УДК 539.311

ЗАДАЧА О РАВНОВЕСИИ ПЛАСТИНЫ ТИМОШЕНКО С НАКЛОННОЙ ТРЕЩИНОЙ

Н. П. Лазарев

Научно-исследовательский институт математики Северо-Восточного федерального университета им. М. К. Аммосова, 677000 Якутск
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: nyurgun@ngs.ru

Для пластины Тимошенко с наклонной трещиной, в исходном состоянии задаваемой поверхностью, нормаль к которой образует малый угол со срединной плоскостью, предложено условие взаимного непроникания берегов трещины. Доказана однозначная разрешимость вариационной задачи о равновесии пластины с условиями непроникания берегов трещины, задаваемыми на кривой, описывающей трещину. Сформулирована дифференциальная постановка задачи, эквивалентная исходной постановке при достаточной гладкости решения. Для одномерного случая (балка с разрезом) получено аналитическое решение и изучены случаи продольного растяжения и сжатия.

Ключевые слова: пластина, трещина, разрез, условие непроникания, вариационная задача.

Введение. Изучению пластин и оболочек, содержащих трещины, посвящено большое количество работ (см., например, [1–11]). При этом, как правило, рассматриваются вертикальные трещины, задаваемые поверхностями, нормали к которым (в каждой точке поверхности) параллельны срединной плоскости пластины. Как известно, в классическом подходе к моделированию трещин в деформируемых телах используются линейные краевые условия в виде равенств, которые формулируются на кривой, описывающей трещину [1–3]. Заметим, что этот подход допускает возможность взаимного проникания берегов трещины [4]. С помощью вариационных методов изучен широкий класс задач математической теории трещин с нелинейными условиями непроникания (в виде системы равенств и неравенств), заданными на кривой (поверхности), описывающей трещину в упругих телах [6–12].

В работах [7, 8] исследованы нелинейные задачи о равновесии пластин Кирхгофа — Лява при условии взаимного непроникания берегов наклонной трещины. При этом в [7] условие непроникания приведено для трещин, задаваемых гладкой поверхностью $z = F(x_1, x_2)$, где $F(x_1, x_2)$ — функция, определенная в срединной плоскости (x_1, x_2). В [8] выведено условие непроникания для трещины, положение которой незначительно отличается от вертикального положения. Кроме того, в [7, 8] используются дополнительные (для модели Кирхгофа — Лява) предположения о том, что перемещения всех точек берегов

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (соглашение № 8222) и в рамках государственного задания на выполнение научно-исследовательской работы на 2012–2014 гг. (проект № 4402).

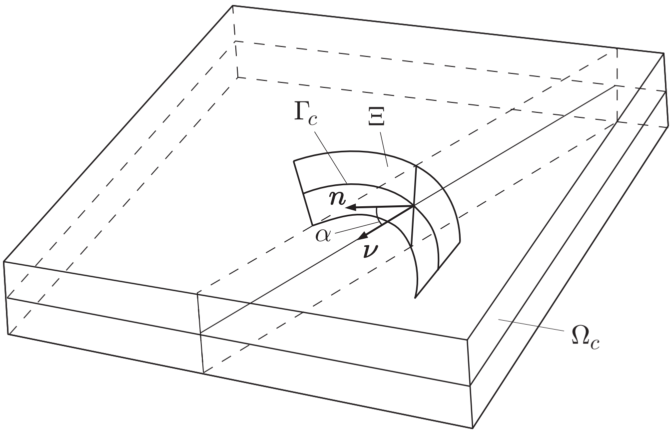

Рис. 1. Схема пластины с наклонной трещиной

трещины можно задать с помощью перемещений точек, лежащих на срединной плоскости пластины.

В настоящей работе, так же как и в [8], условие взаимного непроникания берегов трещины выводится в предположении о том, что нормаль к поверхности трещины образует малый угол со срединной плоскостью. Вариационная задача о равновесии пластины формулируется в виде задачи минимизации функционала энергии на множестве допустимых функций, которые удовлетворяют условию непроникания. Доказана однозначная разрешимость задачи.

1. Постановка задачи. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная односвязная область с гладкой границей $\partial\Omega$, Γ_c — гладкая кривая без самопересечений, такая что $\overline{\Gamma}_c \subset \Omega$, $\partial\Gamma_c \notin \Gamma_c$. Обозначим через $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}) = (\nu_1, \nu_2)$ вектор нормали к Γ_c, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \Gamma_c$. Как и в работе [8], зададим поверхность

$$\Xi = \big\{(\bar{x}_1, \bar{x}_2, z)\colon |z| \leqslant h,\ (\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \bar{\boldsymbol{x}},\ \bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} - z\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}) \operatorname{tg} \alpha(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \in \Gamma_c\big\},$$

где $\alpha(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \Gamma_c$ — функция двух переменных, причем $|\alpha(\boldsymbol{x})| < \pi/2$ (рис. 1). Предположим, что при фиксированном значении $\boldsymbol{x} \in \Gamma_c$ нормаль $\boldsymbol{n}(\bar{\boldsymbol{x}}, z)$ к поверхности Ξ остается неизменной:

$$\boldsymbol{n}(\bar{\boldsymbol{x}}, z) = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}, 0) = (\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}) \cos \alpha(\boldsymbol{x}), \sin \alpha(\boldsymbol{x})) \quad \forall\, \bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} - z\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}) \operatorname{tg} \alpha(\boldsymbol{x}), \quad |z| \leqslant h.$$

Заметим, что этим свойством обладают, например, поверхности Ξ, образованные при пересечении плоскости или конической поверхности с множеством $\Omega \times [-h, h]$.

Предположим, что в исходном недеформированном состоянии пластина, содержащая наклонную трещину, задается в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ множеством $\Omega \times [-h, h] \setminus \overline{\Xi}$. При этом поверхность Ξ соответствует трещине (разрезу) нулевой ширины. В срединной плоскости $z = 0$ имеется негладкая область $\Omega_c = \Omega \setminus \overline{\Gamma}_c$. В соответствии с направлением нормали $\boldsymbol{\nu}$ имеются положительные Γ_c^+, Ξ^+ и отрицательные Γ_c^-, Ξ^- области кривой Γ_c и поверхности Ξ.

Обозначим через $\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{W}, w)$, $\boldsymbol{x} \in \Omega_c$ вектор перемещений точек срединной поверхности ($\boldsymbol{W} = (w_1, w_2)$ и w — горизонтальные (вдоль плоскости (x_1, x_2)) и вертикальные перемещения соответственно). Углы поворота поперечных сечений обозначим через $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}) = (\psi_1, \psi_2)$, $\boldsymbol{x} \in \Omega_c$.

Приведем известные тензорные соотношения теории упругости, справедливые для упругих трансверсально-изотропных пластин [13]. Тензоры, описывающие деформацию пластины, определяются по формулам

$$\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{\psi}) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial\psi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\psi_j}{\partial x_i}\Big), \qquad \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{W}) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\Big), \qquad i,j = 1,2.$$

Тензоры моментов и усилий вычисляются по формулам

$$m_{ij}(\boldsymbol{\psi}) = c_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\boldsymbol{\psi}), \qquad \sigma_{ij}(\boldsymbol{W}) = 3h^{-2}c_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\boldsymbol{W}) \tag{1}$$

(по повторяющимся индексам проводится суммирование), где ненулевые постоянные коэффициенты тензора c_{ijkl} определяются соотношениями

$$c_{iiii} = D, \qquad c_{iijj} = D\varkappa, \qquad c_{ijij} = c_{ijji} = D(1-\varkappa)/2, \qquad i,j = 1,2, \quad i \neq j,$$

D — цилиндрическая жесткость пластины; $\varkappa$ — коэффициент Пуассона. Для вектора поперечных сил $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2)$ выполняются равенства [13]

$$q_i(w,\boldsymbol{\psi}) = \Lambda(w_{,i} + \psi_i), \qquad i = 1,2 \quad \Big(v_{,i} = \frac{\partial v}{\partial x_i}\Big), \tag{1$'$}$$

где $\Lambda = 2k'G$; k' — коэффициент сдвига; G — модуль сдвига на площадках, перпендикулярных срединной плоскости пластины; Λ, k', G — постоянные.

Пусть $H^1(\Omega_c)$ — пространство Соболева, $H^{1,0}(\Omega_c)$ — его подпространство, состоящее из всех функций, которые обращаются в нуль на внешней границе $\partial\Omega$. Введем следующие обозначения:

$$H = H^{1,0}(\Omega_c)^5, \qquad \|\cdot\| = \|\cdot\|_H.$$

Предположим, что $\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{W}, w, \boldsymbol{\psi}) \in H$, $\bar{\boldsymbol{\eta}} = (\bar{\boldsymbol{W}}, \bar{w}, \bar{\boldsymbol{\psi}}) \in H$. Определим билинейную форму функций $\boldsymbol{\eta}$, $\bar{\boldsymbol{\eta}}$:

$$B(\boldsymbol{\eta},\bar{\boldsymbol{\eta}}) = \int\limits_{\Omega_c} \big(\sigma_{ij}(\boldsymbol{W})\,\varepsilon_{ij}(\bar{\boldsymbol{W}}) + m_{ij}(\boldsymbol{\psi})\,\varepsilon_{ij}(\bar{\boldsymbol{\psi}}) + \Lambda(w_{,i} + \psi_i)(\bar{w}_{,i} + \bar{\psi}_i)\big).$$

Выражение для функционала потенциальной энергии деформированной пластины имеет вид

$$\Pi(\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{2}\,B(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta}) - \int\limits_{\Omega_c} \boldsymbol{F}\boldsymbol{\eta} \quad \forall\,\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{W}, w, \boldsymbol{\psi}) \in H,$$

где $\boldsymbol{F} = (f_1, f_2, f_3, \mu_1, \mu_2) \in L^2(\Omega_c)^5$ — вектор заданных внешних нагрузок [13].

На внешней границе $\partial\Omega$ зададим краевые условия жесткого защемления

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{0} \quad \text{на} \quad \partial\Omega,$$

где $\boldsymbol{0} = (0,0,0,0,0)$; $\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{W}, w, \boldsymbol{\psi})$.

Как известно, в модели Тимошенко перемещения $\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{x},z) = (\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},z), w(\boldsymbol{x},z))$ для точек оболочки, находящихся на расстоянии $|z| \leqslant h$ от срединной поверхности, выражаются через перемещения в срединной поверхности $\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{x},0) = \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{W}, w)$ и углы поворота нормальных сечений $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x})$. При этом справедливы следующие формулы [13]:

$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},z) = \boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}) + z\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}), \quad w(\boldsymbol{x},z) = w(\boldsymbol{x}), \qquad |z| \leqslant h, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega_c.$$

Выведем условие непроникания с помощью предположений и рассуждений, аналогичных использованным в работе [8]. Пусть угол $\alpha(\boldsymbol{x})$ достаточно мал при всех $\boldsymbol{x} \in \Gamma_c$. Предположим, что перемещения в точках $(\bar{\boldsymbol{x}}, z) \in \Xi^{\pm}$ (на берегах трещины) можно выразить с помощью следов функций $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x})$, $w(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x})$ на кривой Γ_c в виде равенств

$$w^{\pm}(\bar{\boldsymbol{x}},z) = w^{\pm}(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{W}^{\pm}(\bar{\boldsymbol{x}},z) = \boldsymbol{W}^{\pm}(\boldsymbol{x}) + z\boldsymbol{\psi}^{\pm}(\boldsymbol{x}), \qquad |z| \leqslant h, \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma_c, \tag{2}$$

где $\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} - z\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{tg}\,\alpha(\boldsymbol{x})$.

Условие непроникания берегов трещины заключается в том, что разность перемещений $\boldsymbol{\chi}(\bar{\boldsymbol{x}}, z)^+$ на положительном берегу Ξ^+ и $\boldsymbol{\chi}(\bar{\boldsymbol{x}}, z)^-$ на отрицательном берегу Ξ^- в проекции на нормаль $\boldsymbol{n}(\bar{\boldsymbol{x}}, z)$ должна быть неотрицательной:

$$\big(\boldsymbol{\chi}(\bar{\boldsymbol{x}}, z)^+ - \boldsymbol{\chi}(\bar{\boldsymbol{x}}, z)^-\big) \cdot (\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}) \cos\alpha(\boldsymbol{x}), \sin\alpha(\boldsymbol{x})) \geqslant 0, \qquad (\bar{\boldsymbol{x}}, z) \in \Xi.$$

С учетом (2), подставляя экстремальные значения $z = h$, $z = -h$, находим

$$[\boldsymbol{W_\nu}] \cos\alpha - h|[\boldsymbol{\psi_\nu}]| \cos\alpha + [w] \sin\alpha \geqslant 0, \qquad \boldsymbol{x} \in \Gamma_c,$$

где $\boldsymbol{\psi_\nu} = \psi_i \nu_i$; $\boldsymbol{W_\nu} = w_i \nu_i$; $[v] = v\big|_{\Gamma_c^+} - v\big|_{\Gamma_c^-}$. Разделив последнее соотношение на $\cos\alpha$, выведем условие непроникания для наклонной трещины

$$[\boldsymbol{W_\nu}] + [w] \operatorname{tg}\alpha \geqslant h|[\boldsymbol{\psi_\nu}]|, \qquad \boldsymbol{x} \in \Gamma_c. \tag{3}$$

Заметим, что при $\alpha \equiv 0$ неравенство (3) переходит в известное условие непроникания для вертикальных трещин, содержащихся в пластинах Тимошенко [10]. Если для углов поворота вблизи трещины выполняются соотношения гипотезы прямых нормалей Кирхгофа — Лява $\psi_i + w_{,i} = 0$, $i = 1, 2$, то (3) принимает вид условия непроникания для наклонной трещины в пластине Кирхгофа — Лява [8].

Задачу о равновесии пластины, содержащей наклонную трещину, сформулируем в виде минимизации функционала энергии

$$\inf_{\boldsymbol{\eta} \in K} \Pi(\boldsymbol{\eta}), \tag{4}$$

где $K = \{\boldsymbol{\eta} \in H\colon \boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{W}, w, \boldsymbol{\psi})\}$ — множество допустимых функций, таких что $\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{W}, w, \boldsymbol{\psi})$ удовлетворяет (3). Функционал $\Pi(\boldsymbol{\eta})$ является коэрцитивным, выпуклым и слабополунепрерывным снизу в пространстве H [10]. Кроме того, функционал $\Pi(\boldsymbol{\eta})$ дифференцируем. Можно показать, что множество K является выпуклым, замкнутым и, следовательно, слабозамкнутым в пространстве H. Указанные свойства функционала $\Pi(\boldsymbol{\eta})$ и множества K гарантируют существование и единственность решения $\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{U}, u, \boldsymbol{\varphi})$, удовлетворяющего вариационному неравенству [10]

$$\boldsymbol{\xi} \in K, \qquad B(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi}) \geqslant \int\limits_{\Omega_c} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi}) \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in K. \tag{5}$$

2. Формулировка краевой задачи. В данном пункте приводится эквивалентная дифференциальная постановка задачи (4). Используя вариационное неравенство (5) и выбирая пробные функции, выведем краевые условия на кривой Γ_c. При этом будем использовать формулы Грина. Так же как и в [9], предположим, что кривая Γ_c может быть продолжена до замкнутой достаточно гладкой кривой Σ, делящей область Ω на две подобласти Ω_1 и Ω_2 ($\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$) с гладкими границами $\partial\Omega_1 = \Sigma$, $\partial\Omega_2 = \Sigma \cup \partial\Omega$. Заметим, что кривая Σ может быть выбрана произвольно с точностью до наложенных на нее ограничений. Предположим, что решение $\boldsymbol{\xi}$ задачи (4) является достаточно гладким.

В результате сравнения двух неравенств, полученных при подстановке в (5) пробных функций $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi} + \tilde{\boldsymbol{\eta}}$ и $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi} - \tilde{\boldsymbol{\eta}}$, где $\tilde{\boldsymbol{\eta}} = (\tilde{\boldsymbol{W}}, \tilde{w}, \tilde{\boldsymbol{\psi}}) \in C_0^\infty(\Omega_\gamma)^5$, имеем равенство

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \big(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(\tilde{\boldsymbol{W}}) + m_{ij}\varepsilon_{ij}(\tilde{\boldsymbol{\psi}}) + q_i(\tilde{w}_{,i} + \tilde{\psi}_i)\big) = \int\limits_{\Omega_\gamma} (f_i\tilde{w}_i + f_3\tilde{w} + \mu_i\tilde{\psi}_i) \qquad \forall \tilde{\boldsymbol{\eta}} \in C_0^\infty(\Omega_\gamma)^5.$$

Здесь $m_{ij} = m_{ij}(\boldsymbol{\varphi})$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\boldsymbol{U})$, $q_i = q_i(u, \boldsymbol{\varphi})$, $i, j = 1, 2$. С учетом независимости функций $\tilde{w}_1$, $\tilde{w}_2$, $\tilde{w}$, $\tilde{\psi}_1$, $\tilde{\psi}_2$ из этого равенства следуют уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j} = -f_i, \quad m_{ij,j} - q_i = -\mu_i, \quad i = 1, 2, \quad q_{i,i} = -f_3 \quad \text{в} \quad \Omega_c. \tag{6}$$

В силу предположений о возможности продолжения кривой Γ_c до замкнутой кривой Σ справедлива формула Грина [9]

$$\int\limits_{\Omega_c} \sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{W}) = -\int\limits_{\Omega_c} \sigma_{ij,j}w_i - \Big[\int\limits_{\Gamma_c} \big(\sigma_{\boldsymbol{\nu}}\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{\nu}} + \sigma_{\boldsymbol{\tau}i}w_{\boldsymbol{\tau}i}\big)\Big] \qquad \forall\, \boldsymbol{W} \in H^{1,0}(\Omega_c)^2, \tag{7}$$

где $\sigma_{\boldsymbol{\nu}}\boldsymbol{\nu}$ и $\sigma_{\boldsymbol{\tau}} = (\sigma_{\boldsymbol{\tau}1}, \sigma_{\boldsymbol{\tau}2})$ — нормальная и касательная составляющие вектора $(\sigma_{1j}\nu_j, \sigma_{2j}\nu_j)$; $\sigma_{ij}\nu_j = \sigma_{\boldsymbol{\nu}}\nu_i + \sigma_{\boldsymbol{\tau}i}$, $\sigma_{\boldsymbol{\nu}} = \sigma_{ij}\nu_j\nu_i$, $\boldsymbol{\tau} = (-\nu_2, \nu_1)$, $w_{\boldsymbol{\tau}i} = w_i - \boldsymbol{W}_{\boldsymbol{\nu}}\nu_i$, $i = 1, 2$. Справедливы также формулы (см. [9])

$$\int\limits_{\Omega_c} m_{ij}\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{\psi}) = -\int\limits_{\Omega_c} m_{ij,j}\psi_i - \Big[\int\limits_{\Gamma_c} \big(m_{\boldsymbol{\nu}}\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{\nu}} + m_{\boldsymbol{\tau}i}\psi_{\boldsymbol{\tau}i}\big)\Big] \qquad \forall\, \boldsymbol{\psi} \in H^{1,0}(\Omega_c)^2,$$

$$\int\limits_{\Omega_c} \nabla u \nabla w = -\Big[\int\limits_{\Gamma_c} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\, w\Big] - \int\limits_{\Omega_c} w\Delta u \qquad \forall\, w \in H^{1,0}(\Omega_c), \tag{8}$$

$$\int\limits_{\Omega_c} \boldsymbol{\varphi}\nabla w = -\Big[\int\limits_{\Gamma_c} \boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{\nu}} w\Big] - \int\limits_{\Omega_c} w\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi} \qquad \forall\, w \in H^{1,0}(\Omega_c),$$

где величины $m_{\boldsymbol{\nu}}$, $m_{\boldsymbol{\tau}i}$, $i = 1, 2$ определяются по формулам, аналогичным формулам для $\sigma_{\boldsymbol{\nu}}$, $\sigma_{\boldsymbol{\tau}i}$, $i = 1, 2$ (см. (7)).

Подставляя в (5) $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{\eta} = 2\boldsymbol{\xi}$, получаем соотношения

$$B(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) = \int\limits_{\Omega_c} \boldsymbol{F}\boldsymbol{\xi}, \qquad B(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \geqslant \int\limits_{\Omega_c} \boldsymbol{F}\boldsymbol{\eta} \quad \forall\, \boldsymbol{\eta} \in K. \tag{9}$$

Подставляя во второе соотношение (9) формулы интегрирования по частям (7), (8), с учетом уравнений равновесия (6) находим

$$-\int\limits_{\Gamma_c} \Big[\big(\sigma_{\boldsymbol{\nu}}\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{\nu}} + \sigma_{\boldsymbol{\tau}i}w_{\boldsymbol{\tau}i}\big) + \big(m_{\boldsymbol{\nu}}\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{\nu}} + m_{\boldsymbol{\tau}i}\psi_{\boldsymbol{\tau}i}\big) + \Lambda\Big(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} + \boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{\nu}}\Big)w\Big] \geqslant 0 \qquad \forall\, \boldsymbol{\eta} \in K. \tag{10}$$

Выбирая в (10) пробные функции $\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{W}, w, \boldsymbol{\psi}) \in H_0^1(\Omega)^5$, для которых $[\boldsymbol{\eta}] = \boldsymbol{0}$ на Γ_c, с учетом независимости функций $\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{\nu}}$, $\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{\nu}}$, w, $w_{\boldsymbol{\tau}1}$, $w_{\boldsymbol{\tau}2}$, $\psi_{\boldsymbol{\tau}1}$, $\psi_{\boldsymbol{\tau}2}$ получаем

$$[\sigma_{\boldsymbol{\nu}}] = [m_{\boldsymbol{\nu}}] = \Big[\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} + \boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\nu}\Big] = 0, \qquad [\sigma_{\boldsymbol{\tau}i}] = [m_{\boldsymbol{\tau}i}] = 0, \quad i = 1, 2 \quad \text{на} \quad \Gamma_c.$$

Значит, неравенство (10) можно записать в виде

$$\int\limits_{\Gamma_c} \Big(\big(\sigma_{\boldsymbol{\nu}}[\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{\nu}}] + \sigma_{\boldsymbol{\tau}i}[w_{\boldsymbol{\tau}i}]\big) + \big(m_{\boldsymbol{\nu}}[\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{\nu}}] + m_{\boldsymbol{\tau}i}[\psi_{\boldsymbol{\tau}i}]\big) + \boldsymbol{q}_{\boldsymbol{\nu}}[w]\Big) \leqslant 0 \qquad \forall\, \boldsymbol{\eta} \in K, \tag{11}$$

где $\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{\nu}} = \Lambda(\partial u/\partial \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{\nu}})$. Пусть тестовые функции имеют такой вид, что $\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{\nu}} = 0$, $\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{\nu}} = 0$, $w = 0$ на Γ_c. Тогда, варьируя в (11) значения $[w_{\boldsymbol{\tau}i}]$, $[\psi_{\boldsymbol{\tau}i}]$, $i = 1, 2$, получаем

$$\sigma_{\boldsymbol{\tau}i} = m_{\boldsymbol{\tau}i} = 0, \qquad i = 1, 2 \quad \text{на} \quad \Gamma_c. \tag{12}$$

Введем обозначение для вспомогательной вектор-функции $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, p_3)$, состоящей из достаточно гладких функций p_i, $i = 1, 2, 3$, определенных на кривой Γ_c, при этом $\mathrm{supp}\, p_i \subset \Gamma_c$, $i = 1, 2, 3$. Как известно, существует функция $\tilde{\boldsymbol{\eta}} \in H(\Omega_c)$, такая что (см., например, [6])

$$(p_1\nu_1, p_1\nu_2) = [\tilde{\boldsymbol{W}}], \qquad p_2 = [\tilde{w}], \qquad (p_3\nu_1, p_3\nu_2) = [\tilde{\boldsymbol{\psi}}] \qquad \text{на} \quad \Gamma_c. \tag{13}$$

При этом на кривой Γ_c выполнены равенства $[\tilde{\boldsymbol{W}}_{\boldsymbol{\nu}}] = p_1$, $[\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\nu}}] = p_3$.

Таким образом, при условии выполнения соотношения $p_1 + p_2 \operatorname{tg}\alpha \geqslant h|p_3|$ на Γ_c, подставляя в (11) функцию $\tilde{\boldsymbol{\eta}} \in H(\Omega_c)$, удовлетворяющую (13), с учетом (12) получаем

$$\int\limits_{\Gamma_c} \big(\sigma_{\boldsymbol{\nu}} p_1 + m_{\boldsymbol{\nu}} p_3 + \boldsymbol{q}_{\boldsymbol{\nu}} p_2\big) \leqslant 0. \tag{14}$$

Рассмотрим следующее представление:

$$\sigma_{\boldsymbol{\nu}} p_1 + m_{\boldsymbol{\nu}} p_3 + \boldsymbol{q}_{\boldsymbol{\nu}} p_2 = \frac{1}{2}\Big(\sigma_{\boldsymbol{\nu}} + \frac{1}{h}\, m_{\boldsymbol{\nu}}\Big)(p_1 + p_2 \operatorname{tg}\alpha + h p_3) + \\ + \frac{1}{2}\Big(\sigma_{\boldsymbol{\nu}} - \frac{1}{h}\, m_{\boldsymbol{\nu}}\Big)(p_1 + p_2 \operatorname{tg}\alpha - h p_3) + (-\sigma_{\boldsymbol{\nu}} \operatorname{tg}\alpha + \boldsymbol{q}_{\boldsymbol{\nu}}) p_2. \tag{15}$$

Выбирая функции p_1, p_2, p_3, удовлетворяющие равенствам $p_1 = -p_2 \operatorname{tg}\alpha$, $p_3 = 0$, из (14) с учетом (15) находим

$$\sigma_{\boldsymbol{\nu}} \operatorname{tg}\alpha = \boldsymbol{q}_{\boldsymbol{\nu}} \quad \text{на} \quad \Gamma_c. \tag{16}$$

С помощью (15), (16) преобразуем (14) к виду

$$\int\limits_{\Gamma_c} \Big(\Big(\sigma_{\boldsymbol{\nu}} + \frac{1}{h}\, m_{\boldsymbol{\nu}}\Big)(p_1 + p_2 \operatorname{tg}\alpha + h p_3) + \Big(\sigma_{\boldsymbol{\nu}} - \frac{1}{h}\, m_{\boldsymbol{\nu}}\Big)(p_1 + p_2 \operatorname{tg}\alpha - h p_3)\Big) \leqslant 0 \tag{17}$$

при условии, что функции p_i, $i = 1, 2, 3$ удовлетворяют неравенству $p_1 + p_2 \operatorname{tg}\alpha \geqslant h|p_3|$ на Γ_c. Из (17) следует, что на кривой Γ_c справедливы соотношения $-h\sigma_{\boldsymbol{\nu}} - m_{\boldsymbol{\nu}} \geqslant 0$, $-h\sigma_{\boldsymbol{\nu}} + m_{\boldsymbol{\nu}} \geqslant 0$ или $-h\sigma_{\boldsymbol{\nu}} \geqslant |m_{\boldsymbol{\nu}}|$. Интегрируя первое соотношение (9) по частям, с учетом (12), (16) находим

$$\int\limits_{\Gamma_c} \Big(\Big(\sigma_{\boldsymbol{\nu}} + \frac{1}{h}\, m_{\boldsymbol{\nu}}\Big)([\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{\nu}}] + [u] \operatorname{tg}\alpha + h[\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{\nu}}]) + \Big(-\sigma_{\boldsymbol{\nu}} + \frac{1}{h}\, m_{\boldsymbol{\nu}}\Big)([\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{\nu}}] + [u] \operatorname{tg}\alpha - h[\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{\nu}}])\Big) = 0.$$

Следовательно, на кривой Γ_c выполняются равенства

$$(h\sigma_{\boldsymbol{\nu}} + m_{\boldsymbol{\nu}})([\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{\nu}}] + [u] \operatorname{tg}\alpha + h[\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{\nu}}]) = (m_{\boldsymbol{\nu}} - h\sigma_{\boldsymbol{\nu}})([\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{\nu}}] + [u] \operatorname{tg}\alpha - h[\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{\nu}}]) = 0.$$

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Пусть решение* $\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{U}, u, \boldsymbol{\varphi})$ *вариационной задачи* (4) *является достаточно гладким. Тогда* $\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{U}, u, \boldsymbol{\varphi})$ *также является решением для краевой задачи, состоящей из соотношений* (1), (1′), *уравнений* (6) *и краевых условий*

$$\begin{gathered} \boldsymbol{U} = \boldsymbol{\varphi} = (0, 0), \qquad u = 0 \quad \textit{на} \quad \partial\Omega; \\ [\sigma_{\boldsymbol{\nu}}] = [m_{\boldsymbol{\nu}}] = 0, \qquad [\sigma_{\boldsymbol{\tau}}] = [m_{\boldsymbol{\tau}}] = (0, 0), \qquad \sigma_{\boldsymbol{\nu}} \operatorname{tg}\alpha = \boldsymbol{q}_{\boldsymbol{\nu}} \qquad \textit{на} \quad \Gamma_c, \\ \sigma_{\boldsymbol{\tau}} = m_{\boldsymbol{\tau}} = (0, 0), \qquad [\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{\nu}}] + [u] \operatorname{tg}\alpha \geqslant h|[\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{\nu}}]|, \qquad -h\sigma_{\boldsymbol{\nu}} \geqslant |m_{\boldsymbol{\nu}}| \qquad \textit{на} \quad \Gamma_c, \\ \Big(\sigma_{\boldsymbol{\nu}} + \frac{1}{h}\, m_{\boldsymbol{\nu}}\Big)\big([\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{\nu}}] + [u] \operatorname{tg}\alpha + h[\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{\nu}}]\big) = 0 \qquad \textit{на} \quad \Gamma_c, \\ \Big(\sigma_{\boldsymbol{\nu}} - \frac{1}{h}\, m_{\boldsymbol{\nu}}\Big)\big([\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{\nu}}] + [u] \operatorname{tg}\alpha - h[\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{\nu}}]\big) = 0 \qquad \textit{на} \quad \Gamma_c. \end{gathered} \tag{18}$$

Замечание 1. Справедливо также обратное утверждение: гладкая функция $\boldsymbol{\xi} \in K$, удовлетворяющая уравнениям равновесия (6) и соотношениям (1), (1′), (18), является решением задачи (4). Это утверждение можно доказать с помощью рассуждений, аналогичных использованным в работе [9].

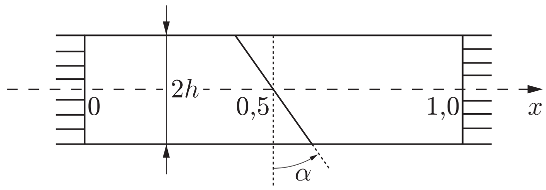

Рис. 2. Схема балки с наклонным разрезом

3. Постановка задачи о балке. Рассмотрим тонкую однородную балку единичной длины, имеющую толщину $2h$. Будем полагать, что сечение балки является прямоугольным. Пусть срединная линия балки представляет собой отрезок $(0,1)$ на оси x. В точке $y=1/2$ имеется наклонный разрез, проходящий под углом α к вертикальной линии (рис. 2). Предполагается, что разрез не выходит на боковую границу, т. е. $0 \leqslant \operatorname{tg}\alpha < (2h)^{-1}$. Функции внешних нагрузок $g(x)$, $f(x)$, $\mu(x)$ заданы и принадлежат пространству $L^2(0,1)$. Обозначим через $\boldsymbol{\eta} = (W,w,\psi)$ обобщенный вектор перемещений ($W(x)$, $w(x)$ — горизонтальные и вертикальные перемещения точек срединной линии балки соответственно; $\psi(x)$ — углы поворота волокон, перпендикулярных срединной линии балки).

На внешней границе ставится условие жесткого защемления [14]

$$W = w = \psi = 0, \qquad x = 0, 1.$$

Условие непроникания (3) преобразуется к виду

$$[W] + [w]\operatorname{tg}\alpha \geqslant h|[\psi]|,$$

где $[s] = s(y+0) - s(y-0)$ — скачок функции s в точке y.

В случае балки выражение для функционала потенциальной энергии принимает вид [14]

$$\Pi_b(\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \big(ES(W_x)^2 + EI(\psi_x)^2 + GkS(w_x+\psi)^2\big)\,dx - \int\limits_0^1 (gW + fw + \mu\psi)\,dx,$$

где S — площадь сечения; I — момент инерции (для прямоугольного сечения $I = Sh^2/3$); E и G — модули упругости; k — коэффициент сдвига.

Обозначим $\Omega_y = (0,y)\cup(y,1)$. Введем гильбертово пространство

$$H(\Omega_y) = \big\{(W,w,\psi) \in H^1(\Omega_y)^3\colon \quad W = w = \psi = 0,\ x = 0,1\big\}$$

и замкнутое выпуклое множество $K_b = \{\boldsymbol{\eta} = (W,w,\psi) \in H(\Omega_y)\colon [W] + [w]\operatorname{tg}\alpha \geqslant h|[\psi]|\}$.

Задача о равновесии балки с наклонным разрезом формулируется в виде минимизации функционала энергии

$$\inf_{\boldsymbol{\eta}\in K_b} \Pi_b(\boldsymbol{\eta}).$$

С помощью неравенства Фридрихса можно доказать, что функционал $\Pi_b(\boldsymbol{\eta})$ является коэрцитивным в пространстве $H(\Omega_y)$. Кроме того, нетрудно установить, что функционал $\Pi_b(\boldsymbol{\eta})$ является дифференцируемым, выпуклым и слабополунепрерывным снизу в пространстве $H(\Omega_y)$. Указанные свойства функционала $\Pi_b(\boldsymbol{\eta})$ и множества K_b гарантируют существование и единственность решения $\boldsymbol{\xi} = (U,u,\varphi) \in K_b$, удовлетворяющего вариационному неравенству

$$\int\limits_{\Omega_y} \big(ESU_x(W_x - U_x) + EI\varphi_x(\psi_x - \varphi_x) + GkS(u_x + \varphi)(w_x + \psi - u_x - \varphi) -$$

$$- g(W - U) - f(w - u) - \mu(\psi - \varphi)\big)\,dx \geqslant 0 \qquad \forall\,\boldsymbol{\eta} = (W, w, \psi) \in K_b. \quad (19)$$

Свойства пространства $H(\Omega_y)$ позволяют установить с помощью формул интегрирования по частям эквивалентность задачи (19) следующей краевой задаче:

$$-ES\,U_{xx} = g, \quad EI\,\varphi_{xx} - GkS(u_x + \varphi) = \mu, \quad -GkS(u_{xx} + \varphi_x) = f \quad \text{в} \ \ \Omega_y; \qquad (20)$$

$$[U_x] = [\varphi_x] = [u_x + \varphi] = 0, \qquad ES\,U_x(y)\,\mathrm{tg}\,\alpha = GkS(u_x + \varphi)(y); \qquad (21)$$

$$\begin{gathered} [U] + [u]\,\mathrm{tg}\,\alpha \geqslant h|[\varphi]|, \qquad -U_x(y) \geqslant h|\varphi_x(y)|/3, \\ (U_x(y) + h\varphi_x(y)/3)([U] + [u]\,\mathrm{tg}\,\alpha + h[\varphi]) = 0, \\ (U_x(y) - h\varphi_x(y)/3)([U] + [u]\,\mathrm{tg}\,\alpha - h[\varphi]) = 0; \end{gathered} \qquad (22)$$

$$U(0) = u(0) = \varphi(0) = U(1) = u(1) = \varphi(1) = 0. \qquad (23)$$

Заметим, что для задачи о балке эквивалентность двух формулировок доказывается без дополнительных предположений относительно гладкости решения $\boldsymbol{\xi}$.

4. Построение решения задачи о балке. С использованием метода, предложенного в работе [8] при получении аналитического решения для балки Бернулли — Эйлера, содержащей наклонный разрез, построим решение задачи (20)–(23). В силу эквивалентности постановок задач оно является также решением задачи (19). Решение будем искать в виде суммы $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^0 + \boldsymbol{\xi}^1$, где $\boldsymbol{\xi}^0 = (U^0, u^0, \varphi^0)$ — решение неоднородной задачи с нулевыми краевыми условиями

$$\begin{gathered} -U^0_{xx} = \hat{g}, \qquad l\varphi^0_{xx} - (u^0_x + \varphi^0) = \hat{\mu}, \qquad -(u^0_{xx} + \varphi^0_x) = \hat{f} \qquad \text{в} \ \ \Omega_y, \\ U^0_x(y) = \varphi^0_x(y) = (u^0_x + \varphi^0)(y) = 0, \qquad \boldsymbol{\xi}^0(0) = \boldsymbol{\xi}^0(1) = (0, 0, 0), \end{gathered} \qquad (24)$$

$\hat{g} = g/(ES)$; $l = EI/(GkS)$; $\hat{\mu} = \mu/(GkS)$; $\hat{f} = f/(GkS)$. Решение этой задачи $\boldsymbol{\xi}^0 \in H^2(\Omega_y)^3 \cap H$ существует и единственно, поскольку фактически решаются две независимые задачи в областях $(0, y)$ и $(y, 1)$:

$$\begin{gathered} -U^0_{xx} = \hat{g}, \quad l\varphi^0_{xx} - (u^0_x + \varphi^0) = \hat{\mu}, \quad -(u^0_{xx} + \varphi^0_x) = \hat{f} \quad \text{в} \ \ (0, y), \\ U^0(0) = u^0(0) = \varphi^0(0) = 0, \qquad U^0_x(y) = \varphi^0_x(y) = (u^0_x + \varphi^0)(y) = 0, \\ -U^0_{xx} = \hat{g}, \quad l\varphi^0_{xx} - (u^0_x + \varphi^0) = \hat{\mu}, \quad -(u^0_{xx} + \varphi^0_x) = \hat{f} \quad \text{в} \ \ (y, 1), \\ U^0(1) = u^0(1) = \varphi^0(1) = 0, \qquad U^0_x(y) = \varphi^0_x(y) = (u^0_x + \varphi^0)(y) = 0. \end{gathered}$$

Заметим, что $\boldsymbol{\xi}^0$ есть решение задачи о балке с разрезом, на котором не ставятся условия непроникания, а края предполагаются свободными.

Введем следующие константы: $\delta = 12h^2$, $\lambda = 4h^2 + \big(1 + 12l\big)\,\mathrm{tg}^2\,\alpha$. Решив задачу (24), можно вычислить значения

$$\rho^{\pm} = [U^0] + [u^0]\,\mathrm{tg}\,\alpha \pm h[\varphi^0], \qquad r^{\pm} = [U^0] + [u^0]\,\mathrm{tg}\,\alpha \pm (h\lambda/\delta)[\varphi^0].$$

Рассмотрим вспомогательные функции

$$\theta(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (0, y), \\ (x - 1)^2, & x \in (y, 1), \end{cases} \qquad \theta_x(x) = \begin{cases} 2x, & x \in (0, y), \\ 2(x - 1), & x \in (y, 1), \end{cases}$$

$$\beta(x) = \begin{cases} 2x^3 - 3x^2, & x \in (0, y), \\ 2x^3 - 3x^2 + 1, & x \in (y, 1). \end{cases}$$

Заметим, что функции θ, θ_x β, β_x принадлежат пространству $C^\infty(\Omega_y)$ и при $x=0$, $x=1$ равны нулю. Кроме того, справедливы следующие соотношения:

$$\theta_{xx}(x)\equiv 2,\quad \theta_{xxx}(x)\equiv 0,\quad [\theta]=0,\quad [\theta_x]=-2,\quad \beta_x(x)=6(x^2-x),\quad [\beta_x]=0,$$
$$\beta_{xx}(x)=6(2x-1),\quad \beta_{xxx}(x)\equiv 12,\quad \beta_{xxxx}(x)\equiv 0,\quad [\beta]=1,\quad \beta_{xx}(y)=0.$$

Теорема 2. *Функция* $\boldsymbol{\xi}=(U,u,\varphi)$, *определенная равенствами* $U(x)=U^0(x)+2h^2A\theta_x(x)$, $\varphi(x)=\varphi^0(x)+6hB\theta_x(x)+\operatorname{tg}\alpha A\beta_x(x)$, $u(x)=u^0(x)-6hB\theta(x)-\operatorname{tg}\alpha A\beta(x)+6l\operatorname{tg}\alpha A\theta_x(x)$, *является решением вариационного неравенства* (19), *где*

$$(A,B)=\begin{cases}(0,0), & \rho^+\geqslant 0,\quad \rho^-\geqslant 0,\\ (\delta+\lambda)^{-1}(\rho^+,\rho^+), & \rho^+<0,\quad r^-\geqslant 0,\\ (\delta+\lambda)^{-1}(\rho^-,-\rho^-), & \rho^-<0,\quad r^+\geqslant 0,\\ ((2\lambda)^{-1}(\rho^++\rho^-),(2\delta)^{-1}(\rho^+-\rho^-)), & r^+<0,\quad r^-<0.\end{cases} \tag{25}$$

Доказательство. Достаточно проверить выполнение соотношений (20)–(23). Действительно, в силу свойств функций θ, β, $\boldsymbol{\xi}^0$ имеем

$$-U_{xx}=-U^0_{xx}-2h^2A\theta_{xxx}=\hat g\quad \text{в } \Omega_y.$$

Так как имеют место равенства

$$\varphi_{xx}(x)=\varphi^0_{xx}(x)+6hB\theta_{xxx}(x)+A\operatorname{tg}\alpha\,\beta_{xxx}(x)=\varphi^0_{xx}(x)+12A\operatorname{tg}\alpha;$$
$$u_x+\varphi=u^0_x+\varphi^0+6lA\operatorname{tg}\alpha\,\theta_{xx}(x)=u^0_x+\varphi^0+12lA\operatorname{tg}\alpha, \tag{26}$$

то выполнено также второе уравнение в (20). В силу равенства (26) имеем $u_{xx}+\varphi_x=u^0_{xx}+\varphi^0_x$, откуда следует последнее уравнение в (20). Вычислим следующие значения построенных функций:

$$U_x(y)=U^0_x(y)+2h^2A\theta_{xx}(y)=4h^2A,$$
$$\varphi_x(y)=\varphi^0_x(y)+6hB\theta_{xx}(y)+A\operatorname{tg}\alpha\,\beta_{xx}(y)=12hB, \tag{27}$$
$$(u_x+\varphi)(y)=(u^0_x+\varphi^0)(y)+6lA\operatorname{tg}\alpha\,\theta_{xx}(y)=12lA\operatorname{tg}\alpha.$$

Очевидно, что $[U_x]=[\varphi_x]=[u_x+\varphi]=0$. Из (27) следует

$$U_x(y)\pm(h/3)\varphi_x(y)=4h^2(A\pm B),\qquad ES\,U_x(y)\operatorname{tg}\alpha=GkS(u_x+\varphi)(y).$$

По построению $[U]=[U^0]-4h^2A$, $[u]=[u^0]-(1+12l)A\operatorname{tg}\alpha$, $[\varphi]=[\varphi^0]-12hB$. Следовательно,

$$[U]+[u]\operatorname{tg}\alpha\pm h[\varphi]=\rho^\pm-\lambda A\mp\delta B.$$

Таким образом, осталось проверить соотношения (22), которые принимают вид

$$\rho^+\geqslant\lambda A+\delta B,\qquad \rho^-\geqslant\lambda A-\delta B,\qquad -A\geqslant|B|,$$
$$(A+B)(\rho^+-\lambda A-\delta B)=0,\qquad (A-B)(\rho^--\lambda A+\delta B)=0.$$

Рассматривая следующие четыре возможных варианта:

1) $A+B=0,\quad A-B=0,\quad \rho^+-\lambda A-\delta B\geqslant 0,\quad \rho^--\lambda A+\delta B\geqslant 0;$

2) $A+B<0,\quad A-B=0,\quad \rho^+-\lambda A-\delta B=0,\quad \rho^--\lambda A+\delta B\geqslant 0;$

3) $A+B=0,\quad A-B<0,\quad \rho^+-\lambda A-\delta B\geqslant 0,\quad \rho^--\lambda A+\delta B=0;$

4) $A+B<0,\quad A-B<0,\quad \rho^+-\lambda A-\delta B=0,\quad \rho^--\lambda A+\delta B=0,$

находим подходящие значения A и B. Заметим, что функция $\boldsymbol{\xi}^0 = (U^0, u^0, \varphi^0)$ однозначно определяет величины ρ^+, ρ^-, r^+, r^- и значения пары чисел (A, B). Теорема доказана.

Замечание 2. Нетрудно показать, что в силу отмеченной гладкости функций $\boldsymbol{\xi}^0, \theta, \beta$ решение $\boldsymbol{\xi}$ принадлежит пространству $H^2(\Omega_y)^3 \cap H(\Omega_y)$.

Замечание 3. Решив задачу (20)–(23), можно вычислить остальные физические характеристики задачи. При этом функции для напряжений, моментов и поперечных сил:

$$\sigma(x) = ES\,U_x(x) = ES(U_x^0(x) + 4h^2A),$$
$$m(x) = EI\,\varphi_x(x) = EI(\varphi_x^0(x) + 12hB + 6A(2x-1)\operatorname{tg}\alpha),$$
$$q(x) = GkS(u_x + \varphi)(x) = GkS(u_x^0 + \varphi^0)(x) + 12EI\,A\operatorname{tg}\alpha$$

являются непрерывными в области $(0, 1)$.

Рассмотрим частные случаи, следующие из теоремы 2. Пусть $\alpha = 0$, т. е. имеет место вертикальный разрез. С использованием прежнего обозначения для решения $\boldsymbol{\xi}^0 = (U^0, u^0, \varphi^0)$ вспомогательной задачи (24) при $\alpha = 0$ соответствующая краевая задача (20)–(23) принимает вид

$$\begin{gathered} -ES\,U_{xx} = g, \quad EI\,\varphi_{xx} - GkS(u_x + \varphi) = \mu, \quad -GkS(u_{xx} + \varphi_x) = f \quad \text{в} \ \Omega_y, \\ [U_x] = [\varphi_x] = 0, \quad (u_x + \varphi)(y) = 0, \quad [U] \geqslant h|[\varphi]|, \quad -U_x(y) \geqslant h|\varphi_x(y)|/3, \\ (U_x(y) + h\varphi_x(y)/3)([U] + h[\varphi]) = 0, \qquad (U_x(y) - h\varphi_x(y)/3)([U] - h[\varphi]) = 0, \\ U(0) = u(0) = \varphi(0) = U(1) = u(1) = \varphi(1) = 0. \end{gathered} \tag{28}$$

В частном случае для $\rho^\pm$ и $r^\pm$ имеем равенства $\rho^\pm = [U^0] \pm h[\varphi^0]$, $r^\pm = [U^0] \pm h[\varphi^0]/3$. Из теоремы 2 вытекает

Следствие 1. *Функция $\boldsymbol{\xi} = (U, u, \varphi)$, где $U(x) = U^0(x) + (A/2)\theta_x(x)$; $\varphi(x) = \varphi^0(x) + 3B\theta_x(x)/(2h)$; $u(x) = u^0(x) - 3B\theta(x)/(2h)$, является решением задачи (28). Постоянные A и B находятся по соотношениям*

$$(A, B) = \begin{cases} (0, 0), & \rho^+ \geqslant 0, \quad \rho^- \geqslant 0, \\ (\rho^+, \rho^+)/4, & \rho^+ < 0, \quad r^- \geqslant 0, \\ (\rho^-, -\rho^-)/4, & \rho^- < 0, \quad r^+ \geqslant 0, \\ ((\rho^+ + \rho^-)/2, (\rho^+ - \rho^-)/6), & r^+ < 0, \quad r^- < 0. \end{cases}$$

Пусть вертикальные нагрузки и моменты отсутствуют, т. е. $f(x) \equiv 0$, $\mu(x) \equiv 0$. Тогда $u^0(x) \equiv \varphi^0(x) \equiv 0$. Следовательно, $\rho^+ = \rho^- = r^+ = r^- = [U^0]$, $B = 0$, и справедливо

Следствие 2. *Пусть $f \equiv \mu \equiv 0$. Тогда при $[U^0] \geqslant 0$ решение $\boldsymbol{\xi}^0 = (U^0, u^0, \varphi^0)$ задачи (24) является также решением (19), т. е. $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^0$; при $[U^0] \leqslant 0$ решение $\boldsymbol{\xi} = (U, u, \varphi)$ находится по формулам $U(x) = U^0(x) + \lambda^{-1}2h^2[U^0]\theta_x(x)$, $\varphi(x) = \lambda^{-1}\operatorname{tg}\alpha\,[U^0]\beta_x(x)$, $u(x) = -\lambda^{-1}(\operatorname{tg}\alpha\,[U^0]\beta(x) - 6l\operatorname{tg}\alpha\,[U^0]\theta_x(x))$.*

Таким образом, наличие только горизонтальных нагрузок g не обусловливает равенство нулю значений φ и u. При $\alpha = 0$ из равенств $f \equiv 0$, $\mu \equiv 0$ следует, что $\varphi \equiv u \equiv 0$.

Рассмотрим следующий пример. Пусть $f(x) \equiv \mu(x) \equiv 0$ и

$$g(x) = \begin{cases} c, & x \in (0, 1/2), \\ -c, & x \in (1/2, 1). \end{cases}$$

При этом значения $c \geqslant 0$ соответствуют сжатию. Функцию $U^0 = x(1-x)g(x)/(2ES)$ можно записать в явном виде. Скачок этой функции $[U^0] = -c/(4ES) \leqslant 0$ неположителен. Согласно следствию 2 находим решение вариационного неравенства (19) в виде $\boldsymbol{\xi} = (U, u, \varphi)$, где

$$U(x) = \frac{c}{2ES} \begin{cases} -x^2 + (1 - \delta/(6\lambda))x, & x \in (0, 1/2), \\ x^2 - (1 + \delta/(6\lambda))x + \delta/(6\lambda), & x \in (1/2, 1), \end{cases}$$

$$\varphi(x) = -\frac{c\,\mathrm{tg}\,\alpha}{4ES\lambda}\,6(x^2 - x), \qquad x \in (0,1),$$

$$u(x) = \frac{c\,\mathrm{tg}\,\alpha}{4ES\lambda}\begin{cases} 2x^3 - 3x^2 - 12lx, & x \in (0,1/2), \\ 2x^3 - 3x^2 + 1 - 12l(x-1), & x \in (1/2,1). \end{cases}$$

При этом $[u] = c(12l+1)\,\mathrm{tg}\,\alpha/(4Eh\lambda)^{-1}$. В случае растяжения ($c < 0$) получаем $[U^0] > 0$. Тогда согласно следствию 2 $U(x) = U^0(x)$ и $u(x) \equiv \varphi(x) \equiv 0$.

Таким образом, в работе продолжены исследования пластин и балок с наклонными трещинами. Ранее эти исследования были проведены для моделей пластин Кирхгофа — Лява и балок Бернулли — Эйлера [7, 8]. В настоящей работе рассмотрены пластины и балки Тимошенко, содержащие наклонные трещины. Получены соотношения, описывающие контакт противоположных берегов трещины. При условии достаточной гладкости решения задачи минимизации в исходной вариационной постановке сформулирована эквивалентная постановка в виде краевой задачи. Для одномерного случая (балка с разрезом) получено аналитическое решение и исследованы его свойства.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Амбарцумян С. А.** Теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1987.
2. **Панасюк В. В.** Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацышин. Киев: Наук. думка, 1976.
3. **Осадчук В. А.** Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами. Киев: Наук. думка, 1985.
4. **Морозов Н. Ф.** Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984.
5. **Шацкий И. П., Маковийчук Н. В.** Влияние закрытия коллинеарных трещин на напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие изгибаемых пологих оболочек // ПМТФ. 2011. Т. 52, № 3. С. 159–166.
6. **Хлуднев А. М.** Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.
7. **Хлуднев А. М.** Задача о равновесии упругой пластины, содержащей наклонную трещину // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 5. С. 117–121.
8. **Ковтуненко В. А., Леонтьев А. Н., Хлуднев А. М.** Задача о равновесии пластины с наклонным разрезом // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 2. С. 164–174.
9. **Лазарев Н. П.** Задача о равновесии пологой оболочки Тимошенко, содержащей сквозную трещину // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 15, № 3. С. 58–69.
10. **Лазарев Н. П.** Итерационный метод штрафа для нелинейной задачи о равновесии пластины Тимошенко, содержащей трещину // Сиб. журн. вычисл. математики. 2011. Т. 14, № 4. С. 381–392.
11. **Рудой Е. М.** Инвариантные интегралы в плоской задаче теории упругости для тел с жесткими включениями и трещинами // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 15, № 1. С. 99–109.
12. **Khludnev A., Leugering G., Specovius-Neugebauer M.** Optimal control of inclusion and crack shapes in elastic bodies // J. Optim. Theory Appl. 2012. V. 155, N 1. P. 54–78.
13. **Пелех Б. Л.** Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев: Наук. думка, 1973.
14. **Васидзу К.** Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987.

Поступила в редакцию 8/II 2013 г.