

ной области, когда относительное донное давление \bar{p}_d не зависит от \bar{p}_0 . В случае одиночной струи такой режим возникает только при $H \leq 4,9$ за счет «бокового» взаимодействия с горизонтальным экраном недорасширенной струи. Дальнейшему расширению струи препятствует сильный косой скачок уплотнения. При этом происходит изоляция донной области от влияния условий, имеющих место вниз по потоку.

При течении двух струй закрытая донная область реализуется и для больших \bar{H} . Появление закрытой донной области при $\bar{H} = 10,9$ подтверждается как наличием участка $\bar{p}_d = \text{const}$ на зависимости $\bar{p}_d(\bar{p}_0)$, так и распределением относительного статического давления $\bar{p} = p/p_0$ вдоль створки сопла, которое на данном режиме не зависит от \bar{p}_0 . Образование закрытой донной области при больших расстояниях между соплами ($l/H > 1,67$) происходит в результате взаимодействия сверхзвукового участка струи со створкой сопла, при малых l — из-за взаимодействия друг с другом сверхзвуковых участков обеих струй. После заширания донная область окружена сверхзвуковым потоком, давление в ней не зависит от давления в окружающем пространстве и изменяется пропорционально полному давлению струи p_0 . Величина \bar{p}_0^+ возрастает с уменьшением \bar{l} согласно эмпирической зависимости $\bar{p}_0^+ = 8,01/\bar{l}^{0,13}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Теория турбулентных струй/Абрамович Г. Н., Гиршович Т. А., Крашенинников С. Ю. и др.— 2-е изд., перераб. и доп./Под ред. Г. Н. Абрамовича.— М.: Наука, 1984.
2. Газодинамика сверхзвуковых неизобарических струй/Авдуревский В. С., Ашратов Э. А., Иванов А. В. и др.— М.: Машиностроение, 1989.
3. Швец А. И., Швец И. Т. Газодинамика ближнего следа.— Киев: Наук. думка, 1976.
4. Коваль М. А., Швец А. И. Экспериментальное исследование звуковых и сверхзвуковых кольцевых струй // ПМТФ.— 1974.— № 4.
5. Назарчук М. М., Панченко В. Н. Ограниченные струи.— Киев: Наук. думка, 1981.
6. Лебедева Л. Н., Филатов В. В. Исследование звуковой недорасширенной струи, истекающей из щели вдоль твердой поверхности // Изв. вузов. Авиац. техника.— 1983.— № 3.
7. Борисов Ю. Я., Подольский С. А. Длина бочки кольцевой недорасширенной струи, истекающей из звукового сопла, имеющего на осп цилиндрический стержень // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1980.— № 4.
8. Зайцев Е. Г. Влияние смещения вдоль осп сопел высоконапорного газа на изменение условий заширания эжектора // Тр. ЦАГИ.— 1989.— Вып. 2458.
9. Sheeran W. J., Dasanjh D. S. Observation of jet flows from a two-dimensional underexpanded sonic nozzle // AIAA J.— 1968.— V. 6, N 3. Рус. пер. Исследование струи, истекающей из двумерного недорасширенного звукового сопла // РТК.— 1968.— Т. 6, № 3.

г. Жуковский

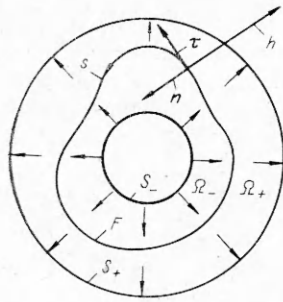
Поступила 21/1 1991 г.

УДК 532.5 : 541.64

Г. В. Жижин, А. С. Сегаль

О ВЛИЯНИИ ТЕПЛОВЫХ ЭФФЕКТОВ НА ГИДРОДИНАМИЧЕСКУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ ФРОНТА ПОЛИМЕРИЗАЦИИ

При исследовании устойчивости фронтов химических реакций обычно выделяют два аспекта: диффузионно-тепловую и гидродинамическую устойчивость [1]. Диффузионно-тепловая устойчивость анализируется в предположении, что возмущения формы фронта не сопровождаются возмущениями гидродинамических полей в его окрестности [2], гидродинамическая устойчивость — в предположении, что, наоборот, не возникает возмущений концентрационных и тепловых полей [3]. Последнее



допущение оправдано, если толщина фронта δ пренебрежимо мала в сравнении с длиной волны возмущения λ (нулевое приближение по малому параметру $\varepsilon = \delta/\lambda$). Для коротковолновых возмущений ($\delta \sim \lambda$) необходимо учитывать совместное протекание диффузионно-тепловых и гидродинамических процессов. Наиболее последовательно такой учет проводится в [4] применительно к плоскому фронту в газовой фазе. Анализ ограничивается первым приближением по ε , используется асимптотический метод решения син-

гулярно возмущенных задач с поверхностью разрыва, разработанный в [5].

Проблема создания непрерывного технологического процесса получения полимерных материалов на основе явления фронтальной полимеризации [6] приводит к постановке задачи об устойчивости стационарных цилиндрического и сферического фронтов полимеризации в радиальных потоках. Существенным эффектом полимеризации является сильное увеличение вязкости среды, поэтому основной интерес в данном случае вызывает гидродинамическая устойчивость, проанализированная в [7, 8]. Тепловая устойчивость, исследованная в [9] для цилиндрического фронта, не связана с какими-либо новыми физическими эффектами по сравнению с [2].

В настоящей работе рассматривается устойчивость стационарного цилиндрического фронта в радиальном потоке с учетом взаимного влияния тепловых и гидродинамических эффектов. Анализ проводится в первом приближении по ε методом сращиваемых асимптотических разложений, при этом в отличие от [4] используется методически удобный прием перехода в подвижную криволинейную систему естественных координат, связанных с фронтом [10]. Найдены поправки первого порядка по ε к решению, полученному в [7], проанализировано их влияние на устойчивость фронта.

1. Ограничимся случаем угловых возмущений цилиндрического фронта, при этом в сечении, нормальном к оси фронта, задача может быть рассмотрена как плоская. Пусть замкнутый фронт F расположен между двумя проницаемыми коаксиальными цилиндрическими поверхностями S_- и S_+ и распространяется в направлении нормали \mathbf{n} навстречу потоку (внутренняя подача среды), области Ω_- и Ω_+ заполнены исходной смесью и конечным продуктом (см. рисунок). Следуя [2, 4], задачу решаем в нулевом приближении по малому параметру Франк-Каменецкого $\beta = \bar{R}T_r/E$ (\bar{R} — универсальная газовая постоянная, T_r — температура в зоне реакции, E — эффективная энергия активации реакции). При этом зона реакции рассматривается как поверхность разрыва конверсии и, следовательно, вязкости; в дальнейшем она отождествляется с фронтом. Зависимость вязкости от температуры не учитывается, прочие теплофизические параметры среды полагаются постоянными.

Тогда течение в областях Ω_- и Ω_+ описывается уравнениями Стокса и неразрывности [7, 8]:

$$(1.1) \quad \nabla p_{\pm} = \mu_+ \nabla^2 \mathbf{V}_{\pm}, \quad \nabla \cdot \mathbf{V}_{\pm} = 0$$

(p — давление, \mathbf{V} — вектор скорости, μ — коэффициент динамической вязкости, ∇ — векторный дифференциальный оператор). Заметим, что число Рейнольдса $Re_{\pm} = R_0 U / \nu_{\pm}$, построенное по радиусу невозмущенного фронта R_0 , нормальной скорости его распространения относительно среды U и коэффициенту кинематической вязкости среды ν , мало только в области Ω_+ , занятой высоковязким продуктом, в области Ω_- оно может быть сравнимо с единицей. Однако, как показано в [7, 8], в последнем случае движение возмущенного фронта перестает зависеть от маловязкой исходной смеси, и результаты, полученные с использованием уравнений (1.1), остаются в силе.

На фронте F в силу несжимаемости среды и условия «слипания» потоков выполняется неразрывность векторов скорости и напряжения

$$(1.2) \quad \mathbf{V}_- = \mathbf{V}_+, \mathbf{P}_{n-} = \mathbf{P}_{n+}.$$

Гидравлические сопротивления граничных поверхностей S_- и S_+ полагаются линейными, так что на них выполняются условия

$$(1.3) \quad p_{\pm} - \bar{p}_{\pm} = \pm \sigma_{\pm} V_{n+}, \mathbf{V}_{\tau+} = 0,$$

где \bar{p}_{\pm} — давления вне реакционного объема (за границами S_{\pm} соответственно); σ_{\pm} — коэффициенты, которые можно назвать локальными гидравлическими сопротивлениями граничных поверхностей.

Уравнения (1.1) дополняются также начальной формой фронта, однако постановка задачи остается незамкнутой: для ее замыкания необходимо задать условие движения фронта относительно среды. С этой целью обратимся к анализу внутренней диффузионно-тепловой структуры фронта.

Как известно, в газовой фазе все коэффициенты переноса совпадают по порядку величины ($D \sim \kappa \sim \nu$, D — коэффициент диффузии, а κ — температуропроводности), при этом процессы переноса сосредоточиваются и взаимодействуют в зоне подогрева перед фронтом толщиной порядка $\delta \sim \kappa/U$.

В конденсированной фазе, как правило, $D \ll \kappa \ll \nu$ и толщина зоны влияния диффузионных эффектов $\delta_D \sim D/U$ существенно меньше, а толщина зоны влияния вязких эффектов $\delta_{v\pm} \sim \nu_{\pm}/U$ существенно больше толщины зоны подогрева δ . В случае полимеризации δ_D намного меньше не только δ , но и толщины зоны реакции $\delta_r \sim \beta\delta$, диффузией при этом можно пренебречь [11]. Значения δ_v в силу резкого увеличения вязкости среды на фронте различны для областей Ω_- и Ω_+ . В частности, δ_{v+} существенно превосходит не только δ , но и радиус невозмущенного фронта R_0 , который играет роль характерного геометрического масштаба задачи ($Re_+ = R_0/\delta_{v+} = R_0U/\nu_+ \ll 1$). Величина δ_{v-} больше или сравнима с R_0 ($Re_- = R_0/\delta_{v-} = R_0U/\nu_- \leq 1$), в обоих случаях вязкие эффекты не сосредоточиваются в узкой области, а распространяются на всю область течения. Если длина волны возмущения имеет масштаб R_0 , то δ_{v-} служит также масштабом неоднородности поля скорости.

Неоднородность поля температуры T , возникающая на границе S_- и на фронте F , сносится вниз по потоку; пространственным масштабом этой неоднородности во всех направлениях служит R_0 (внешний масштаб). Одновременно неоднородность, возникающая на фронте F и границе S_+ , переносится теплопроводностью вверх по потоку и «прижимается» потоком к соответствующим поверхностям, формируя в их окрестности температурные пограничные слои с пространственными масштабами R_0 в касательном направлении и δ — в нормальном (внутренний масштаб). Два пространственных масштаба неоднородности температурного поля порождают два временных масштаба: быстрый $[t]_1 = \delta/U \sim \kappa/U^2$, определяющий время распространения фронта на расстояние порядка его толщины, и медленный $[t]_2 = R_0/U$, связанный с изменением формы фронта.

Поскольку распределение температуры во внутреннем масштабе как бы привязано к фронту, для его анализа удобно использовать подвижную криволинейную систему естественных координат (h, s) , связанных с фронтом (см. рисунок). В этой системе нестационарность, очевидно, связана только с изменением формы фронта, поэтому сохраняется единственный временной масштаб $[t]_2 = R_0/U$.

Масштабы остальных переменных выбираются в соответствии со структурой температурного поля: $[h] = \delta$, $[R] = R_0$, $[V_h] = [V_s] = U$, $[T] = Q/c$ (R — локальный радиус кривизны фронта F , Q — тепловой эффект реакции, c — теплоемкость среды).

Не останавливаясь на довольно громоздкой технике перехода к координатам (h, s) , приведем уравнение теплопроводности в этих координатах

в безразмерных переменных, отвечающих введенным масштабам (обозначаются так же, как их размерные аналоги):

$$(1.4) \quad \varepsilon \frac{\partial T_{i\pm}}{\partial t} + (W + V_h) \frac{\partial T_{i\pm}}{\partial h} + \varepsilon \left[V_s - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon h/R} \frac{\partial}{\partial s} \left(\mathbf{g} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \right) \right] \frac{\partial T_{i\pm}}{\partial s} = \\ = \frac{1}{1 + \varepsilon h/R} \frac{\partial}{\partial h} \left[(1 + \varepsilon h/R) \frac{\partial T_{i\pm}}{\partial h} \right] + \frac{\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon h/R)^2} \frac{\partial^2 T_{i\pm}}{\partial s^2}.$$

Здесь $T_{i\pm} = T_{i\pm}(h, s, t)$ — распределение температуры во внутреннем масштабе; $\mathbf{f} = \mathbf{f}(s, t)$ — вектор, осуществляющий «естественное» задание формы фронта; $\mathbf{g} = \mathbf{f} - \mathbf{r}$ — вектор, соединяющий произвольную точку, заданную радиусом-вектором \mathbf{r} , и «текущую» точку фронта, заданную вектором \mathbf{f} ; $W = (\partial \mathbf{f} / \partial t) \cdot \mathbf{n}$ — нормальная скорость фронта относительно неподвижной системы координат; $\varepsilon = \delta / R_0 \sim \kappa / UR_0 = 1 / \text{Pe}$ — малый параметр, имеющий смысл величины, обратной числу Пекле.

На фронте F во внутреннем масштабе непрерывны температура и полный поток энергии, а кондуктивный поток испытывает разрыв, величина которого находится из распределения температуры в зоне реакции в нулевом приближении по β [2, 4]. В случае простейшей брутто-кинетики процесса с аррениусовской реакцией нулевого порядка имеем

$$(1.5) \quad T_{i-} = T_{i+} = T_r \quad (h = 0);$$

$$(1.6) \quad \partial T_{i-} / \partial h - \partial T_{i+} / \partial h = W + V_h \quad (h = 0);$$

$$(1.7) \quad \partial T_{i-} / \partial h - \partial T_{i+} / \partial h = K \exp(-A/2T_r) \quad (h = 0)$$

($K = (k\kappa)^{1/2} / U$, $A = Ec / \bar{R}Q$, k — предэкспонент). На большом удалении от фронта температура плавно выходит на постоянные значения

$$(1.8) \quad \partial T_{i\pm} / \partial h = 0 \quad (h = \pm \infty).$$

Во внешнем масштабе фронт рассматривается как поверхность разрыва температуры, нестационарность по-прежнему связана только с изменением формы фронта и сохраняется единственный временной масштаб $[t]_2 = R_0 / U$. Кроме того, здесь нет масштабного различия нормального и касательного к фронту направлений, так что имеется единственный пространственный масштаб $[\mathbf{r}] = R_0$. Масштабы остальных величин не изменяются, при этом уравнение теплопроводности в соответствующих безразмерных переменных приобретает вид

$$(1.9) \quad \partial T_{e\pm} / \partial t + \mathbf{V}_{\pm} \cdot \nabla T_{e\pm} = \varepsilon \nabla^2 T_{e\pm}$$

($T_{e\pm} = T_{e\pm}(\mathbf{r}, t)$ — распределение температуры во внешнем масштабе).

На границе S_- полагаем изотермический вход в реакционный объем

$$(1.10) \quad T_{e-}|_{S_-} = T_0,$$

условие на границе S_+ не конкретизируется*.

На фронте F совпадают температуры во внутреннем и внешнем масштабах:

$$(1.11) \quad T_{e\pm}|_F = T_{i\pm}|_{h=\pm\infty}.$$

Уравнения (1.4), (1.9) с граничными условиями (1.5)—(1.8), (1.10), (1.11) позволяют найти распределения температуры во внутреннем и внешнем масштабах и скорость фронта. Проделаем это в нулевом и первом приближении по ε .

* Заметим, что задание на границе S_- условий второго или третьего рода предполагает, что эта поверхность одновременно служит устройством, осуществляющим подвод реакционной среды и передачу тепла в нормальном к ней направлении. Такое совмещение технологических функций на практике затруднено, поэтому возможность регулирования устойчивости фронта посредством теплообмена на входе в реакционный объем представляется проблематичной. В настоящей работе этот круг вопросов не рассматривается.

2. Разложим зависимые переменные в ряды по ε :

$$(2.1) \quad T_{i\pm} = T_{i\pm}^0 + \varepsilon T_{i\pm}^1 + \dots, \quad T_{e\pm} = T_{e\pm}^0 + \varepsilon T_{e\pm}^1 + \dots, \quad W = \bar{W}^0 + \varepsilon W^1 + \dots$$

Кроме того, во внутреннем масштабе разложим вектор скорости в ряд Тейлора по координате h в окрестности фронта. Поскольку пространственным масштабом неоднородности поля скорости во всех направлениях служит R_0 , в безразмерных переменных имеем

$$(2.2) \quad \mathbf{V}_+ = \mathbf{V}_+ \Big|_{h=0} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{V}_+}{\partial h} \Big|_{h=0} h + \dots$$

Подставляя эти разложения в (1.1)–(1.11) и сохраняя члены одного порядка по ε , получим постановку задачи в соответствующем приближении. В нулевом приближении

$$(2.3) \quad \partial^2 T_{i+}^0 / \partial h^2 - U^0 \partial T_{i+}^0 / \partial h = 0;$$

$$(2.4) \quad \partial T_{i\pm}^0 / \partial h = 0 \quad (h = \pm \infty);$$

$$(2.5) \quad T_{i-}^0 = T_{i+}^0 = T_r^0, \quad \partial T_{i-}^0 / \partial h - \partial T_{i+}^0 / \partial h = U^0, \\ \partial T_{i-}^0 / \partial h - \partial T_{i+}^0 / \partial h = K \exp(-A/2T_r^0) \quad (h = 0);$$

$$(2.6) \quad \partial T_{e\pm}^0 / \partial t - \mathbf{V}_\pm \cdot \nabla T_{e\pm}^0 = 0;$$

$$(2.7) \quad T_{e-}^0 \Big|_{s_-} = T_0;$$

$$(2.8) \quad T_{e\pm}^0 \Big|_F = T_{i\pm}^0 \Big|_{h=\pm\infty}$$

($U^0 = W^0 + V_h \Big|_{h=0}$ — нормальная скорость фронта относительно среды в нулевом приближении).

Из (2.6), (2.7) находим $T_{e-}^0 = T_0$, т. е. в области $\bar{\Omega}$ во внешнем масштабе в нулевом приближении течение изотермическое. Из (2.8) имеем $T_{i-}^0 \Big|_{h=-\infty} = T_0$; интегрируя (2.3) с учетом последнего равенства, а также условия (2.4) и первых двух из условий (2.5), получаем распределение температуры во внутреннем масштабе в нулевом приближении:

$$(2.9) \quad T_{i-}^0 = T_0 + (T_r^0 - T_0) e^{U^0 h}, \quad T_{i+}^0 = T_r^0 = \text{const}(h).$$

Подставляя последние равенства в оставшееся из условий (2.5), находим

$$(2.10) \quad T_r^0 = T_0 + 1 = T_m, \quad U^0 = K \exp(-A/2T_m) = 1,$$

где T_m — температура адиабатического прохождения реакции (последнее равенство в (2.10) вытекает из выражения для скорости U плоского фронта в неподвижной среде при использованной простейшей кинетике [1]). Соотношения (2.9), (2.10) показывают, что в нулевом приближении «внутренняя» тепловая структура фронта не искажается по сравнению с плоским фронтом в неподвижной среде.

— Из (2.6), (2.8) находим $T_{e+}^0 = T_0 + 1 = T_m$, т. е. течение в области Ω_+ во внешнем масштабе в нулевом приближении также изотермическое.

Условие на границе S_+ определяет формирование температурного пограничного слоя в окрестности этой поверхности. Вне этого слоя температурное поле определяется конвективным переносом тепла из областей, расположенных выше по потоку, поэтому условие на S_+ не понадобилось.

В первом приближении с учетом решения, найденного в нулевом приближении, постановка задачи выглядит следующим образом:

$$(2.11) \quad \frac{\partial^2 T_{i\pm}^1}{\partial h^2} - U^0 \frac{\partial T_{i\pm}^1}{\partial h} = \left(h \frac{\partial V_h}{\partial h} \Big|_{h=0} + U^1 - \frac{1}{R} \right) e^h,$$

$$(2.12) \quad \partial T_{i\pm}^1 / \partial h = 0 \quad (h = \pm \infty);$$

$$(2.13) \quad T_{i-}^1 = T_{i+}^1 = T_r^1, \quad \partial T_{i-}^1 / \partial h - \partial T_{i+}^1 / \partial h = U^1,$$

$$\partial T_{i-}^1 / \partial h - \partial T_{i+}^1 / \partial h = Z T_r^1 \quad (h=0); \quad (2.14)$$

$$\partial T_{e\pm}^1 / \partial t + \mathbf{V}_{\pm} \cdot \nabla T_{e\pm}^1 = 0; \quad (2.15)$$

$$T_{e-}^1 |_{S-} = 0; \quad (2.16)$$

$$T_{e\pm}^1 |_F = T_{i\pm}^1 |_{h=\pm\infty}.$$

Здесь $U^1 = W^1$ — поправка первого порядка к нормальной скорости фронта; $Z = A/2T_m^2$ — число Зельдовича (в размерных переменных $Z = E(T_m - T_0)/2\bar{R}T_m^2$).

После преобразований получим решение задачи в первом приближении

$$T_{i-}^1 = \left[\frac{1}{2} \frac{\partial V_h}{\partial h} \Big|_{h=0} h^2 + \left(U^1 - \frac{1}{R} - \frac{\partial V_h}{\partial h} \Big|_{h=0} \right) h + T_r^1 \right] e^h, \quad (2.17)$$

$$T_{i+}^1 = T_r^1 = \text{const}(h);$$

$$T_r^1 = 1/R + (\partial V_h / \partial h)_{h=0}, \quad U^1 = Z T_r^1. \quad (2.18)$$

Кроме того, $T_{e-}^1 = 0$, а поле T_{e+}^1 находится из уравнения (2.14) с граничным условием $T_{e+}^1 |_F = T_r^1$. Таким образом, во внешнем масштабе в первом приближении в области Ω_- течение остается изотермическим, а в области Ω_+ появляются поправки для распределения температуры. Аналогичные поправки возникают для распределения температуры во внутреннем масштабе и для скорости фронта.

Используя последние из равенств (2.10), (2.18), найдем нормальную скорость фронта относительно неподвижной системы координат. Возвращаясь к размерным переменным, в нулевом и первом приближении соответственно получим

$$W = V_n |_F + U; \quad (2.19)$$

$$W = V_n |_F + U + \kappa Z \left(\frac{1}{R} + \frac{\partial V_n}{\partial n} \Big|_F \frac{1}{U} \right) \quad (2.20)$$

(V_n — проекция локальной скорости потока на нормаль к фронту, $\partial/\partial n$ — производная в этом направлении).

Соотношение (2.20) показывает, что поправки первого порядка для нормальной скорости фронта связаны с его кривизной и с неоднородностью поля скорости, они совпадают с известными поправкой Маркштейна и поправкой на «стретч-эффект» [1, 13]. В силу квазистационарности уравнений Стокса и неразрывности (1.1) эти поправки полностью определяются формой фронта в заданный момент времени (если бы в уравнениях движения среды учитывались инерционные члены, то поправка на «стретч-эффект», содержащая производную $\partial V_n / \partial n$, зависела бы также от предьстории движения фронта).

Условия (2.19) или (2.20) замыкают постановку задачи об устойчивости фронта (1.1)–(1.3) в нулевом и первом приближении соответственно. Нулевое приближение исследовано в [7], здесь изучим влияние поправок первого порядка.

3. Сначала рассмотрим стационарные состояния фронта и их устойчивость к возмущениям его радиуса, не сопровождающимся возмущениями его цилиндрической формы (нулевая мода). Учитывая, что в $W = -dR/dt$, $V_n |_F = -V_r(R)$, $(\partial V_n / \partial n)_F = (\partial V_r / \partial r)_{r=R} = -V_r(R)/R$, перепишем (2.19):

$$dR/dt = [V_r(R) - U](1 + \kappa Z/UR). \quad (3.1)$$

Из последнего соотношения имеем, что в стационарном состоянии радиус фронта определяется уравнением

$$V_r(R_0) = U \quad (3.2)$$

и, таким образом, не меняется по сравнению с нулевым приближением. Это связано с тем, что в данном случае эффекты, связанные с искривлением фронта и с неоднородностью поля скорости, компенсируют друг друга.

Полагая $R = R_0 + R'$ (R' — малое возмущение) и линеаризуя (3.1) относительно R' , найдем $dR'/dt = -\omega R'$, $R' \sim \exp(-\omega t)$, где

$$(3.3) \quad \omega = \omega^0 + \varepsilon \omega^1 + \dots, \quad \omega^0 = [dV_r(R)/dR]_{R=R_0}, \quad \omega^1 = Z\omega^0$$

(ω — инкремент возмущений). Из последнего соотношения имеем, что поправка первого порядка увеличивает абсолютное значение инкремента и не меняет его знака, поэтому все выводы об устойчивости фронта, полученные в нулевом приближении по ε [7], в первом приближении только усиливаются. В частности, при подаче среды с постоянным расходом q ($V_r(R) = q/2\pi R$, $\omega^0 = 2\pi U^2/q$) для единственного устойчивого стационарного состояния имеем $0 < \omega^0 < \omega$, так что возмущения в первом приближении по ε затухают быстрее, чем в нулевом.

В случае внешней подачи среды (на рисунке фронт F распространяется в направлении, противоположном нормали \mathbf{n} , но по-прежнему навстречу потоку, исходной смесью и конечным продуктом заполнены области Ω_+ и Ω_- соответственно) аналогичные расчеты приводят к поправке первого порядка для инкремента противоположного знака $\omega^1 = -Z\omega^0$. При этом абсолютная величина инкремента уменьшается и есть тенденция к изменению вывода об устойчивости фронта. В частности, при подаче среды с постоянным расходом ($V_r(R) = -q/2\pi R$, $\omega^0 = -2\pi U^2/q$) единственное неустойчивое стационарное состояние имеет тенденцию к стабилизации ($\omega^0 < \omega < 0$). Однако реально изменение знака ω может произойти только при малых радиусах кривизны фронта, сравнимых с его толщиной ($R_0 \sim \delta$). При этих значениях R_0 фронтальный режим прохождения реакции фактически вырождается и приближение первого порядка по ε перестает работать. Тем не менее, экстраполируя полученные результаты в область малых R_0 , найдем, что в случае внешней подачи среды с постоянным расходом стационарное состояние фронта становится устойчивым при

$$(3.4) \quad R_0 = R_0^* = Z\delta.$$

Последнее соотношение надо рассматривать как ориентировочное, точность его повышается при сильно активированной реакции, когда $Z \gg 1$ и $R_0 \gg \delta$.

4. Рассмотрим возмущения произвольной формы

$$(4.1) \quad \mathbf{V}_{\pm} = \mathbf{V}_{0\pm} + \mathbf{V}'_{\pm}, \quad p = p_{0\pm} + p'_{\pm}, \quad f = f_0 + f', \quad \mathbf{n} = \mathbf{n}_0 + \mathbf{n}', \quad W = W_0 + W',$$

где индексом 0 отмечены стационарные значения величин; штрихом — возмущения; f — функция, задающая форму фронта в цилиндрической системе координат: $r = f(\varphi, t)$ ($f_0 = R_0 = \text{const}(\varphi, t)$). Подставляя (4.1) в (1.1)—(1.3) и (2.19) или (2.20), линеаризуем нелинейные граничные условия на фронте относительно малых возмущений. При этом соотношение (2.19), отвечающее нулевому приближению по ε , принимает вид [7]

$$(4.2) \quad \partial f'/\partial t + (U/R_0)f' - V'_r = 0.$$

Остановимся на линеаризации поправок первого порядка к скорости фронта. В полярной системе координат для радиуса фронта имеем

$$1/R = [f^2 + 2(\partial f/\partial \varphi)^2 - f(\partial^2 f/\partial \varphi^2)]/[f^2 + (\partial f/\partial \varphi)^2]^{3/2}.$$

Подставляя в это выражение разложение (4.1) для f , после линеаризации находим

$$(4.3) \quad 1/R = 1/R_0 - f'/R_0^2 - (\partial^2 f'/\partial \varphi^2)/R_0^2 + \dots$$

Для линеаризации второй поправки удобно использовать следующее ее представление. Из уравнения неразрывности в естественных координатах (h, s) получим на фронте

$$\partial V_{h-}/\partial h + V_{h-}/R + \partial V_{s-}/\partial s = \partial V_{h+}/\partial h + V_{h+}/R + \partial V_{s+}/\partial s.$$

С другой стороны, из условия неразрывности вектора скорости на фронте следует, что $V_{h-} = V_{h+}$, $V_{s-} = V_{s+}$ и, значит, $\partial V_{s-}/\partial s = \partial V_{s+}/\partial s$, откуда $\partial V_{h-}/\partial h = \partial V_{h+}/\partial h = \partial V_n/\partial n$. Подставляя последнее равенство в соотношение $-p_- + 2\mu_-(\partial V_{h-}/\partial h) = -p_+ + 2\mu_+(\partial V_{h+}/\partial h)$, которое вытекает из условия неразрывности вектора напряжения на фронте, находим $(\partial V_n/\partial n)_F = (p_+ - p_-)/2\Delta\mu$ ($\Delta\mu = \mu_+ - \mu_-$). После подстановки разложения (4.1) для давления и линеаризации последнее равенство окончательно приобретает вид

$$(4.4) \quad (\partial V_n/\partial n)_F = [(p_{0+} - p_{0-}) + (p'_+ - p'_-)]/2\Delta\mu + \dots$$

Условие движения фронта (2.20), отвечающее первому приближению по ε , с учетом (4.2)–(4.4) запишем как

$$(4.5) \quad \frac{\partial f'}{\partial t} + \frac{U}{R_0}(1 + \varepsilon Z)f' + \frac{U}{R_0}\varepsilon Z \frac{\partial^2 f'}{\partial \varphi^2} - V_r' - \frac{1}{2} \frac{R_0}{\Delta\mu} \varepsilon Z (p'_+ - p'_-) = 0.$$

Остальные линеаризованные граничные условия и уравнения в первом приближении по ε не изменяются по сравнению с нулевым приближением. Не останавливаясь на технике нахождения инкремента возмущений, которая подробно изложена в [7], приведем результаты вычислений. Ограничимся случаем малого радиуса внутренней граничной поверхности S_- и большого радиуса внешней S_+ ($R_-/R_0 \rightarrow 0$, $R_+/R_0 \rightarrow \infty$ — фронт в поле осесимметричного гидродинамического источника). Тогда для инкремента имеем

$$(4.6) \quad \omega = \omega^0 + \varepsilon\omega^1 + \dots, \quad \omega^0 = U/R_0, \\ \omega^1 = Z[k^2 - 2k(1 - \alpha)/(1 + \alpha) + 1]U/R_0,$$

где $\alpha = \mu_-/\mu_+$; k — номер моды возмущения ($f' \sim \exp(-\omega t + ik\varphi)$, i — мнимая единица). Величина в квадратных скобках в (4.6) положительна, поэтому, как и для нулевой моды, для высших мод выполняется соотношение $0 < \omega^0 < \omega$, так что в первом приближении по ε возмущения затухают быстрее, чем в нулевом, и стабильность высших мод повышается. Значение ω^1 увеличивается с ростом k , т. е. возмущения высших мод затухают быстрее. В первом приближении по ε , таким образом, появляется дисперсия возмущений, которая отсутствовала в нулевом [7].

Аналогично в случае внешней подачи среды получим, что во втором равенстве для ω^0 в (4.6) знак меняется на противоположный, и, таким образом, $\omega^0 < \omega < 0$. При этом возмущения в первом приближении по ε развиваются медленнее, чем в нулевом, и есть тенденция к стабилизации неустойчивых высших мод. Однако, как и для нулевой моды, реально такая стабилизация может произойти только при малых радиусах фронта R_0 , сравнимых с его толщиной δ , когда фронтальный режим прохождения реакции вырождается и приближение первого порядка по ε перестает работать. Формально величину радиуса фронта, при которой происходит стабилизация фиксированной моды, находим, экстраполируя решение (4.6) в область малых R_0 :

$$(4.7) \quad R_0 = R_0^* = Z[k^2 - 2k(1 - \alpha)/(1 + \alpha) + 1]\delta.$$

Точность последнего соотношения повышается для высших мод, когда $k \gg 1$ и $R_0 \gg \delta$.

Авторы выражают благодарность Ю. В. Лапину и Э. А. Тропшу за ценные замечания и обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И., Либрович В. Б. и др. Математическая теория горения и взрыва.— М.: Наука, 1980.
2. Баренблатт Г. И., Зельдович Я. Б., Истратов А. Г. О диффузионно-тепловой устойчивости ламинарного пламени // ПМТФ.— 1962.— № 4.
3. Ландау Л. Д. К теории медленного горения // ЖЭТФ.— 1944.— Т. 14, № 6.
4. Истратов А. Г., Либрович В. Б. О влиянии процессов переноса на устойчивость плоского фронта пламени // ПММ.— 1966.— Т. 30, № 3.
5. Germain P., Guiraud J.-P. Conditions de choc dans un fluid faiblement dissipatif en mouvement non stationnaire // C. r. acad. sci.— 1961.— V. 252, N 7.
6. Чечило И. М., Хвиливицкий Р. Я., Ениколопан И. С. О явлении распространения реакции полимеризации // ДАН СССР.— 1972.— Т. 204, № 5.
7. Жижин Г. В., Сегаль А. С. Гидродинамическая устойчивость цилиндрического фронта реакции, сопровождающейся сильным увеличением вязкости // ПМТФ.— 1988.— № 2.
8. Жижин Г. В., Сегаль А. С. Гидродинамическая устойчивость сферического фронта реакции, сопровождающейся сильным увеличением вязкости // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1988.— № 3.
9. Бабаджанян А. С., Вольперт Вит. А., Вольперт Вл. А. и др. Фронтальные режимы протекания экзотермической реакции в сферических и цилиндрических реакторах.— Черногоровка, 1986.— (Препр./ОИХФ АН СССР).
10. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика.— М.: Физматгиз, 1963.— Ч. 2.
11. Новожилов Б. В. Нестационарное горение твердых ракетных топлив.— М.: Наука, 1973.
12. Markstein G. H. Experimental and theoretical studies of flame front stability // J. Aeronaut. Sci.— 1951.— V. 18, N 3.
13. Kazlovitz B., Denniston D. W. Jr. and oth. Studies of turbulent flame // 4th Symp. Combust.— Baltimore: Williams and Wilkins.— 1953.

г. Ленинград

Поступила 31/VII 1990 г.

УДК 532.593

А. Н. Гаврилов, В. П. Коробейников

ДВИЖЕНИЕ ДВУХФАЗНЫХ СРЕД В ТРУБАХ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ ЛОКАЛЬНОМ ПОДВОДЕ МАССЫ И ЭНЕРГИИ

Рассматриваются одномерные нестационарные течения двухфазных сред, представляющих смесь идеального нетеплопроводного газа и твердых частиц. В автономной постановке решаются задачи о втекании двухфазной смеси в трубу переменного сечения, в которой находится другая смесь, причем смеси могут быть как инертными, так и горючими. Задача сведена к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с дополнительными условиями на внутренних поверхностях разрыва. Методом малого параметра решена неавтономная задача о втекании горючего газа в инертную двухфазную смесь.

1. Пусть в трубе переменного сечения находится покоящаяся смесь газа и твердых частиц. Движение газа с частицами рассматривается в рамках модели взаимопроникающих континуумов. Считается, что газ идеальный, нетеплопроводный, а частицы — несжимаемые и недеформируемые сферы одинакового радиуса. Не учитываются броуновское движение частиц, их объемная доля и соударения друг с другом. Между фазами имеется вязкое и тепловое взаимодействие.

В начальный момент времени в трубу через входное отверстие начинает поступать двухфазная смесь с другими частицами и газом. В результате возникает нестационарное движение обеих смесей, которое будем считать одномерным. Площадь поперечного сечения трубы меняется следующим образом: $F(r) = br^{\nu-1}$, $1 \leq \nu \leq 3$ (r — расстояние, отсчитываемое от входного отверстия, ν , b — постоянные, $\nu = 1, 2, 3$ для плоского, цилиндрического и сферического случаев).