

БЕЗРАЗМЕРНЫЕ УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ И ЗАТУХАНИЕ УДАРНЫХ ВОЛН

Б. С. Чекин

(Москва)

1. Безразмерные уравнения состояния Гюгонио. В настоящее время основную информацию о сжимаемости и термодинамике материалов при высоких давлениях получают из экспериментов с ударными волнами [1]. По волновым D и массовым U скоростям в них фиксируются давления, плотности и удельные энергии, определяющие ход адиабат Гюгонио. Замечательная эмпирическая закономерность, выявленная в многочисленных опытах, состоит в том, что для многих материалов между скоростью ударной волны и скоростью вещества за фронтом хорошо соблюдается линейная зависимость $D = C_0 + \lambda U$. Это соотношение с помощью законов сохранения приводит к простым выражениям для ударного давления P_H , увеличения внутренней энергии $E_H - E_0$ и деформации X

$$(1.1) \quad X = 1 - \rho_0/\rho = U/(C_0 + \lambda U), \quad P_H = \rho_0 C_0^2 X / (1 - \lambda X)^2, \\ E_H - E_0 = 0,5 C_0^2 X^2 / (1 - \lambda X)^2,$$

где ρ — плотность, индексом 0 отмечены состояния перед фронтом волны и индексом H — за фронтом.

Уравнение состояния типа Ми — Грюнайзена, ассоциированное с адиабатой Гюгонио, записывается с использованием (1.1) в форме [2—4]

$$(1.2) \quad P(X, E) = P_H(X) + \frac{\rho_0 \Gamma(X)}{1 - X} [E - E_H(X)],$$

где $\Gamma(X)$ — коэффициент Грюнайзена. Далее, в соответствии с экспериментом [5] полагаем $\Gamma\rho = \Gamma_0\rho_0 = \text{const}$. В термических переменных X, T , если теплоемкость постоянна,

$$(1.3) \quad P(X, T) = P_H(X) + \frac{\rho_0 c_V \Gamma(X)}{1 - X} [T - T_H(X)].$$

Температура на ударной адиабате T_H определяется температурой исходного состояния T_0 и решением некоторого дифференциального уравнения [4,5].

Если отсчет энергии вести от исходного состояния, т. е. принять $E_0 = 0$, уравнения (1.2), (1.3) с учетом (1.1) содержат лишь пять параметров $\rho_0, C_0, \lambda, c_V, T_0$ и одну функцию плотности $\Gamma(X)$. Это обстоятельство позволяет описать термодинамику сжатых веществ универсальными соотношениями. Первый шаг в этом направлении сделан авторами [6, 7] путем введения масштаба давления $\rho_0 C_0^2$ и масштаба скорости C_0 , выбора фиксированных значений коэффициента λ и коэффициента Грюнайзена. Значительно более существенные результаты получены в работах [8—10], где предложено два разных масштаба скорости C_0 и C_0/λ . Безразмерные переменные вводятся в [8] по формулам

$$d = D/C_0, \quad u = \lambda U/C_0, \quad p = \lambda P/(\rho_0 C_0^2), \quad e = \lambda^2 E/C_0^2, \quad x = \lambda X.$$

Тогда соотношения на ударной адиабате принимают очень простой вид

$$(1.4) \quad d = 1 + u, \quad x = u/(1 + u), \quad p_H = x/(1 - x)^2, \quad e_H = 0,5x^2/(1 - x)^2,$$

не содержащий ни одного специфического параметра. В работе [10] показано, что можно ввести некоторую безразмерную температуру и записать уравнения (1.2), (1.3) в безразмерном виде; представим полученные в [10] соотношения в форме

$$(1.5) \quad p(x, e) = x/(1 - x)^2 + \gamma_0[e - 0,5x^2/(1 - x)^2];$$

$$(1.6) \quad p(x, t) = x/(1 - x)^2 + \gamma_0[t - \theta(x) - t_0 e^{\gamma_0 x}].$$

Здесь $t = \lambda^2 c_V^2 T / C_0^2$ — безразмерная температура; $\gamma_0 = \Gamma_0 / \lambda$; $t_0 = \lambda^2 c_V T_0 / C_0^2$ — безразмерная начальная температура в точке ($p=0, x=0$); $\theta(x) = t_H(x) - t_0 e^{\gamma_0 x}$, где t_H — температура ударного сжатия; $t_0 e^{\gamma_0 x}$ — температура на изэнтропе, проходящей через точку ($p=0, x=0$). Функция $\theta(x)$ является решением дифференциального уравнения

$$d\theta(x)/dx = \gamma_0 \theta(x) + x^2/(1 - x)^3$$

с начальным значением $\theta(0) = 0$. Для $\theta(x)$ получена простая аппроксимация

$$(1.7) \quad \theta(x) = \frac{x^3}{3(1-x)^2} [1 + (\gamma_0/4 + 0,293)x]$$

в области $0,8 \leq \gamma_0 \leq 2$, $0 \leq x \leq 0,64$, дающая относительную ошибку, меньшую 0,5%.

Таким образом, все термодинамические процессы и величины могут быть рассчитаны по формулам (1.5)—(1.7), в частности, давление на нулевой изэнтропе $s = s_0$

$$p_{s_0}(x) = x/(1 - x)^2 - \gamma_0 \theta(x).$$

На произвольной изэнтропе, проходящей через точку (p_i, x_i), имеем

$$(1.8) \quad p_{s_i}(x) = p_{s_0}(x) + [p_i - p_{s_0}(x_i)] e^{\gamma_0(x-x_i)}.$$

Для адиабаты повторного ударного нагружения, исходящей из точки (p_i, x_i), имеют место следующие соотношения:

$$(1.9) \quad u = u_i + (\sigma - \sigma_i) \sqrt{\varphi(\sigma, \sigma_i) / (\sigma \sigma_i)}, \quad p = p_i + (\sigma - \sigma_i) \varphi(\sigma, \sigma_i),$$

где $\sigma = 1/(1 - x)$; $p_i = p_H(x_i)$;

$$\varphi(\sigma, \sigma_i) = \frac{(\sigma + \sigma_i - 1)[1 - \gamma_0(\sigma - 1)/\sigma] + \gamma_0(\sigma_i - 1)/(2\sigma)}{1 - \gamma_0(\sigma - \sigma_i)/(2\sigma\sigma_i)}.$$

Они позволяют вычислить вторую адиабату как в плоскости $p - x$, так и в плоскости $p - u$.

Наконец, определим безразмерную изэнтропическую скорость звука $c(x, p)$

$$(1.10) \quad c^2(x, p) = (1 - x)^2 \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_s = \gamma_0 (1 - x)^2 p + (1 + x - \gamma_0 x)/(1 - x),$$

которая связана с обычной изэнтропической скоростью звука C соотношением $c = (1 - x) \rho C / \rho_0 C_0$ и имеет смысл скорости распространения малых

Таблица 1

x	p_H	e_H	$\gamma_0=0,8$		$\gamma_0=1,2$		$\gamma_0=1,6$		$\gamma_0=2$	
			θ	c	θ	c	θ	c	θ	c
0	0	0	0	1,000	0	1,000	0	1,000	0	1,000
0,10	0,123	0,006	0,0004	1,102	0,0004	1,100	0,0004	1,098	0,0004	1,095
0,20	0,312	0,031	0,0046	1,208	0,0046	1,200	0,0047	1,192	0,0048	1,183
0,30	0,612	0,092	0,0210	1,325	0,0216	1,305	0,0221	1,285	0,0228	1,265
0,40	1,111	0,222	0,0708	1,456	0,0732	1,419	0,0757	1,381	0,0784	1,342
0,44	1,403	0,309	0,1100	1,515	0,1140	1,469	0,1182	1,421	0,1227	1,371
0,48	1,775	0,426	0,1685	1,579	0,1749	1,521	0,1818	1,462	0,1891	1,400
0,52	2,257	0,587	0,2558	1,648	0,2659	1,578	0,2768	1,505	0,2885	1,428
0,56	2,893	0,810	0,3866	1,725	0,4025	1,640	0,4195	1,551	0,4378	1,456
0,60	3,750	1,125	0,5851	1,811	0,6095	1,709	0,6359	1,600	0,6644	1,483
0,64	4,938	1,580	0,8912	1,903	0,9287	1,786	0,9693	1,654	1,0133	1,510

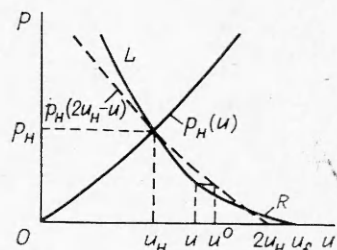
возмущений (или слабых разрывов) в случае одномерного плоского движения и использования соответствующих безразмерных пространственной координаты и времени, введенных ниже.

В [10] термодинамический анализ выполнен для одного статистически среднего значения $\gamma_0 = 4/3$. Наша задача заключается в конкретном термодинамическом описании «линейных» сред с различными γ_0 при их ударном сжатии и расширении.

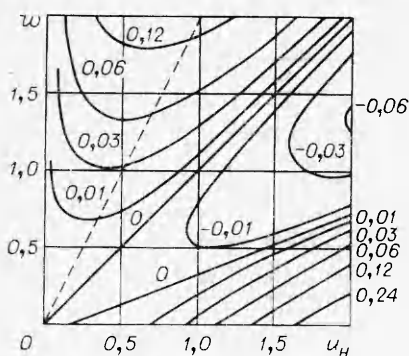
2. Ударные адиабаты. Безразмерные параметры ударных адиабат, вычисленные по (1,4), (1,7), (1,10), приведены в табл. 1 для $\gamma_0 = 0,8; 1,2; 1,6; 2$. Здесь даны общие для всех γ_0 $p(x)$ и $e(x)$, скорости звука и функции $\theta(x)$, по которым находится $t_H(x)$. С увеличением γ_0 скорости звука при одинаковых степенях сжатия уменьшаются, а $\theta(x)$ и температура на ударной адиабате возрастают. В согласии с теорией величина $\theta(x)$ увеличивается как третий порядок малости по отношению к x и начинает влиять на параметры ударного сжатия при $x > 0,3$.

Критерием плавления в ударной волне является условие [11] $P = 2\rho_0 C_0^2/\lambda$, или $p=2$. Как видно из табл. 1, плавление наступает при $x > 0,5$. Известно [12], что сжимаемость среды при высоких давлениях мало зависит от перехода в жидкую фазу, но рост температур при этом уменьшается. Очевидно, значения $\theta(x)$ при $x > 0,5$ отличаются от истинных в большую сторону.

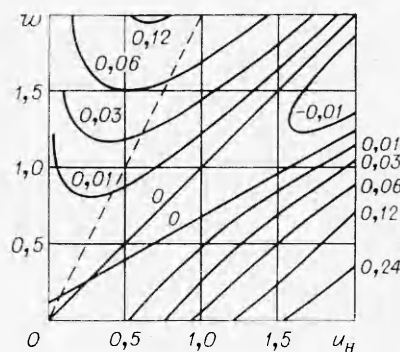
3. Распад разрыва и точность зеркального приближения. Рассмотрим процесс распада разрыва при отражении ударной волны от границы раздела двух сред. Такая ситуация возникает при изучении динамической сжимаемости методом отражения [1]. Здесь имеет место в зависимости от относительной динамической жесткости слоев, через которые проходит ударная волна, расширение первого слоя или его сжатие. На схематической $p-u$ -диаграмме фиг. 1 ветви сжатия L и расширения R выходят из состояния (p_H, u_H) . Обычно эти кри-



Фиг. 1



Ф и г. 2



Ф и г. 3

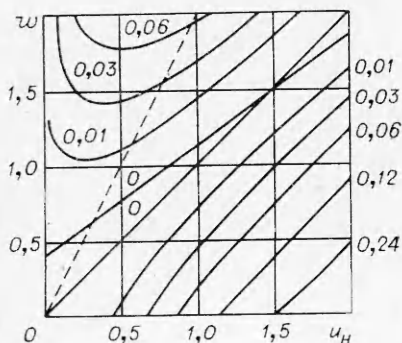
вые на $p - u$ -диаграмме отождествляют с зеркальным изображением основной адиабаты однократного сжатия (штриховая линия), хотя они и относятся к термодинамически различным процессам. Для определения кривых разгрузки используется соотношение для простой волны

$$du/dx = c(x, p)/(1 - x),$$

которое, учитывая (1.8), (1.10), можно численно проинтегрировать. Вторые адиабаты в $p - u$ -координатах находятся по уравнениям (1.9).

Результаты вычислений для трех значений $\gamma_0 = 0,8; 1,2$ и $1,6$ приведены на номограммах фиг. 2—4 соответственно. По оси абсцисс отложены безразмерные массовые скорости u_H , по оси ординат — величина $w = 2u_H - u^0$, где u^0 — скорость после распада разрыва, полученная в зеркальном приближении. Штриховые прямые отвечают ординате фиг. 1, т. е. состояниям отражения от абсолютно жесткой стенки. Результат анализа представлен сеткой изолиний $u - u^0 = \text{const}$. Они характеризуют погрешности зеркального приближения. Цифры на кривых указывают, насколько истинная безразмерная скорость u после разгрузки или повторного сжатия отличается от значений зеркального приближения. Построенные графики выявляют области применимости зеркального приближения и позволяют внести в кривые расширения и торможения необходимые коррективы.

Особый интерес имеют скорости u_f свободной поверхности при отражении от нее ударной волны (см. фиг. 1). Для слабых волн здесь выполняется известное «правило удвоения»: $u_f = 2u_H$. Для ударных волн разной интенсивности и разных γ_0 отклонения от правила удвоения, т. е. величины $u_f - 2u_H$, приведены в табл. 2. Верхняя ломаная линия ограничивает амплитуды волн, для которых относительная ошибка $\delta = u_f/(2u_H) - 1$ при использовании правила удвоения не превышает 1%. Нижняя линия определяет амплитуды, приводящие к ошибке, меньшей 3%. При $u_H = 1,8$ для всех γ_0 $\delta \approx 10\%$.



Ф и г. 4

4. Затухание ударной волны. Безразмерные переменные, предложенные в [10], можно использовать для приведения уравнений, описывающих плоское одномерное движение среды, к безразмерному виду.

Т а б л и ц а 2

$u_H \backslash \gamma_0$	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
0,2	0,0000	0,0003	0,0005	0,0007	0,0009	0,0011	0,0013
0,3	0,0004	0,0011	0,0018	0,0024	0,0029	0,0035	0,0040
0,4	0,0014	0,0029	0,0044	0,0057	0,0068	0,0079	0,0089
0,5	0,0034	0,0062	0,0088	0,0110	0,0130	0,0148	0,0163
0,6	0,0068	0,0114	0,0154	0,0189	0,0219	0,0244	0,0265
0,8	0,0195	0,0291	0,0370	0,0434	0,0486	0,0527	0,0557
1,0	0,0431	0,0595	0,0723	0,0819	0,0889	0,0938	0,0970
1,2	0,0821	0,1067	0,1241	0,1360	0,1453	0,1477	0,1496
1,4	0,1423	0,1749	0,1952	0,2067	0,2123	0,2138	0,2125
1,6	0,2318	0,2687	0,2868	0,2939	0,2942	0,2904	0,2839
1,8	0,3622	0,3913	0,3988	0,3957	0,3872	0,3756	0,3623

Действительно, уравнения непрерывности и движения в этих переменных записываются в виде

$$(4.1) \quad \partial x / \partial \tau + \partial u / \partial h = 0, \quad \partial u / \partial \tau + \partial p / \partial h = 0,$$

где $h = H/L$; $\tau = C_0 t_* / L$; L — характерный размер задачи; t_* — время; H — лагранжева координата, совпадающая с эйлеровой координатой Z , если вещество находится при нормальных условиях. Предположение о том, что энтропия частицы, находящейся за фронтом ударной волны, сохраняется, дает еще одно уравнение

$$(4.2) \quad \partial p / \partial x = G^2(x, p) \partial x / \partial \tau,$$

где $G(x, p) = c(x, p)/(1 - x)$. Таким образом, для определения неизвестных x, p, u имеем систему трех уравнений (4.1), (4.2), зависящую от одного параметра γ_0 (от этого параметра зависит скорость звука $c(x, p)$). Если необходимо найти эйлерову координату, то к (4.1), (4.2) нужно присоединить еще одно уравнение $\partial z / \partial \tau = u$, где $z = \lambda Z / L - (\lambda - 1)h$ — некоторая безразмерная эйлерова координата.

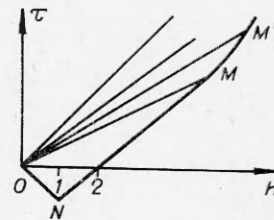
Рассмотрим задачу о соударении пластинки с полупространством, которая схематически в плоскости $h - \tau$ представлена на фиг. 5. Эта задача в безразмерных переменных зависит лишь от параметров: γ_0 и скорости налетающей пластинки $2u_0$, где u_0 — массовая скорость на ударном фронте NM до момента $\tau = \tau_0$, при котором волна разрежения, центрированная в точке O , догонит ударный фронт и начнется затухание ударной волны. Точка N соответствует моменту соударения пластинки с полупространством. Толщина пластинки в безразмерных координатах равна 1, а для τ_0 и соответствующей координаты h_0 (точка M) можно получить

$$\tau_0 = 2(1 - x_0)/(c_H(x_0) - 1), \quad h_0 = \tau_0 G_H(x_0),$$

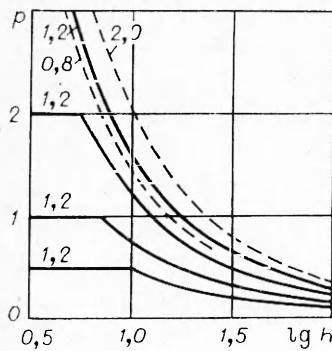
где $x_0 = x(h_0) = u_0/(1 + u_0)$; $c_H(x)$, $G_H(x)$ — значения $c(x, p)$, $G_H(x, p)$ на ударной адиабате.

Для волны разрежения имеют место соотношения

$$\partial p / \partial x = G^2, \quad \partial u / \partial x = G, \quad \xi \equiv G(x, p)\tau - h = 0.$$



Ф и г. 5



Ф и г. 6

Затухания ударного фронта, например зависимости $p(h)$, $x(h)$ вдоль фронта, рассчитывались методом характеристик. Было проведено много вычислений на ЭВМ для различных значений γ_0 и $p_0 = x_0/(1-x_0)^2$. Некоторые результаты этих вычислений представлены на фиг. 6, цифры на кривых соответствуют значениям параметра γ_0 .

Рассмотрим изменение величины ξ вдоль ударного фронта при $\tau \geq \tau_0$. Очевидно, при $\tau = \tau_0$ $\xi = 0$. Будем считать, что ξ при движении вдоль фронта MM' для не очень больших значений p_0 изменяется достаточно медленно, разложим ξ в ряд по степеням $1/G_H - 1/G_H(x_0)$ и сохраним лишь первый (не равный нулю) член. Тогда

$$(4.3) \quad G_H(x)\tau - h = \alpha [1/G_H(x) - 1/G_H(x_0)],$$

где α — некоторая постоянная, зависящая от параметров γ_0 , x_0 . Постоянная α должна быть получена из исходной системы уравнений (4.1), (4.2). Вычисляя эту постоянную и присоединяя к уравнению (4.3) соотношение на фронте $d\tau/dh = 1 - x$, получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение для затухания фронта:

$$(4.4) \quad d(h/h_0)/dx = F(x, h/h_0) \quad (h \geq h_0),$$

где

$$F(x, h/h_0) = \frac{q [2G_H(x_0)/G_H - 1] - h/h_0 \frac{dG_H}{dx}}{G_H [(1-x)G_H - 1]},$$

$$G_H = G_H(x) = \sqrt{1 + x - \gamma_0 x^2 / (1-x)^{3/2}},$$

$$q = 1 - \frac{1}{2} \frac{(1-x_0)G_H(x_0) + x_0 + 1(2+x_0)(2-\gamma_0 x_0) - \gamma_0^2(1-x_0)x_0^2}{1+x_0-\gamma_0 x_0^2} \frac{(2+x_0)(2-\gamma_0 x_0)}{(2+x_0)(2-\gamma_0 x_0)}.$$

Если не учитывать изменение величины ξ при движении вдоль фронта и положить $q = 0$, то уравнение (4.4) будет соответствовать известному изэнтропическому приближению, используемому для решения рассматриваемой здесь задачи, но с другим уравнением состояния, чем в работах [13, 14]. Учитывая в какой-то степени неизэнтропичность ударного сжатия, значительно повышаем точность приближенных формул и расширяем область их применимости.

Уравнение (4.4) тем лучше описывает затухание фронта, чем меньше p_0 . Но даже при $p_0 = 3$, что в случае меди соответствует давлению $p_0 \approx 2,8$ Мбар, сравнение решения (4.4) с численным расчетом по методу характеристик дает относительную ошибку величины $p(h)$ менее чем 2% в области $0,8 \leq \gamma_0 \leq 2$ при уменьшении амплитуды ударного фронта более чем в 10 раз.

Для достаточно малых p_0 из (4.4) находим приближенную формулу

$$x(h) = x_0 / \sqrt{1 + \frac{1 - \mu x_0^2}{1 + \mu x_0^2} \left(\frac{h}{h_0} - 1 \right)}, \quad \mu = (3\gamma_0 + 1)/4,$$

достаточно хорошо описывающую зависимость $x(h)$ в области $0,8 \leq \gamma_0 \leq 2$ при $p_0 \leq 0,5$. Так, при $p_0 = 0,5$ она дает относительную ошибку для $p(h)$, меньшую 5%.

Автор выражает благодарность Л. В. Альтшулеру и И. И. Шарипджанову за ценные советы и помощь, оказанную при выполнении этой работы.

Поступила 28 III 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Альтшулер Л. В. Применение ударных волн в физике высоких давлений.— УФН, 1965, т. 88, с. 197.
2. McQueen R. G., Marsh S. P., Fritz J. N. Hugoniot equation of state of twelve rocks.— «J. Geophys. Res.», 1967, vol. 20, p. 72.
3. Кусов Н. Ф., Шарипджанов И. И. Семейство адиабат Пуассона для мрамора.— ФТПРПИ, 1970, № 2.
4. Альтшулер Л. В., Шарипджанов И. И. Аддитивные уравнения состояния силикатов при высоких давлениях.— «Изв. АН СССР. Физика Земли», 1971, № 3, с. 11.
5. High-velocity impact phenomena. Ed. by Ray Kinslow. N. Y.— L., Academic press, 1970. Рус. пер. Высокоскоростные ударные явления. М., «Мир», 1973.
6. Гоголев В. М., Мыркин В. Г., Яблокова Г. И. Приближенное уравнение состояния твердых тел.— ПМТФ, 1963, № 5, с. 93.
7. Корявов В. П. Приближенное уравнение состояния твердых тел.— ПМТФ, 1964, № 5, с. 123.
8. Prieto F. E. A law of corresponding states for materials at shock pressures.— «J. Phys. Chem. Solids.», 1974, vol. 35, p. 279.
9. Prieto F. E. System-independent release adiabats from shocked states.— «J. Phys. Chem. Solids.», 1975, vol. 36, p. 871.
10. Prieto F. E., Renero C. The equation of state of solids.— «J. Phys. Chem. Solids.», 1976, vol. 37, p. 151.
11. Schroeder R. C., McMaster W. H. Shock compression freezing and melting of water and ice.— «J. Appl. Phys.», 1973, vol. 44, N 6, p. 2591.
12. Horie Y. Melting and Hugoniot equation.— «J. Phys. Chem. Solids.», 1967, vol. 28, p. 1569.
13. Fowles G. R. Attenuation of the shock wave produced in a solid by a flying plate.— «J. Appl. Phys.», 1960, vol. 31, N 4, p. 655.
14. Рыбаков А. П. Затухание ударной волны при соударении пластин.— ПМТФ, 1976, № 5, с. 147—149.

УДК 532.593

ВОЛНЫ НАПРЯЖЕНИЙ В ГРУНТАХ ПРИ НАЛИЧИИ КАВИТАЦИОННЫХ ЭФФЕКТОВ

В. А. Котляревский, Е. Г. Майорова, А. И. Шишкин

(Москва)

Внутренние разрушения в различных материалах, связанные с отражением от свободных границ волн напряжений, вызванных кратковременными импульсами [1], осложняют решение волновых задач. Возможность трещинообразования (кавитации) при ударе по упругопластическому стержню показана в работе [2], в [3] в общих чертах описана процедура корректировки в расчете методом сеток осесимметричных упругопластических течений среды при взрывном воздействии, связанная с процессом трещинообразования. В данной работе приводится формулировка и численное решение одномерной задачи об импульсивном нагружении слоя грунта в поле силы тяжести. Модель грунта принята по несколько модифицированной реологической схеме Денисова — Мураямы, соответствующей свойствам глинистых грунтов при объемной деформации [4].