

УДК 539.3

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОМ ИЗГИБЕ МНОГОСВЯЗНОЙ ПЛИТЫ

С. А. Калоеров, А. В. Сероштанов

Донецкий национальный университет, 83001 Донецк

E-mails: kaloerov@mail.ru, aleks.serosht@gmail.com

С использованием комплексных потенциалов теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит получено решение задачи об изгибе плиты с произвольными отверстиями и трещинами. При этом с помощью конформных отображений, разложений голоморфных функций в ряды Лорана или по полиномам Фабера за счет выполнения граничных условий обобщенным методом наименьших квадратов задача сведена к переопределенной системе линейных алгебраических уравнений, решаемой методом сингулярных разложений. Описаны результаты численных исследований для плиты с двумя эллиптическими отверстиями или трещинами, с отверстием и трещиной, в том числе краевой. Исследовано влияние физико-механических свойств материала плиты и геометрических характеристик отверстий и трещин на основные характеристики электромагнитоупругого состояния.

Ключевые слова: пьезоплита с отверстиями и трещинами, комплексные потенциалы, обобщенный метод наименьших квадратов.

DOI: 10.15372/PMTF20220415

Введение. Тонкие пластины из пьезоматериалов широко используются в различных областях современной науки и техники в качестве элементов конструкций [1–4]. В условиях поперечного изгиба такие пластины называются тонкими плитами. При эксплуатации данных конструкций в элементах могут возникать высокие концентрации напряжений, что нужно учитывать при проектировании. Это обуславливает необходимость разработки надежных методов определения электромагнитоупругого состояния (ЭМУС) тонких многосвязных пьезоплит. В работах [5–7] предложены различные методы определения ЭМУС пьезоплит простой геометрической формы из материалов, имеющих простейшую микроструктуру. Однако в большинстве случаев элементы конструкций изготавливаются из материалов, обладающих анизотропными свойствами, более того, они могут иметь технологические отверстия и трещины, вблизи которых возникают высокие концентрации напряжений, приводящие к потере прочности конструкций. Достаточно надежные результаты определения ЭМУС многосвязных тонких плит позволяют получить методы, в которых используются комплексные потенциалы. Эти функции были введены для решения плоских задач электромагнитоупругости [8], а в работе [9] применены при решении задачи об изгибе тонких пьезоплит. В [10] с помощью указанных функций решены задачи об изгибе конечных и бесконечных односвязных плит.

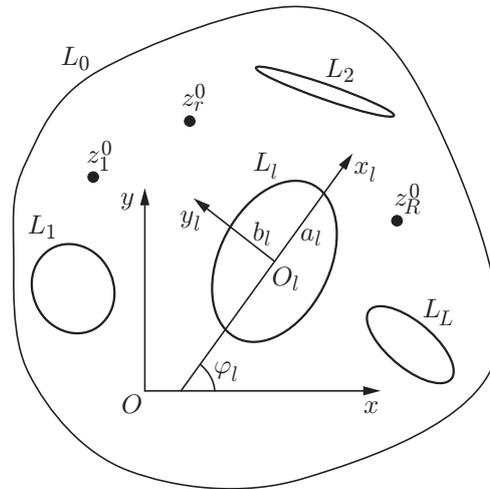


Рис. 1. Схема задачи

В данной работе с использованием комплексных потенциалов электромагнитоупругости построено общее решение задачи об изгибе пьезоплиты с произвольными отверстиями и трещинами. При этом с помощью конформных отображений и разложений голоморфных функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера комплексные потенциалы представлены в виде рядов с неизвестными коэффициентами, определение которых сводится к решению переопределенной системы линейных алгебраических уравнений методом сингулярных разложений. Для плиты с двумя отверстиями или трещинами, с отверстием и трещиной (внутренней или краевой) проведены численные исследования, с помощью которых установлены закономерности изменения ЭМУС в зависимости от физико-механических постоянных материала плиты и геометрических характеристик отверстий и трещин.

1. Постановка и метод решения задачи. Рассматривается тонкая электромагнитоупругая плита с отверстиями и трещинами в прямоугольной декартовой системе координат Oxy . В случае криволинейных отверстий их контуры можно аппроксимировать дугами эллипсов или берегами прямолинейных трещин. Поэтому будем считать, что плита занимает многосвязную область S , ограниченную внешним контуром L_0 и контурами эллиптических отверстий L_l ($l = \overline{1, L}$) с полуосями a_l, b_l (рис. 1), причем в локальных системах координат $O_l x_l y_l$ с началами в центрах эллипсов L_l и осями $O_l x_l$, направленными вдоль полуосей a_l , их параметрические уравнения имеют вид

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta,$$

а в основной системе координат Oxy — вид

$$x = x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \quad y = y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l.$$

Здесь φ_l — угол между положительными направлениями осей Ox и $O_l x_l$, отсчитываемый от положительного направления Ox против часовой стрелки; x_{0l}, y_{0l} — координаты начала локальной системы $O_l x_l y_l$ в основной системе Oxy ; θ — параметр, изменяющийся в интервале от 0 до 2π . Плита находится под действием приложенных к ее контурам L_l ($l = \overline{0, L}$) механических изгибающих моментов $m_l(s)$, поперечных сил $p_l(s)$, моментов электрической индукции $m_{dl}(s)$ и магнитной индукции $m_{bl}(s)$, сосредоточенных сил, механических и индукционных моментов во внутренних точках $z_r^0(x_r^0, y_r^0)$ области S . В частном случае, когда контур L_0 полностью уходит в бесконечность, будем рассматривать бесконечную многосвязную плиту. При этом будем предполагать, что на бесконечности действуют механические изгибающие и крутящие моменты $M_x^\infty, M_y^\infty, H_{xy}^\infty$ и моменты индукций (векторов индукций) $M_{dx}^\infty, M_{dy}^\infty, M_{bx}^\infty, M_{by}^\infty$, в случае необходимости моменты напряженностей

(векторов напряженностей) $H_{dx}^\infty, H_{dy}^\infty, H_{bx}^\infty, H_{by}^\infty$ можно найти с использованием уравнений состояния. Аналогичная процедура пересчета имеет место в случае задания на бесконечности вместо моментов индукций моментов напряженностей.

Если для решения задачи определения ЭМУС плиты использовать комплексные потенциалы электромагнитоупругости [9, 10], то оно сводится к определению из соответствующих граничных условий функций $W'_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$), где

$$z_k = x + \mu_k y \quad (1)$$

обобщенные комплексные переменные; μ_k — корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} l_{4s}(\mu) & l_{3g}(\mu) & l_{3p}(\mu) \\ l_{3g}(\mu) & l_{2\beta}(\mu) & l_{2\nu}(\mu) \\ l_{3p}(\mu) & l_{2\nu}(\mu) & l_{2\chi}(\mu) \end{vmatrix} = 0,$$

$l_{ij}(\mu)$ — полиномы вида

$$\begin{aligned} l_{4s}(\mu) &= -(D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + 4D_{66}\mu + D_{11}), \\ l_{3g}(\mu) &= C_{g22}\mu^3 + (C_{g12} + 2C_{g26})\mu^2 + (C_{g21} + 2C_{g16})\mu + C_{g11}, \\ l_{3p}(\mu) &= C_{p22}\mu^3 + (C_{p12} + 2C_{p26})\mu^2 + (C_{p21} + 2C_{p16})\mu + C_{p11}, \\ l_{2\beta}(\mu) &= C_{\beta22}\mu^2 + 2C_{\beta12}\mu + C_{\beta11}, \quad l_{2\nu}(\mu) = C_{\nu22}\mu^2 + 2C_{\nu12}\mu + C_{\nu11}, \\ l_{2\chi}(\mu) &= C_{\chi22}\mu^2 + 2C_{\chi12}\mu + C_{\chi11}, \end{aligned}$$

$D_{ij} = b_{ij}D_0$ — упругие жесткости плиты; $C_{gij} = c_{gij}D_0$, $C_{pij} = c_{pij}D_0$, $C_{\beta ij} = c_{\beta ij}D_0$, $C_{\nu ij} = c_{\nu ij}D_0$, $C_{\chi ij} = c_{\chi ij}D_0$ — электромагнитные жесткости плиты; $D_0 = 2h^3/3$ — постоянная, зависящая от толщины плиты h ; b_{ij} , c_{gij} , c_{pij} , $c_{\beta ij}$, $c_{\nu ij}$, $c_{\chi ij}$ — элементы обратной матрицы

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{16} & c_{g11} & c_{g21} & c_{p11} & c_{p21} \\ b_{12} & b_{22} & b_{26} & c_{g12} & c_{g22} & c_{p12} & c_{p22} \\ b_{16} & b_{26} & b_{66} & c_{g16} & c_{g26} & c_{p16} & c_{p26} \\ -c_{g11} & -c_{g12} & -c_{g16} & c_{\beta11} & c_{\beta12} & c_{\nu11} & c_{\nu12} \\ -c_{g21} & -c_{g22} & -c_{g26} & c_{\beta12} & c_{\beta22} & c_{\nu12} & c_{\nu22} \\ -c_{p11} & -c_{p12} & -c_{p16} & c_{\nu11} & c_{\nu12} & c_{\chi11} & c_{\chi12} \\ -c_{p21} & -c_{p22} & -c_{p26} & c_{\nu12} & c_{\nu22} & c_{\chi12} & c_{\chi22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{16} & g_{11} & g_{21} & p_{11} & p_{21} \\ s_{12} & s_{22} & s_{26} & g_{12} & g_{22} & p_{12} & p_{22} \\ s_{16} & s_{26} & s_{66} & g_{16} & g_{26} & p_{16} & p_{26} \\ -g_{11} & -g_{12} & -g_{16} & \beta_{11} & \beta_{12} & \nu_{11} & \nu_{12} \\ -g_{21} & -g_{22} & -g_{26} & \beta_{12} & \beta_{22} & \nu_{12} & \nu_{22} \\ -p_{11} & -p_{12} & -p_{16} & \nu_{11} & \nu_{12} & \chi_{11} & \chi_{12} \\ -p_{21} & -p_{22} & -p_{26} & \nu_{12} & \nu_{22} & \chi_{12} & \chi_{22} \end{pmatrix}^{-1},$$

s_{ij} — коэффициенты деформации материала, измеренные при постоянных индукциях электромагнитного поля; g_{ij} , p_{ij} — пьезоэлектрические и пьезомагнитные модули деформаций и напряженностей, измеренные при постоянных напряжениях и индукциях; β_{ij} , ν_{ij} , χ_{ij} — коэффициенты диэлектрической, магнитной и электромагнитной восприимчивости соответственно, измеренные при постоянных напряжениях.

Функции $W'_k(z_k)$, определенные в областях S_k , получаемых из области S аффинными преобразованиями (1) и ограниченных контурами L_{kl} , соответствующими контурам L_l при этих преобразованиях, в общем случае многосвязной плиты имеют вид [9, 10]

$$W'_k(z_k) = g\Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^L (A_{kl} z_k + B_{kl}) \ln(z_k - z_{kl}) + \sum_{r=1}^R (A_{kr}^0 z_k + B_{kr}^0) \ln(z_k - z_{kr}^0) + W'_{0k}(z_k), \quad (2)$$

где коэффициент $g = 0$ в случае конечной плиты и $g = 1$ в случае бесконечной плиты; Γ_k , A_{kl} , B_{kl} — постоянные, определяемые из решения следующих систем линейных алгебраических уравнений восьмого порядка:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (D_{11} + 2D_{16}\mu_k + D_{12}\mu_k^2 - \nu_k(C_{g11} + C_{g21}\mu_k) - \rho_k(C_{p11} + C_{p21}\mu_k))\Gamma_k = -M_x^\infty,$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (D_{12} + 2D_{26}\mu_k + D_{22}\mu_k^2 - \nu_k(C_{g12} + C_{g22}\mu_k) - \rho_k(C_{p12} + C_{p22}\mu_k))\Gamma_k = -M_y^\infty,$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (D_{16} + 2D_{66}\mu_k + D_{26}\mu_k^2 - \nu_k(C_{g16} + C_{g26}\mu_k) - \rho_k(C_{p16} + C_{p26}\mu_k))\Gamma_k = -H_{xy}^\infty,$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (C_{g11} + C_{g16}\mu_k + C_{g12}\mu_k^2 + \nu_k(C_{\beta11} + C_{\beta12}\mu_k) + \rho_k(C_{v11} + C_{v12}\mu_k))\Gamma_k = -M_{dx}^\infty,$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (C_{g21} + C_{g26}\mu_k + C_{g22}\mu_k^2 + \nu_k(C_{\beta12} + C_{\beta22}\mu_k) + \rho_k(C_{v12} + C_{v22}\mu_k))\Gamma_k = -M_{dy}^\infty,$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (C_{p11} + C_{p16}\mu_k + C_{p12}\mu_k^2 + \nu_k(C_{\nu11} + C_{\nu12}\mu_k) + \rho_k(C_{\chi11} + C_{\chi12}\mu_k))\Gamma_k = -M_{bx}^\infty,$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (C_{p21} + C_{p26}\mu_k + C_{p22}\mu_k^2 + \nu_k(C_{\nu12} + C_{\nu22}\mu_k) + \rho_k(C_{\chi12} + C_{\chi22}\mu_k))\Gamma_k = -M_{by}^\infty,$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \frac{1}{\mu_k} \Gamma_k = 0;$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(1, \mu_k, \nu_k, \rho_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k}, d_y, b_y\right) iA_{kl} = \left(0, 0, 0, 0, 0, \frac{P_l}{2\pi D_{11}}, 0, 0\right),$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(1, \mu_k, \nu_k, \rho_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k}, d_y, b_y\right) iB_{kl} = \left(0, 0, 0, 0, -\frac{M_{xl}}{2\pi D_{22}}, -\frac{M_{yl}}{2\pi D_{11}}, M_{Dl}, M_{Bl}\right), \quad (3)$$

$$\nu_k = \frac{\Delta_{1k}}{\Delta_{0k}}, \quad \rho_k = \frac{\Delta_{2k}}{\Delta_{0k}},$$

$$\Delta_{1k} = \begin{vmatrix} -l_{3g}(\mu_k) & l_{2\nu}(\mu_k) \\ -l_{3p}(\mu_k) & l_{2\chi}(\mu_k) \end{vmatrix}, \quad \Delta_{2k} = \begin{vmatrix} l_{2\beta}(\mu_k) & -l_{3g}(\mu_k) \\ l_{2\nu}(\mu_k) & -l_{3p}(\mu_k) \end{vmatrix}, \quad \Delta_{0k} = \begin{vmatrix} l_{2\beta}(\mu_k) & l_{2\nu}(\mu_k) \\ l_{2\nu}(\mu_k) & l_{2\chi}(\mu_k) \end{vmatrix},$$

P_l, M_{xl}, M_{yl} — главный вектор и компоненты главного момента механических усилий, приложенных к контуру отверстия L_l ; M_{Dl}, M_{Bl} — суммарные моменты электрической и магнитной индукций на контуре L_l ; A_{kr}^0, B_{kr}^0 — постоянные, определяемые решением систем, получаемых из уравнений (3) путем замены A_{kl}, B_{kl} на A_{kr}^0, B_{kr}^0 , а $P_l, M_{xl}, M_{yl}, M_{Dl}, M_{Bl}$ на сосредоточенную силу P_r^0 и компоненты сосредоточенных моментов $M_{xr}^0, M_{yr}^0, M_{Dr}^0, M_{Br}^0$ во внутренней точке плиты z_r^0 ; z_{kl}, z_{kr}^0 — точки в областях S_k , соответствующие при аффинных преобразованиях произвольным точкам внутри контуров L_l и точкам, в которых приложены сосредоточенные силы z_r^0 ; $W'_{0k}(z_k)$ — голоморфные в областях S_k функции, которые можно представить в виде

$$W'_{0k}(z_k) = \sum_{l=g}^L W'_{kl}(z_k),$$

$W'_{k0}(z_k)$ — функции, голоморфные внутри внешних контуров L_{k0} ; $W'_{kl}(z_k)$ ($l = \overline{1, L}$) — функции, голоморфные вне контуров отверстий L_{kl} . Для построения указанных функций используются конформные отображения.

Отобразим конформно внешности единичных кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{kl} , используя формулы

$$z_k = z_{kl} + R_{kl}(\zeta_{kl} + m_{kl}/\zeta_{kl}), \quad (4)$$

где $z_{kl} = x_{0l} + \mu_k y_{0l}$; $R_{kl} = [a_l(\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + ib_l(\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)]/2$; $m_{kl} = [a_l(\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - ib_l(\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)]/(2R_{kl})$. В результате конформных отображений функции $W'_{k0}(z_k)$, голоморфные внутри L_{k0} , можно разложить в ряды по полиномам Фабера для внутренностей контуров L_{k0} или в степенные ряды

$$W'_{k0}(z_k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{k0n} \left(\frac{z_k - z_{k0}}{R_{k0}} \right)^n,$$

где R_{k0} — постоянные, определяемые из конформных отображений (4) для контуров L_{k0} . Функции $W'_{kl}(z_k)$ ($l = \overline{1, L}$), голоморфные вне отверстий с контурами L_{kl} , в результате конформных отображений (4) в областях переменных ζ_{kl} являются голоморфными вне единичных кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$, включая бесконечно удаленную точку, и их можно разложить в ряды Лорана по отрицательным степеням ζ_{kl} , т. е.

$$W'_{kl}(z_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{kln}}{\zeta_{kl}^n}.$$

Окончательно для комплексных потенциалов (2) имеем

$$W'_k(z_k) = (1-g)a_{k00} + g\Gamma_k z_k + N_k(z_k) + \sum_{l=g}^L \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi_{kln}(z_k),$$

где

$$N_k(z_k) = \sum_{l=1}^L (A_{kl} z_k + B_{kl}) \ln(z_k - z_{kl}) + \sum_{r=1}^R (A_{kr}^0 z_k + B_{kr}^0) \ln(z_k - z_{kr}^0),$$

$$\varphi_{k0n}(z_k) = \left(\frac{z_k - z_{k0}}{R_{k0}} \right)^n, \quad \varphi_{kln}(z_k) = \frac{1}{\zeta_{kl}^n} \quad (l = \overline{1, L}),$$

a_{kln} — неизвестные постоянные, определяемые из граничных условий на контурах плиты

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 g_{ikp} W'_k(t_k) = f_{ip}(t), \quad (5)$$

g_{ikp} — постоянные; $f_{ip}(t)$ — функции, зависящие от способа нагружения или подкрепления контура L_p .

Для многосвязных областей граничные условия удобнее задавать в дифференциальной форме, чтобы они не содержали аддитивных постоянных. Граничные условия, полученные из соотношений (5) путем дифференцирования по дугам контуров, имеют вид

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 g_{ikp} \delta_{k,s} W''_k(t_k) = \frac{df_{ip}(t)}{ds} \quad (i = \overline{1, 4}), \quad (6)$$

где

$$W''_k(z_k) = g\Gamma_k + N'_k(z_k) + \sum_{l=g}^L \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi'_{kln}(z_k),$$

$$N'_k(z_k) = \sum_{l=1}^L \left(A_{kl} \ln(z_k - z_{kl}) + \frac{A_{kl} z_k + B_{kl}}{z_k - z_{kl}} \right) + \sum_{r=1}^R \left(A_{kr}^0 \ln(z_k - z_{kr}^0) + \frac{A_{kr}^0 z_k + B_{kr}^0}{z_k - z_{kr}^0} \right), \quad (7)$$

$$\delta_{k,s} = \frac{dz_k}{ds}, \quad \varphi'_{k0n}(z_k) = \frac{n(z_k - z_{k0})^{n-1}}{R_{k0}^n},$$

$$\varphi'_{kln}(z_k) = -\frac{n}{R_{kl} \zeta_{kl}^{n-1} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})} \quad (l = \overline{1, L}).$$

Для того чтобы были выполнены граничные условия (6), необходимо использовать обобщенный метод наименьших квадратов [11, 12]. Для этого на каждом контуре L_p выберем систему точек $M_{pm}(x_{pm}, y_{pm})$ ($p = \overline{0, L}$; $m = \overline{1, M_p}$), в которых потребуем выполнения соответствующих граничных условий. Подставляя функции (7) в граничные условия (6) в точках $M_{pm}(x_{pm}, y_{pm})$, для определения неизвестных постоянных a_{kln} получаем систему линейных алгебраических уравнений вида

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \sum_{l=g}^L \sum_{n=1}^{\infty} g_{ikp} \delta_{k,s} \varphi'_{kln}(t_{kpm}) a_{kln} = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 g_{ikp} \delta_{k,s} (g\Gamma_k + N'_k(t_{kpm})) + \frac{df_{ip}(t_{pm})}{ds} \quad (8)$$

$$(i = \overline{1, 4}; \quad p = \overline{g, L}; \quad m = \overline{1, M_p}).$$

Помимо уравнений (8) для каждого контура отверстия должны выполняться уравнения

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 i a_{kp1} = 0 \quad (p = \overline{1, L}), \quad (9)$$

следующие из условия однозначности прогиба при полном обходе контуров отверстий L_p .

Для определения постоянных a_{kln} и c_j систему (8), дополненную уравнениями (9), будем решать методом сингулярных разложений [13, 14]. После нахождения псевдорешений этой системы функции $W'_k(z_k)$ будут известными, тогда по формулам, приведенным в [9, 10], можно вычислить механические изгибающие моменты, поперечные силы, моменты электрической и магнитной индукции в любой точке плиты. При этом, в случае если некоторый эллипс переходит в прямолинейный разрез-трещину, на его концах можно вычислить также коэффициенты интенсивности моментов (КИМ) [15].

Как частные случаи из приведенного решения задачи электромагнитоупругости (ЭМУ) следуют решения задач электроупругости (ЭУ), магнитоупругости (МУ) и теории упругости (ТУ). Установлено, что при проведении численных исследований эти решения можно получить по одной (общей) программе, если рассматривается материал с электромагнитными постоянными

$$g'_{ij} = \lambda_g g_{ij}, \quad \beta'_{ij} = \beta_{ij}/\lambda_g, \quad p'_{ij} = \lambda_p p_{ij}, \quad \chi'_{ij} = \chi_{ij}/\lambda_p, \quad \nu'_{ij} = \lambda_{gp} \nu_{ij},$$

где $\lambda_g, \lambda_p, \lambda_{gp}$ — параметры. При этом для задач ЭМУ $\lambda_g = \lambda_p = \lambda_{gp} = 1$, для задач ЭУ $\lambda_g = 1, \lambda_p = \lambda_{gp} \leq 10^{-3}$, для задач МУ $\lambda_p = 1, \lambda_g = \lambda_{gp} \leq 10^{-3}$, для задач ТУ $\lambda_p = \lambda_g = \lambda_{gp} \leq 10^{-3}$. Также заметим, что по общей программе можно решать задачу электромагнитостатики для абсолютно жесткой плиты. В этом случае следует рассмотреть модельный упругий материал с постоянными $s'_{ij} = \lambda_s s_{ij}$ и для задачи электромагнитостатики выбрать $\lambda_s \leq 10^{-3}$.

2. Результаты численных исследований. Проведены численные исследования для бесконечной плиты с эллиптическими отверстиями и трещинами при их различном положении и сочетании, в случае когда на контурах механические изгибающие моменты, поперечные силы, моменты электрической индукции и магнитной индукции равны нулю. Были выбраны следующие материалы: композит на основе $\text{BaTiO}_3\text{-CoFe}_2\text{O}_4$ (материал М1) [16, 17]; композит, упругие, пьезоэлектрические и электрические постоянные которого соответствуют селениду кадмия CdSe , а пьезомагнитные и магнитные — BaTiO_3 (материал М2) [18]; композит, упругие, пьезоэлектрические и электрические постоянные которого соответствуют материалу PZT-4, а пьезомагнитные и магнитные — CoFe_2O_4 (материал М3) [18].

При проведении численных исследований количество членов в бесконечных рядах (7) и количество точек M_p на каждом контуре L_p , в которых удовлетворялись краевые условия для системы уравнений (8), увеличивались до тех пор, пока краевые условия на контурах не начинали выполняться с достаточно высокой степенью точности (абсолютная погрешность не превышала 10^{-3}). Как показали численные исследования, для выполнения краевых условий в рассмотренных задачах в зависимости от расстояния между концентраторами напряжений в рядах (7) достаточно оставлять от 10 до 100 членов для каждого отверстия и выбирать на каждом контуре от 100 до 500 точек. Ниже приведены некоторые полученные результаты численных исследований в случае действия на бесконечности изгибающих механических моментов $M_y^\infty = m_y$ (при этом $M_x^\infty = H_{xy}^\infty = M_{dy}^\infty = M_{dy}^\infty = M_{by}^\infty = M_{by}^\infty = 0$) или моментов магнитной индукции $M_{by}^\infty = m_{by}$ (при этом $M_x^\infty = M_y^\infty = H_{xy}^\infty = M_{dy}^\infty = M_{by}^\infty = M_{by}^\infty = 0$). Ниже приводятся значения основных характеристик ЭМУС с точностью до множителя, характеризующего интенсивность указанных приложенных воздействий. Исследования проводились для задач ЭМУ, ЭУ, МУ, ТУ. Результаты расчетов представлены только для задач ЭМУ и ТУ, так как учет электрических свойств материала оказывает незначительное влияние на основные характеристики ЭМУС (значения характеристик в задачах ЭУ и ТУ близки), тогда как учет магнитных свойств существенно влияет на них (значения величин в задачах ЭМУ и МУ близки).

В табл. 1 для плиты с двумя круговыми отверстиями радиусом a_1 ($a_2 = b_2 = b_1 = a_1$), центры которых расположены на оси Ox , при действии на бесконечности механических моментов $M_y^\infty = m_y$ для задач ЭМУ и ТУ в зависимости от отношения c/a_1 (c — расстояние между контурами отверстий) и центрального угла отверстия θ , отсчитываемого от оси Ox против часовой стрелки, приведены значения моментов M_S вблизи контура левого отверстия на площадках, перпендикулярных контуру. При этом расстояние между контурами отверстий равно $c = x_{20} - x_{10} - 2a_1$, где x_{10}, x_{20} — аффиксы центров круговых отверстий;

Таблица 1

Значения моментов M_S вблизи контура левого отверстия в плите с двумя круговыми отверстиями при действии механических моментов $M_y^\infty = m_y$

Материал	θ	M_S											
		Задача ЭМУ						Задача ТУ					
		$c/a_1 = \infty$	$c/a_1 = 2$	$c/a_1 = 1$	$c/a_1 = 0,5$	$c/a_1 = 0,1$	$c/a_1 = -0,5$	$c/a_1 = -1$	$c/a_1 = \infty$	$c/a_1 = 1$	$c/a_1 = 0,1$		
М1	0	1,845	2,075	2,416	3,039	6,051	—	—	1,835	2,407	6,022		
	$\pi/2$	0,215	0,203	0,203	0,207	0,217	0,223	0,218	0,215	0,203	0,218		
	0	2,184	2,378	2,703	3,381	6,971	—	—	1,876	2,454	6,147		
М2	$\pi/6$	1,457	1,547	1,646	1,737	1,509	—	—	1,424	1,617	1,385		
	$\pi/3$	0,336	0,324	0,317	0,304	0,243	0,122	—	0,565	0,519	0,280		
	$\pi/2$	0,231	0,218	0,219	0,225	0,237	0,240	0,233	0,146	0,138	0,148		
	$2\pi/3$	0,336	0,341	0,354	0,373	0,418	0,451	0,418	0,565	0,632	0,743		
	$5\pi/6$	1,457	1,517	1,568	1,629	1,755	1,808	1,702	1,424	1,691	1,540		
	π	2,184	2,267	2,332	2,406	2,554	2,605	2,475	1,876	2,010	2,173		
М3	0	1,719	1,967	2,317	2,921	5,724	—	—	1,507	2,103	4,950		
	$\pi/2$	-0,008	-0,007	-0,006	-0,005	-0,005	-0,007	-0,007	-0,048	-0,047	-0,049		

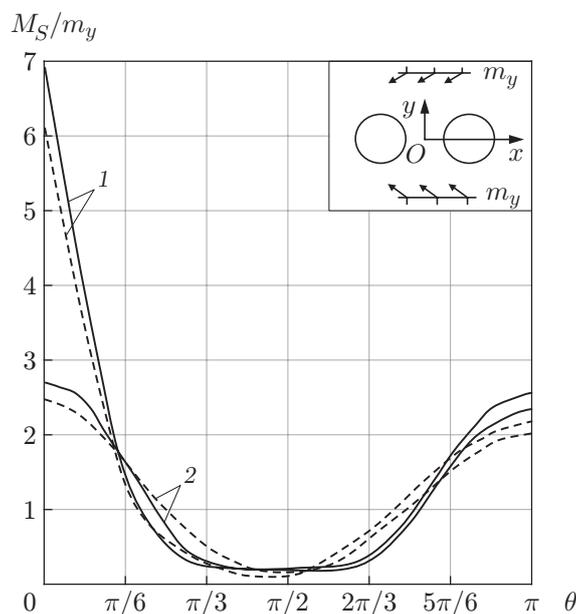


Рис. 2. Схема плиты из материала М2 с двумя круговыми отверстиями и распределение моментов M_S/m_y вблизи контура левого отверстия при действии механических моментов $M_y^\infty = m_y$:

сплошные линии — задача ЭМУ, штриховые — задача ТУ; 1 — $c/a_1 = 0,1$, 2 — $c/a_1 = 1,0$

значения $c = 0$ и $c < 0$ соответствуют случаям, когда контуры отверстий соответственно соприкасаются и пересекаются. На рис. 2 в случае плиты из “наиболее” анизотропного по упругим свойствам материала М2 (“степень анизотропии” характеризуется отношением s_{11}/s_{22}) приведены распределения моментов M_S при различных значениях c/a_1 . В табл. 2 для плиты с двумя круговыми отверстиями при действии на бесконечности моментов магнитной индукции $M_{by}^\infty = m_{by}$ приведены значения механических моментов M_S вблизи контура левого отверстия с точностью до множителя m_{by} .

Из табл. 1, 2, рис. 2 и других полученных результатов следует, что при сближении отверстий значения основных характеристик ЭМУС в зоне между ними резко увеличиваются, незначительно изменяясь в других зонах. В тех случаях, когда контуры отверстий пересекаются, по мере сближения центров отверстий значения основных характеристик уменьшаются, а при совпадении этих центров ($x_{20} = x_{10}$, $c = -2a_1$), как и следовало ожидать, значения этих характеристик оказываются такими же, как и в плите с одним отверстием. При действии механических моментов наибольшие изгибающие моменты возникают в плите из “наиболее” анизотропного по упругим свойствам материала М2; при действии моментов магнитной индукции наибольшие механические моменты возникают в плите из материала М3. Учет пьезосвойств материала (ср. значения моментов в задачах ЭМУ и ТУ) оказывает значительное влияние на значения изгибающих моментов, особенно в зонах их наибольшей концентрации. Следовательно, при исследовании прочности элементов конструкций с отверстиями, изготовленных из пьезоматериалов, нельзя ограничиваться решением задачи ТУ, а нужно решать задачу ЭМУ. При действии на плиту моментов индукции электромагнитного поля в ней возникают значительные механические моменты, которые можно определить, только решив задачу ЭМУ с учетом пьезосвойств. Эти моменты очень большие для плиты из “наиболее анизотропного по магнитным свойствам” материала М3. Из приведенных результатов также следует, что с увеличением расстояния между отверстиями значения основных характеристик ЭМУС вблизи конту-

Таблица 2

Значения моментов M_S вблизи контура левого отверстия в плите с двумя круговыми отверстиями при действии моментов $M_{by}^\infty = m_{by}$

Материал	θ	M_S				
		$c/a_1 = \infty$	$c/a_1 = 2$	$c/a_1 = 1$	$c/a_1 = 0,5$	$c/a_1 = 0,1$
М1	0	-0,529	-0,396	-0,377	-0,534	-1,631
	$\pi/2$	-1,372	-1,301	-1,308	-1,339	-1,404
М2	0	-7,576	-2,573	1,836	3,163	-14,643
	$\pi/2$	-31,091	-29,329	-29,052	-29,442	-30,867
М3	0	-17,809	-15,824	-15,087	-17,860	-48,795
	$\pi/6$	24,514	32,142	38,546	43,982	36,769
	$\pi/3$	1,674	3,466	2,027	-2,335	-17,462
	$\pi/2$	-38,654	-37,345	-37,044	-37,292	-38,546
	$2\pi/3$	1,674	5,539	8,012	10,389	14,558
	$5\pi/6$	24,514	27,606	29,133	30,433	32,415
	π	-17,809	-18,041	-18,673	-19,611	-21,968

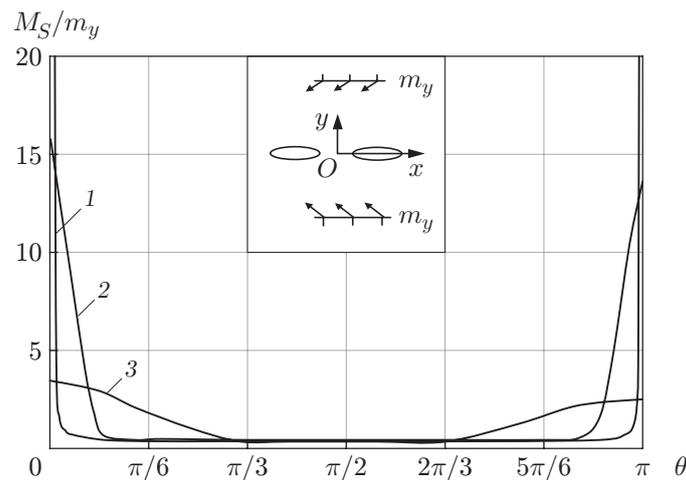


Рис. 3. Схема плиты с двумя одинаковыми эллиптическими отверстиями ($a_2 = a_1$, $b_2 = b_1$) из материала М2 и распределение моментов M_S/m_y вблизи контура левого отверстия в случае действия моментов $M_y^\infty = m_y$ ($c/a_1 = 0,5$) при различных значениях отношения b_1/a_1 :
1 — $b_1/a_1 = 0$, 2 — $b_1/a_1 = 0,1$, 3 — $b_1/a_1 = 1,0$

ров отверстий уменьшаются и при расстояниях между контурами, больших диаметра отверстия ($c/a_1 > 2$), влияние одного отверстия на ЭМУС плиты вблизи другого отверстия незначительно и им можно пренебречь, считая плиту ослабленной одним отверстием.

Как показывают расчеты, при уменьшении отношения длин полуосей эллипса, например отношения b_l/a_l , значения основных характеристик ЭМУС вблизи концов большой оси бесконечно увеличиваются, на достаточно большом расстоянии от концов малой оси они уменьшаются и незначительно изменяются от точки к точке. При $b_l/a_l \leq 10^{-3}$ эллипс можно считать трещиной, вычисляя для ее концов КИМ. На рис. 3 для плиты с двумя одинаковыми эллиптическими отверстиями ($a_2 = a_1$, $b_2 = b_1$), расстояние между которыми равно половине длины большой полуоси эллипса ($c/a_1 = 0,5$), при действии момента $M_y^\infty = m_y$ для задачи ЭМУ приведены значения моментов M_S вблизи контура левого отверстия при различных значениях отношения b_1/a_1 .

Таблица 3

Значения КИМ в вершинах левой трещины в плите с двумя трещинами

c/a_1	k_1^-	k_1^+	c/a_1	k_1^-	k_1^+
100	1,000	1,000	0,01	1,224	3,843
2	1,028	1,048	0,001	1,268	9,254
1	1,052	1,112	0	1,414	—
0,5	1,081	1,229	-1	1,225	—
0,1	1,151	1,795			

Таблица 4

Значения моментов M_S вблизи контура отверстия и КИМ в вершинах трещины для плиты с круговым отверстием и внутренней трещиной

c/a_1	M_S							k_1^-	k_1^+
	$\theta = 0$	$\theta = \pi/6$	$\theta = \pi/3$	$\theta = \pi/2$	$\theta = 2\pi/3$	$\theta = 5\pi/6$	$\theta = \pi$		
2,0	2,304	1,516	0,335	0,229	0,344	1,495	2,233	1,081	1,047
1,0	2,501	1,581	0,334	0,233	0,354	1,526	2,271	1,186	1,087
0,5	2,937	1,639	0,330	0,239	0,369	1,563	2,314	1,357	1,136
0,1	6,299	1,374	0,287	0,247	0,400	1,636	2,396	1,992	1,244

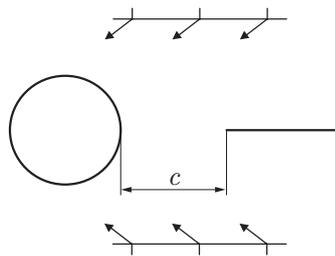


Рис. 4

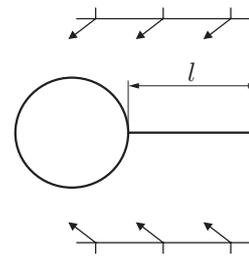


Рис. 5

Рис. 4. Схема плиты с круговым отверстием и внутренней трещиной

Рис. 5. Схема плиты с круговым отверстием и краевой трещиной

В табл. 3 для изготовленной из материала М2 плиты с двумя трещинами на оси Ox , длина каждой из которых равна $2a_1$ ($b_2 = b_1 = 10^{-4}$, $a_2 = a_1$), в зависимости от отношения c/a_1 (c — расстояние между трещинами) в случае механических воздействий $M_y^\infty = m_y$ приведены значения соответствующих изгибающему моменту M_y КИМ k_1^- (левая вершина) и k_1^+ (правая вершина) для левой трещины, рассматриваемой как предельный случай эллипса L_1 . Из табл. 3 следует, что при уменьшении расстояния между трещинами КИМ в их вершинах, особенно во внутренних, увеличиваются; при весьма малых расстояниях между трещинами КИМ во внешних вершинах такой же, как для трещины, длина которой в два раза больше. Это обусловлено тем, что для трещины длиной $2a_1$ КИМ вычисляется по формуле $k_1^\pm = \sqrt{a_1}$, а для трещины длиной $4a_1$ — по формуле $k_1^\pm = \sqrt{2a_1}$, т. е. эти КИМ различаются множителем $\sqrt{2}$. Отрицательное значение параметра c/a_1 в табл. 3 имеет тот же смысл, что и отрицательные значения c/a_1 в табл. 1 для плиты с двумя отверстиями.

Представляет интерес исследование влияния на ЭМУС плиты с отверстием появления в ней внутренних и краевых трещин. Проведено исследование значений изгибающих моментов M_S вблизи контура отверстия и КИМ в вершинах трещины в случае плиты из материала М2 при действии моментов $M_y^\infty = m_y$.

Таблица 5

Значения моментов M_S вблизи контура отверстия и КИМ в вершине трещины в плите из материала М2 с круговым отверстием и краевой трещиной в зависимости от длины трещины

l/a_1	M_S									k_1^+
	$\theta = \pi/180$	$\theta = \pi/12$	$\theta = \pi/6$	$\theta = \pi/4$	$\theta = \pi/3$	$\theta = \pi/2$	$\theta = 2\pi/3$	$\theta = 5\pi/6$	$\theta = \pi$	
0	2,183	2,003	1,457	0,767	0,336	0,231	0,336	1,457	2,184	—
0,1	0,370	1,833	1,413	0,751	0,331	0,231	0,338	1,460	2,187	0,635
0,5	0,140	0,879	0,970	0,581	0,276	0,233	0,361	1,510	2,241	1,115
1,0	0,090	0,531	0,621	0,405	0,224	0,241	0,399	1,603	2,348	1,283
2,0	0,057	0,281	0,306	0,205	0,160	0,258	0,468	1,800	2,582	1,518
5,0	0,022	0,007	-0,076	-0,086	0,039	0,275	0,619	2,317	3,226	1,902
10,0	-0,004	-0,200	-0,385	-0,348	-0,093	0,272	0,787	2,991	4,090	2,521

В табл. 4 для плиты с круговым отверстием радиусом a_1 и внутренней трещиной длиной $2a_1$, находящейся на расстоянии c от контура (рис. 4), приведены значения моментов M_S вблизи контура отверстия и КИМ k_1^- , k_1^+ в вершинах трещины в зависимости от отношения c/a_1 . Из табл. 4 следует, что в плите с круговым отверстием и внутренней трещиной по мере приближения трещины к отверстию (при уменьшении c/a_1) значения изгибающих моментов вблизи его контура и КИМ в вершинах трещины резко увеличиваются в зоне между отверстием и трещиной и незначительно изменяются в других зонах. Если трещина удалена от отверстия на расстояние, превышающее его диаметр (в данном случае длину трещины), влиянием отверстия и трещины на напряженное состояние плиты можно пренебречь. Результаты сравнения данных, приведенных в табл. 1, 3, 4, показывают, что при одних и тех же расстояниях в плите с отверстием и внутренней трещиной концентрация моментов (и соответственно напряжений) вблизи контура отверстия меньше, чем в плите с двумя отверстиями; в плите с отверстием и трещиной значения КИМ в вершинах трещины (и соответственно коэффициента интенсивности напряжений) больше, чем в плите с двумя трещинами.

В табл. 5 для плиты с круговым отверстием радиусом a_1 и краевой трещиной длиной l (рис. 5) приведены значения изгибающего момента M_S вблизи контура отверстия и КИМ k_1^+ в вершине трещины в зависимости от отношения l/a_1 . Наличие краевой трещины приводит к резкому уменьшению значений изгибающих моментов в зоне выхода трещины на контур (в окрестности точки $\theta = 0$) и их увеличению в окрестности точки $\theta = \pi$, причем с увеличением длины трещины значения момента в указанной зоне и КИМ в вершине трещины растут. Если длина трещины большая, то значение момента вблизи указанной точки также большое, а значения КИМ увеличиваются так же, как в случае плиты с одной трещиной, т. е. по закону \sqrt{l} . Создание отверстия в конце трещины приводит к уменьшению концентрации моментов в этой области, но при этом увеличиваются значения КИМ во второй вершине трещины.

Заключение. Таким образом, с использованием комплексных потенциалов теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит [9, 10] решена общая задача определения ЭМУС пьезоплиты с отверстиями и трещинами. При этом с помощью конформных отображений, разложений голоморфных функций в ряды Лорана или по полиномам Фабера за счет выполнения граничных условий обобщенным методом наименьших квадратов задача сведена к переопределенной системе линейных алгебраических уравнений. Для плиты с двумя отверстиями, с двумя трещинами, с отверстием и трещиной проведены численные исследования, с помощью которых установлены закономерности изменения ЭМУС в зависимости от физико-механических постоянных материала плиты и геометрических характеристик отверстий и трещин, их сочетания и положения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Берлинкур Д.** Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях // Физическая акустика / Д. Берлинкур, Д. Керран, Г. Жаффе. М.: Мир, 1966. Т. 1, ч. А. С. 204–326.
2. **Бичурин М. И.** Магнитоэлектрические материалы / М. И. Бичурин, В. М. Петров, Д. А. Филиппов, Г. Сринивасан, С. В. Нан. М.: Акад. естествознания, 2006.
3. **Пятаков А. П.** Магнитоэлектрические материалы и их практическое применение // Бюл. Рос. магнит. о-ва. 2006. Т. 5, № 2. С. 1–3.
4. **Srinivas S., Jiang Y. L.** The effective magnetoelectric coefficients of polycrystalline multiferroic composites // Acta Materialia. 2005. V. 53. P. 4135–4142.
5. **Eringen A. C.** Theory of electromagnetic elastic plates // Intern. J. Engng Sci. 1989. V. 27, N 4. P. 363–375.
6. **Librescu L., Hasanyan D., Ambur D. R.** Electromagnetically conducting elastic plates in a magnetic field: modeling and dynamic implications // Intern. J. Non-Linear Mech. 2004. V. 39, N 5. P. 723–739.
7. **Gales C., Baroiu N.** On the bending of plates in the electromagnetic theory of microstretch elasticity // Z. angew. Math. Mech. 2014. Bd 94, N 1/2. S. 55–71.
8. **Калоеров С. А., Петренко А. В.** Двумерная задача электромагнитоупругости для многосвязных сред // Мат. методы и физ.-мех. поля. 2008. Т. 51, № 2. С. 208–221.
9. **Калоеров С. А.** Комплексные потенциалы теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит // Вестн. Дон. нац. ун-та. Сер. А. Естеств. науки. 2019. № 3/4. С. 37–57.
10. **Калоеров С. А., Сероштанов А. В.** Исследование изгиба тонких электромагнитоупругих плит // ПМТФ. 2022. Т. 63, № 2. С. 151–165.
11. **Воеводин В. В.** Вычислительные основы линейной алгебры. М.: Наука, 1977.
12. **Форсайт Дж.** Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. М.: Мир, 1980.
13. **Drmaç Z., Veseliç K.** New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 1 // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2008. V. 29, N 4. P. 1322–1342.
14. **Drmaç Z., Veseliç K.** New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 2 // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2008. V. 29, N 4. P. 1343–1362.
15. **Калоеров С. А., Занько А. И.** Решение задачи линейной вязкоупругости для многосвязных анизотропных плит // ПМТФ. 2017. Т. 58, № 2. С. 141–151.
16. **Yamamoto Y.** Electromagnetomechanical interactions in deformable solids and structures / Y. Yamamoto, K. Miya. Amsterdam: Elsevier Sci. North Holland, 1987.
17. **Tian W.-Y., Gabbert U.** Multiple crack interaction problem in magneto-electroelastic solids // Europ. J. Mech. Pt A. 2004. V. 23. P. 599–614.
18. **Hou P. F., Teng G.-H., Chen H.-R.** Three-dimensional Greens function for a point heat source in two-phase transversely isotropic magneto-electro-thermo-elastic material // Mech. Materials. 2009. V. 41. P. 329–338.

*Поступила в редакцию 5/VII 2021 г.,
после доработки — 29/X 2021 г.
Принята к публикации 29/XI 2021 г.*