ЛИТЕРАТУРА

1. Широков М. Ф., Ваулин Е. П. Течения низкотемпературной плазмы с большими скоростями. В сб. «Исследования при высоких температурах», М., «Наука», 1967.
2. Одинцова Г. А., Ваулин Е. П. Измерение скоростей частиц во вращающейся плазме при помощи интерферометра Фабри — Перо с фотоэлектрической регистрацией. Ж. прикл. спектроскопии, 1965, т. 3. № 2.
3. Baranov V. U., Vasiliewa I. A., Ulianov K. N. Arc in a gas flowing through a magnetic field. In: Electricity from MHD, Vienna 1966, vol. 1.
4. Saito S., Sato N., Hatta Y. Low — frequency oscillations in a weakly ionized plasma in crossed electric and magnetic fields. J. Phys. Soc. Japan, 1966, vol. 21, No. 12, p. 2695.
5. Velikhov E. P. Hall instability of current — carrying slightly ionized plasmas. First Intern. Symp. on Magnetoplasmodynamic, Newcastle. 1962.
6. McCune J. E. Wave growth and instabillity in partially — ionized gases. Second Intern Symp. on Magnetohydrodynamic Electrical Power Generation, Paris, 1964.
7. Trigher S. A. The theory of the stability of sound in a nonhomogeneous plasma. In: Electricity from MHD, Vienna, 1966, vol. 2.

ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ МГД-УРАВНЕНИЙ С УЧЕТОМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРИ КОНЕЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ МАГНИТНОГО ЧИСЛА РЕЙНОЛЬДСА

А. Н. Черепанов, В. И. Яковлев

(Новосибирск)

Рассматриваются нестационарные плоскосимметричное и осесимметричное движения теплопроводного газа конечной проводимости в магнитном поле, нормальном направлению движения среды.

Решение ищется с полем скоростей, имеющим линейную зависимость от пространственной координаты. Полученная система уравнений решается методом разделения переменных.

Приведены некоторые численные расчеты для задачи о плоскосимметричном расширении проводящего газа в магнитном поле в случае, когда проводимость и теплопроводность зависят только от температуры. Приведены распределения температуры, плотности и магнитного поля по сечению слоя в зависимости от магнитного числа Рейнольдса и безразмерного коэффициента теплопроводности.

Рассматриваются одномерные плоскосимметричное и осесимметричное расширения проводящего газа в магнитном поле, направленном по оси Z (перпендикулярно направлению движения газа). В начальный момент $t = 0$ газ занимает пространство $-a_0 \leqslant x \leqslant a_0$ между двумя плоскостями (в плоскосимметричном случае), либо представляет собой бесконечный по оси Z цилиндрический столб радиуса a_0.

Приняты следующие предположения.

1) Газ удовлетворяет уравнению состояния идеального газа, вязкость отсутствует.

2) Токи смещения пренебрежимо малы. Магнитное поле на внешней границе проводящего газа можно задавать, не рассматривая волновых процессов в пустоте (квазистационарное электромагнитное поле).

3) Электропроводность σ_1 и теплопроводность λ_1 газа зависят от температуры и плотности по степенным зависимостям

$$\sigma_1 = \sigma_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^n \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^r, \qquad \lambda_1 = \lambda_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^m \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k \tag{1}$$

4) Рассматривается равномерное расширение со скоростью $v_x = xa'(t) / a(t)$, линейно зависящей от пространственной координаты. Здесь $a(t)$ — неизвестный закон движения границы газа.

При сделанных предположениях безразмерные уравнения магнитной гидродинамики в лагранжевых координатах (ξ, τ) имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial \tau}[\mu^{\gamma+1}\rho(\xi, \tau)] = 0, \qquad \varkappa\xi\rho(\xi, \tau)\mu\mu'' = -\frac{\partial}{\partial \xi}[p(\xi, \tau) + h_1^2(\xi, \tau)]$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}[\mu^{\gamma+1}(\tau) h_1(\xi, \tau)] = \frac{1}{R_m \xi^\gamma \mu^2} \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\xi^\gamma}{\Theta_1^n \rho^r} \frac{\partial}{\partial \xi}(\mu^{\gamma+1} h_1)\right], \qquad p = \rho\Theta_1$$

$$
\frac{\partial\Theta_1}{\partial\tau}=-(\varkappa-1)p\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{1}{\rho}\right)+\frac{2(\varkappa-1)}{R_m}\frac{1}{\Theta_1^n\rho^{r+1}}\frac{1}{\mu^2}\left(\frac{\partial h_1}{\partial\xi}\right)^2+
$$

$$
+\frac{\Omega}{\xi^\gamma\mu^2\rho}\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\Theta_1^m\rho^k\xi^\gamma\frac{\partial\Theta_1}{\partial\xi}\right] \tag{2}
$$

$$
\xi=\frac{x}{a(t)},\quad \tau=\frac{t}{t_0},\quad \mu=\frac{a(t)}{a_0},\quad h_1=\frac{H}{H_0}
$$

$$
\Theta_1=\frac{T}{T_0},\quad \varkappa=\frac{c_p}{c_v},\quad t_0=\frac{a_0}{v_0},\quad R_m=\frac{4\pi\sigma_0 v_0 a_0}{c^2}
$$

Здесь R_m — магнитное число Рейнольдса

$$
\Omega=\frac{8\pi\lambda_0 t_0 R T_0}{a_0^2 H_0^2 c_v}=\frac{8\pi(\varkappa-1)\lambda_0 T_0}{v_0 a_0 H_0^2}
$$

Безразмерные давление p и плотность ρ получены отнесением размерных величин к масштабам

$$
p_0=\frac{H_0^2}{8\pi},\qquad \rho_0=\frac{p_0}{RT_0}=\frac{H_0^2}{8\pi RT_0}
$$

За масштабы H_0, T_0 принимаются напряженность магнитного поля и температура газа на внешней границе в момент $t=0$, за характерную скорость v_0 — скорость звука $\sqrt{\varkappa RT_0}$, отвечающая температуре T_0.

В плоскосимметричном случае $\gamma=0$, в цилиндрическом $\gamma=1$. Из уравнения (2.1)

$$
\rho(\xi,\tau)=\frac{\Phi(\xi)}{\mu^{\gamma+1}(\tau)} \tag{3}
$$

После подстановки (3) и перехода к новым функциям

$$
h(\xi,\tau)=\mu^{\gamma+1}h_1(\xi,\tau),\qquad \Theta(\xi,\tau)=\mu^{(\gamma+1)(\varkappa-1)}\Theta_1(\xi,\tau) \tag{4}
$$

оставшиеся уравнения системы (2) принимают вид

$$
\varkappa\xi\Phi(\xi)\frac{\mu''}{\mu^\gamma}=-\frac{\partial}{\partial\xi}\left[p(\xi,\tau)+\frac{h^2(\xi,\tau)}{\mu^{2(\gamma+1)}}\right]
$$

$$
\frac{\partial h}{\partial\tau}=\frac{\mu^{(\gamma+1)[n(\varkappa-1)+r]-2}}{R_m\xi^\gamma}\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{\xi^\gamma}{\Theta^n\Phi^r}\frac{\partial h}{\partial\xi}\right] \tag{5}
$$

$$
\frac{\partial\Theta}{\partial\tau}=\frac{2(\varkappa-1)}{R_m}\frac{\mu^{(\gamma+1)[r+\varkappa+n(\varkappa-1)-2]-2}}{\Theta^n\Phi^{r+1}}\left(\frac{\partial h}{\partial\xi}\right)^2+
$$

$$
+\Omega\frac{\mu^{(\gamma+1)[1-k-m(\varkappa-1)]-2}}{\xi^\gamma\Phi(\xi)}\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\Theta^m\Phi^k\xi^\gamma\frac{\partial\Theta}{\partial\xi}\right]
$$

$$
p=\frac{\Phi(\xi)}{\mu^{\varkappa(\gamma+1)}}\Theta(\xi,\tau)
$$

Ищется частное решение системы (5) методом разделения переменных, аналогично работе [1].

В работе [2] этот подход был использован для получения решения рассматриваемой задачи без учета теплопроводности. Это решение характеризовалось требованием существования внешнего противодавления, пропорционального магнитному давлению. Решение без противодавления, т. е. для расширения в пустоту, не могло существовать вследствие конечного джоулевого тепловыделения на внешней границе (проводимость зависела только от температуры) при нулевой плотности среды, в результате чего при отсутствии теплопроводности температура не могла быть ограниченной на внешней поверхности. Учет теплопроводности позволяет получить решение и для случая расширения в пустоту.

Пусть

$$
h(\xi,\tau)=G(\tau)Z(\xi),\qquad \Theta(\xi,\tau)=V(\tau)X(\xi)
$$

Тогда из (5.4)

$$
p(\xi,\tau)=\Phi(\xi)X(\xi)\frac{V(\tau)}{\mu^{\varkappa(\gamma+1)}(\tau)} \tag{6}
$$

Подстановкой (6) в (5) получается следующая система уравнений:

$$
\begin{gathered}
\frac{\mu^{\varkappa(\gamma+1)-\gamma}\mu''}{V(\tau)} = -\frac{1}{\varkappa\xi\Phi(\xi)}\left[(\Phi X)' + \frac{G^2(\tau)\,\mu^{(\gamma+1)(\varkappa-2)}}{V(\tau)}(Z^2)'\right] \\
\frac{G'(\tau)}{G(\tau)}\,\frac{V^n(\tau)}{\mu^{(\gamma+1)[r+n(\varkappa-1)]-2}} = \frac{1}{R_m\xi^\gamma Z}\left[\frac{\xi^\gamma}{X^n\Phi^r}Z'\right]'
\end{gathered} \tag{7}
$$

$$
\frac{V'(\tau)}{V^{(m+1)}(\tau)}\,\mu^{2-(\gamma+1)[1-k-m(\varkappa-1)]} = \frac{2(\varkappa-1)}{R_m}\,\frac{G^2(\tau)\,\mu^{(\gamma+1)[(n+m)(\varkappa-1)+r+k+\varkappa-3]}}{V^{n+m+1}(\tau)}\times
$$

$$
\times\frac{(Z')^2}{X^{n+1}\Phi^{r+1}} + \Omega\,\frac{(X^m\Phi^k\xi^\gamma X')'}{\xi^\gamma\Phi X}
$$

Здесь левые части уравнений зависят только от переменной τ, правые части уравнений (7.1) и (7.3) содержат смешанные члены. Функции $\mu(\tau)$, $G(\tau)$, $V(\tau)$, $\Phi(\xi)$, $X(\xi)$, $Z(\xi)$ в совокупности будут удовлетворять системе (7), если функции от τ и функции от ξ в отдельности удовлетворяют следующим системам уравнений:

$$
\begin{gathered}
\mu^{\varkappa(\gamma+1)-\gamma}(\tau)V^{-1}(\tau)\,\mu'' = N_1, \qquad G^2(\tau)\,V^{-1}(\tau)\,\mu^{(\gamma+1)(\varkappa-2)} = 1 \\
G^{-1}(\tau)\,V^n(\tau)\,\mu^{2-(\gamma+1)[r+n(\varkappa-1)]}\,G'(\tau) = N_2, \quad V^{-(m+1)}(\tau)\,\mu^{2-(\gamma+1)[1-k-m(\varkappa-1)]}V'(\tau) = N_3 \\
G^2(\tau)\,V^{-(n+m+1)}\,\mu^{(\gamma+1)[(n+m)(\varkappa-1)+r+k+\varkappa-3]} = 1
\end{gathered} \tag{8}
$$

$$
\begin{gathered}
(\Phi X)' + (Z^2)' = -N_1\varkappa\xi\Phi(\xi) \\
\frac{1}{R_m\xi^\gamma Z}\left[\frac{\xi^\gamma}{X^n\Phi^r}Z'\right] = N_2, \quad \frac{2(\varkappa-1)}{R_m}\,\frac{(Z')^2}{X^{n+1}\Phi^{r+1}} + \Omega\,\frac{(X^m\Phi^k\xi^\gamma X')'}{\xi^\gamma\Phi X} = N_3
\end{gathered} \tag{9}
$$

Здесь N_1, N_2, N_3 — постоянные величины, постоянные в уравнениях (8.2) и (8.5) на основании (10) равны единице. В системе (9) число уравнений равно числу неизвестных, система (8) содержит пять уравнений для трех неизвестных $\mu(\tau)$, $G(\tau)$, $V(\tau)$; эти уравнения совместны только при определенных ограничениях, наложенных на постоянные N_1, N_2, N_3 и физические параметры $\varkappa$, n, m, r, k. Необходимо заметить, что полученные системы (8) и (9) не являются единственно возможными. В частности, из (7) можно получить систему из пяти уравнений для трех функций от ξ, при этом для функций от τ получается система из трех уравнений. Однако, как показало исследование полученных уравнений, совместность их возможна при ограничениях, сводящих решения к тривиальным (например, решение с нулевым градиентом магнитного поля).

Функции $\mu(\tau)$, $G(\tau)$, $V(\tau)$ должны удовлетворять начальным условиям

$$
\begin{gathered}
\mu(0) = 1, \qquad \mu'(0) = \pm M_0, \qquad G(0) = 1 \\
V(0) = 1\left(M_0 = \frac{1}{\sqrt{\varkappa R T_0}}\left|\frac{da}{dt}\right|_{t=0}\right)
\end{gathered} \tag{10}
$$

Здесь M_0 — число Маха при $t = 0$.

Функции $\Phi(\xi)$, $X(\xi)$, $Z(\xi)$ должны удовлетворять граничным условиям

$$
Z'(0) = 0, \qquad \Phi(1) = 0, \qquad X(1) = 1, \qquad Z(1) = 1, \qquad X^m\Phi^k X'|_{\xi=1} = 0 \tag{11}
$$

Условия (11.2) и (11.5) соответствуют задаче расширения или сжатия слоя в пустоте, когда плотность среды и тепловой поток на внешней границе равны нулю (излучение не учитывается).

Переходя к исследованию системы (8), необходимо рассмотреть отдельно несколько случаев.

А. Случай $N_3 = N_2 = 0$. Этому случаю отвечают $\partial h / \partial\tau = 0$, $\partial\theta / \partial\tau = 0$ в уравнениях (5). При этом, конечно

$$
\frac{\partial h_1}{\partial\tau} \neq 0, \qquad \frac{\partial\Theta_1}{\partial\tau} \neq 0
$$

Условия совместности уравнений (8) при $N_2 = N_3 = 0$ накладывают два ограничения на физические константы $\varkappa$, n, m, r, k

$$
\varkappa = 2, \qquad n + m + r + k - 1 = 0 \tag{12}
$$

Постоянная N_1 — произвольная. Для функций $G(\tau)$ и $V(\tau)$ получаются решения

$$G(\tau) \equiv 1, \qquad V(\tau) \equiv 1 \tag{13}$$

Для $\mu(\tau)$ — дифференциальное уравнение второго порядка $\mu^{2+\gamma}\mu'' = N_1$, которое один раз можно проинтегрировать и с учетом условий (10) записать в виде

$$\left(\frac{d\mu}{d\tau}\right)^2 = M_0^2 + \frac{2N_1}{1+\gamma}\left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\gamma}}\right) \tag{14}$$

Из последнего уравнения непосредственно можно исследовать характер решения $\mu(\tau)$ в зависимости от постоянной N_1 и начальной скорости $\mu'(0)$.

Если $N_1 > 0$, $\mu'(0) = M_0 > 0$, то $\mu(\tau)$ возрастает монотонно, причем

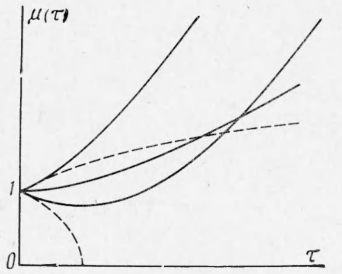
$$\mu'(\tau) \to M^* \quad \text{при } \tau \to \infty$$
$$(M^* = \sqrt{M_0^2 + 2N_1/(1+\gamma)}) \tag{15}$$

При $N_1 > 0$, $\mu(0) = -M_0 < 0$ функция $\mu(\tau)$ вначале убывает, при достижении значения $\mu_{\min}$

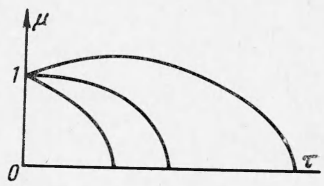
$$\left(0 < \mu_{\min}^{1+\gamma} = \frac{2N_1}{(1+\gamma)M_0^2 + 2N_1} < 1\right)$$

скорость $\mu'(\tau)$ становится равной нулю, а в дальнейшем $\mu(\tau)$ начинает монотонно расти, причем скорость $\mu'(\tau)$ асимптотически стремится к той же величине $\mu'_{\max} = M^*$, что и в случае $N_1 > 0$, $\mu'(0) = M_0$.

Пусть $N_1 < 0$, а величина $M_0^2 + 2N_1/(1+\gamma) > 0$. Если при этом $\mu'(0) = M_0 > 0$, то $\mu(\tau)$ — монотонно возрастающая функция, причем $\mu'(\tau) \to M^* < M_0$ при $\tau \to \infty$. Если же $\mu'(0) = -M_0 < 0$, то $\mu(\tau)$ монотонно убывает и достигает значения $\mu = 0$, при котором $\mu'(\tau) = -\infty$. Для наглядности примерный ход кривых $\mu(\tau)$ для рассмотренных случаев приведен на фиг. 1. Здесь пунктиром изображены зависимости при $N_1 < 0$, сплошными линиями—для случая $N_1 > 0$. Характер кривых для случая $N_1 < 0$, $M_0^2 + 2N_1/(1+\gamma) < 0$ показан на фиг. 2.



Фиг. 1



Фиг. 2

Отсюда видно, что при $\mu'(0) = M_0 > 0$ величина $\mu(\tau)$ сначала возрастает и достигает максимального значения $\mu_{\max}$, а потом падает до нуля, причем

$$\mu_{\max} = \frac{2N_1}{(1+\gamma)[M_0^2 + 2N_1/(1+\gamma)]} > 1$$

Для случая движения с осевой симметрией, т. е. при $\gamma = 1$, уравнение (14) можно проинтегрировать. В результате получается

$$\mu(\tau) = \left(\frac{N_1 + [M_0 \pm (M_0^2 + N_1)\tau]^2}{M_0^2 + N_1}\right)^{1/2}$$

Здесь знак плюс соответствует положительной начальной скорости $\mu'(0) = M_0 > 0$, знак минус — случаю $\mu'(0) = -M_0 < 0$.

Итак, видно, что в зависимости от произвольной постоянной N_1 и величины начальной скорости $\mu'(0) = \pm M_0$ характер движения границы проводящего сгустка меняется в достаточно широких пределах. Изменения плотности, температуры и напряженности магнитного поля со временем, как легко заметить из (3), (4), (6) и (13), определяются функцией $\mu(\tau)$; при увеличении $\mu(\tau)$ все эти параметры уменьшаются, при уменьшении $\mu(\tau)$ возрастают. В частности, режиму схлопывания первоначального сгустка до нулевых размеров соответствует увеличивающееся до бесконечности внешнее магнитное поле, при этом температура и плотность среды также увеличиваются до бесконечности. Заметим, что число Маха, определяемое по скорости и температуре границы как

$$M = \frac{da \,/\, dt}{\sqrt{\varkappa RT\,(\xi = 1)}} = \frac{\mu'(\tau)}{\sqrt{\Theta_1(1, \tau)}} = \mu'(\tau)\, \mu^{1/2(\gamma+1)}(\tau)$$

при бесконечном расширении сгустка сремится к бесконечности независимо от начального значения M_0.

Обратимся к уравнениям (9) для функций от ξ в рассматриваемом случае (A) $N_2 = N_3 = 0$. При этом уравнения (9.2) и (9.3) один раз можно проинтегрировать

$$\frac{\xi^\gamma}{X^n \Phi^r} Z' = C_1, \qquad \frac{2C_1}{R_m} Z + \Omega X^m \Phi^k \xi^\gamma X' = C_2 \tag{16}$$

Здесь C_1, C_2 — константы интегрирования.

Дальнейшее интегрирование уравнений (9.1), (16) при произвольных параметрах n, m, r, k, $\varkappa$, γ, удовлетворяющих условиям (12), затруднительно. Ниже в качестве примера рассмотрен один из частных случаев $n = 1$, $m = k = r = 0$, $\gamma = 0$.

При этом из уравнений (9.1), (16) и граничных условий (11)

$$X(\xi) = \sin {}^1\!/_2\, \pi\xi, \qquad Z(\xi) = 1 - \sqrt{{}^1\!/_2\, \Omega R_m} \cos {}^1\!/_2\, \pi\xi$$

$$\Phi(\xi) = \pi \sqrt{{}^1\!/_2\, \Omega R_m}\, \frac{e^{-2N_1 f(\xi)}}{\sin {}^1\!/_2\, \pi\xi} \int\limits_\xi^1 [1 - \sqrt{{}^1\!/_2\, \Omega R_m} \cos {}^1\!/_2\, \pi\xi]\, e^{2N_1 f(\xi)} d\xi$$

$$f(\xi) = \int\limits_1^\xi \frac{\xi\, d\varepsilon}{\sin {}^1\!/_2\, \pi\xi} \tag{17}$$

Из (17) видно, что при $\sqrt{{}^1\!/_2\, \Omega R_m} > 1$ магнитное поле вблизи плоскости симметрии имеет направление, противоположное направлению внешнего поля. Плотность в плоскости симметрии бесконечна, причем $\Phi(\xi) > 0$ только при значениях $\sqrt{{}^1\!/_2\, \Omega R_m}$, не превышающих некоторого критического значения. При $N_1 = 0$, т. е. для движения с постоянной скоростью, критическое значение, как легко показать из (17.3), равно двум.

Это означает, что только при $0 < \sqrt{{}^1\!/_2\, \Omega R_m} < 2$ полученное решение имеет физический смысл. Следует еще заметить, что данное решение характеризуется наличием теплоотвода в плоскости симметрии, интенсивность которой определяется величиной

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \lambda_0 \frac{T_0}{a_0} \frac{1}{\mu(\tau)} \frac{\partial \Theta_1}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=0} = \pi\lambda_0 \frac{T_0}{a_0} \frac{1}{\mu^2(\tau)}$$

Б. *Случай* $N_2 \neq 0$, $N_3 \neq 0$, $n + m \neq 0$. При этом совместное решение системы уравнений (8), удовлетворяющее условиям (10), имеет вид

$$\mu(\tau) = [1 + \mu'(0)\, s\tau]^{1/s} \quad \left(s = 2 + \frac{(\gamma + 1)\,[n(k-1) - mr]}{n + m}\right)$$

$$G(\tau) = [\mu(\tau)]^{(\gamma+1)(n+m+r+k-1)/2(n+m)}, \quad V(\tau) = [\mu(\tau)]^{(\gamma+1)[(n+m)(\varkappa-1)+r+k-1]/(n+m)} \tag{18}$$

Для совместности системы (8) физические константы n, m, k, r, $\varkappa$, γ должны удовлетворять соотношению

$$(\gamma + 1)\{r + k - 1 + 2\,[n(k - 1) - mr]\} + 2(n + m) = 0 \tag{19}$$

Постоянные N_1, N_2, N_3 однозначно определяются через n, m, k, r, $\varkappa$, γ, $\mu'(0)$

$$N_1 = -\left[1 + (\gamma + 1)\frac{n(k-1) - mr}{n + m}\right][\mu'(0)]^2$$

$$N_2 = \frac{(\gamma + 1)(n + m + r + k - 1)}{2(n + m)}\, \mu'(0)$$

$$N_3 = \frac{(\gamma + 1)\,[(n + m)(\varkappa - 1) + r + k - 1]}{n + m}\, \mu'(0) \tag{20}$$

Надо заметить, что если $N_1 = 0$, то (20.1) дает связь между физическими константами n, m, k, r, γ; при этом необходимость в условии (19) отпадает.