрической съёмки, киносъёмки, подводных фото- и телевизионных съёмок. С этой целью на ледяном покрове разбивалась пикетажная сетка с шагом 1×1 м таким образом, чтобы высота пикетов над льдом составляла 0,3 м, а под ледяным покровом 1 м. Проводилась подводная фото- и телевизионная съёмка нижней границы ледяного покрова и текстуры льда. Изображение передавалось на монитор и видеоманитофон. Осуществлялась отработка синхронного включения всех видов съёмки и киносъёмка эксперимента.

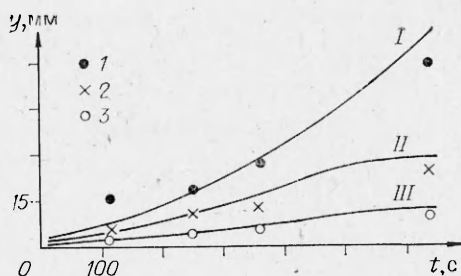


Рис. 2

Эксперимент заключается в установке грузов весом от 2,5 до 32,5 т, включении всех видов съёмки с целью фиксации чаши прогиба во времени. Для всевозможных прикладываемых нагрузок удалось найти стадии установившейся ползучести и измерить величины прогибов во времени в различных точках естественного ледяного покрова. На рис. 2 приведены характерные точки 1—3 экспериментальных исследований при $Q = 2,5$ т, $h = 0,25$ м, $H = 12$ м, датчики располагались соответственно в 1, 2 и 3 м от оси затвора, линиями I—III представлены результаты вычислений, полученных по формулам, содержащимся в п. 2 и 3. Сравнение теоретически рассчитанных прогибов пластинки по координате x и времени t с экспериментально измеренными на реальном ледяном покрове показывает хорошее качественное и удовлетворительное количественное совпадение. При расчетах реологические постоянные для льда брались из [5] ($B = 5,6(0,1 \text{ МПа})^{-b} \text{ с}^{-1}$, $b = 1,72$).

Для инженерных приложений можно дать приближенные формулы для оценки реологических характеристик ледяного покрова. Будем считать, что в (2.1) y_1, y_2, y_3, \dots известны. Ограничимся двумя членами ряда. Рассмотрим $\lim_{x \rightarrow 0} y_1$ и $\lim_{x \rightarrow 0} y_2$. Оценим все слагаемые в получаемых выражениях. Нетрудно видеть, что члены, содержащие постоянную C_5 , малы по сравнению с остальными. Пренебрежем этими членами. Окончательно получим

$$(4.1) \quad b = -2(l y_1 + 3m y_2) / (l y_1 + 2m y_2)$$

(всегда $y_2 < 0$). В рассматриваемом случае $y_2 = -y_1 l(3\alpha - 2) / 8m(\alpha - 1)$. После несложных преобразований легко убедиться, что числитель в (4.1) всегда отрицателен, а знаменатель всегда положителен.

Для B паходим выражение

$$B = h \left(\frac{m}{Q} \right)^2 \frac{2\alpha(\alpha + 1)}{(\alpha - 1)^2} y_1^3 \left[-\frac{16g}{l} \frac{\alpha^2 - 4}{9\alpha^2 - 4} \left(\frac{mh}{Q} \right)^2 y_2 \right]^b.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л. М. Теория ползучести.— М.: Физматгиз, 1960.
2. Седов Л. И. Механика сплошной среды: В 2 т.— М.: Наука, 1976.— Т. 1.
3. Соколовский В. В. Теория пластичности.— М.: Высш. шк., 1969.
4. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— М.: Наука, 1976.
5. Войтковский К. Ф. Механические свойства льда.— М.: Изд-во АН СССР, 1960.

Поступила 10/IV 1986 г.