

УДК 532

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ И ТЕПЛООТДАЧИ К ПОРИСТОМУ ДИСКУ, ВРАЩАЮЩЕМУСЯ В ЖИДКОСТИ РЕЙНЕРА — РИВЛИНА

Хазем Али Аттиа

Университет им. Короля Сауда, 81999 Бурайда, Королевство Саудовская Аравия  
E-mail: ah1113@yahoo.com

Исследованы нестационарное течение и теплоотдача к пористому диску бесконечного радиуса, вращающемуся в неньютоновской жидкости с законом трения, подчиняющимся соотношению Рейнера — Ривлина. Рассмотрены влияние свойств неньютоновской жидкости, а также вдува (отсоса) с поверхности диска на распределения скорости и температур и характеристики теплообмена. Численное решение получено в широком диапазоне определяющих параметров.

Ключевые слова: неньютоновская жидкость, пористый диск, вдув, отсос.

**Введение.** Течения, вызванные вращающимся диском, встречаются в различных технических устройствах и процессах, таких как вращающиеся машины, смазка, океанография, запоминающие устройства компьютеров, вискозиметрия и процессы роста кристаллов. Задача о течении жидкости, обусловленном вращением диска, была сформулирована Карманом в 1921 г. [1]. В работе [2] получено асимптотическое решение данной задачи в стационарной постановке. Автор работы [3] уточнил решение [2] и рассмотрел задачу в случае неустановившегося движения. Влияние отсоса с поверхности диска рассмотрено в [4], где получено решение при отсутствии вращения на бесконечности. В работе [5] с использованием асимптотического метода рассмотрено решение задачи при малом параметре отсоса в случае вращения на бесконечности. Влияние равномерного вдува через поверхность диска на характеристики течения, формируемого вращающимся диском, проанализировано в [6]. Во всех перечисленных выше работах принималось, что жидкость ньютоновская. Стационарное течение неньютоновской жидкости вблизи вращающегося диска при равномерном отсосе рассмотрено в [7], причем решение получено при малом отличии характеристик жидкости от ньютоновской. Течение неньютоновской жидкости между двумя дисками, один из которых вращается, а другой покоится, исследовалось в работе [8].

Проблема теплоотдачи от вращающегося диска, поддерживаемого при постоянной температуре, впервые рассмотрена в работе [9] для случая стационарного течения при варьировании числа Прандтля. Влияние сжимаемости газа на характеристики течения и теплообмен изучено в [10]. Авторы работ [11, 12] исследовали стационарный теплообмен с поверхности вращающегося диска постоянной температуры при произвольных числах Прандтля. В дальнейшем многие авторы [13–17] изучали процесс теплообмена для различных условий.

В настоящей работе исследовано нестационарное ламинарное течение неньютоновской жидкости с моделью вязкости Рейнера — Ривлина, обусловленное равномерным вращением бесконечно большого диска, при учете теплообмена. С поверхности диска осуществляется равномерный отсос (или вдув). Температура диска мгновенно повышается и далее

считается неизменной. Нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных интегрируются численно с использованием конечных разностей. Ввиду того, что рассматривается движение из состояния покоя, возникает разрыв между начальными и граничными условиями, в результате чего появляются численные осцилляции. Эти осцилляции были ликвидированы выбором подходящей трансформации координат. В работе представлено и обсуждается влияние равномерного вдува (отсоса) через поверхность диска на характеристики течения неньютоновской жидкости и теплообмен.

**Основные уравнения.** Рассмотрим диск, лежащий в плоскости  $z = 0$ . Пространство  $z > 0$  заполнено вязкой несжимаемой неньютоновской жидкостью. Движение начинается мгновенно из состояния покоя благодаря вращению диска с постоянной угловой скоростью  $\omega$  относительно оси  $r = 0$ , при этом с поверхности диска осуществляется равномерный вдув (отсос). Скорость отсоса (вдува) варьируется в широком диапазоне.

Уравнения нестационарного движения записываются в виде

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \quad (1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} \right) = \frac{\partial \tau_r^r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_r^z}{\partial z} + \frac{\tau_r^r - \tau_\varphi^r}{r}; \quad (2)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} \right) = \frac{\partial \tau_\varphi^r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_\varphi^z}{\partial z} + 2 \frac{\tau_\varphi^r}{r}; \quad (3)$$

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{\partial \tau_z^r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_z^z}{\partial z} + \frac{\tau_z^r}{r}, \quad (4)$$

где  $u, v, w$  — компоненты вектора скорости в направлениях  $r, \varphi, z$  соответственно;  $t$  — время;  $\rho$  — плотность жидкости. Соотношение Рейнера — Ривлина для неньютоновской жидкости приведено в [7, 8]:

$$\tau_j^i = 2\mu e_j^i + 2\mu_c e_k^i e_j^k - p \delta_j^i, \quad e_j^j = 0. \quad (5)$$

Здесь  $p$  — давление (величина  $p$  — не термодинамическое давление, а произвольный скаляр, поскольку  $\rho = \text{const}$ );  $\tau_j^i$  — тензор напряжения;  $e_j^i$  — тензор скорости деформации;  $\mu$  — вязкость;  $\mu_c = \alpha(c + \sum \sum e_j^i e_j^i)/2$  — коэффициент кроссвязкости,  $c = \text{const}$ ,  $\alpha$  — достаточно малый параметр (константа). Модель Рейнера — Ривлина относительно проста, но позволяет (несколько интуитивно) предсказывать параметры течения и характеристики теплоотдачи вязкоэластичной жидкости к поверхности вращающегося диска.

Начальные и граничные условия для динамической задачи записываются в следующем виде:

$$t = 0: \quad u = 0, \quad v = 0, \quad w = w_0; \quad (6a)$$

$$z = 0: \quad u = 0, \quad v = r\omega, \quad w = w_0; \quad (6б)$$

$$z = \infty: \quad u = 0, \quad v = 0, \quad p = p_\infty. \quad (6в)$$

Начальные условия представлены уравнением (6а). Уравнение (6б) показывает отсутствие прилипания потока на поверхности, при этом нормальная к поверхности скорость определяет интенсивность вдува (отсоса). Условием на бесконечности соответствует уравнение (6в).

Введем далее переменные Кармана [1, 7]

$$u = r\omega F, \quad v = r\omega G, \quad w = \sqrt{\omega\nu} H, \quad z = \sqrt{\nu/\omega} \zeta, \quad p - p_\infty = -\rho\nu\omega P,$$

где  $\zeta$  — безразмерное расстояние вдоль оси вращения;  $F$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $P$  — безразмерные функции  $\zeta$  и  $t$ ;  $\nu = \mu/\rho$  — кинематическая вязкость жидкости. Из-за вдува (отсоса) вертикальная компонента скорости  $H$  принимает постоянное (ненулевое) значение при  $\zeta = 0$ . Используя эти обозначения, уравнения (1)–(6) перепишем в виде

$$\frac{\partial H}{\partial \zeta} + 2F = 0; \quad (7)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t'} - \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta^2} + H \frac{\partial F}{\partial \zeta} + F^2 - G^2 + \frac{1}{2} K \left( \left( \frac{\partial F}{\partial \zeta} \right)^2 + 3 \left( \frac{\partial G}{\partial \zeta} \right)^2 + 2F \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta^2} \right) = 0; \quad (8)$$

$$\frac{\partial G}{\partial t'} - \frac{\partial^2 G}{\partial \zeta^2} + H \frac{\partial G}{\partial \zeta} + 2FG - K \left( \frac{\partial F}{\partial \zeta} \frac{\partial G}{\partial \zeta} - F \frac{\partial^2 G}{\partial \zeta^2} \right) = 0; \quad (9)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t'} - \frac{\partial^2 H}{\partial \zeta^2} + H \frac{\partial H}{\partial \zeta} + \frac{7}{2} K \frac{\partial H}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 H}{\partial \zeta^2} - \frac{dP}{d\zeta} = 0; \quad (10)$$

$$F(0, \zeta) = 0, \quad G(0, \zeta) = 0, \quad H(0, \zeta) = S; \quad (11a)$$

$$F(t, 0) = 0, \quad G(t, 0) = 1, \quad H(t, 0) = S; \quad (11б)$$

$$F(t, \infty) = 0, \quad G(t, \infty) = 0, \quad (11в)$$

где  $t' = t\omega$ ;  $K = \mu_c \omega / \mu$  — параметр, описывающий характеристики неньютоновской жидкости;  $S = w_0 / \sqrt{\omega \nu}$  — параметр равномерного вдува (отсоса), отрицательный в случае отсоса и положительный при вдуве.

Диапазон вариации параметров модели был выбран на основе большого количества численных экспериментов. Было обнаружено, что значения параметра  $K$  должны находиться в области  $K < 3$ , чему соответствуют значения параметра вдува  $-2 \leq S \leq 2$ . Система уравнений (7)–(9) с граничными и начальными условиями (11) позволяет найти три компоненты скорости. Уравнение (10) может быть использовано, если необходимо определить распределение давления.

Из-за различия температур поверхности диска и окружающей жидкости идет процесс теплообмена. Уравнение энергии в пренебрежении диссипативными членами записывается в виде [12]

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial r} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) - k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, \quad (12)$$

где  $T$  — температура;  $c_p$  — теплоемкость при постоянном давлении;  $k$  — теплопроводность.

Начальные и граничные условия для тепловой задачи состоят в том, что температура поверхности диска изменяется мгновенно из состояния покоя и равна  $T_w$ .

С использованием безразмерной температуры  $\theta = (T - T_\infty) / (T_w - T_\infty)$  и переменных Кармана уравнение (12) принимает вид

$$\frac{\partial \theta}{\partial t'} - \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2} + H \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = 0, \quad (13)$$

где  $\text{Pr} = c_p \mu / k$  — число Прандтля. Начальные и граничные условия в безразмерном виде записываются следующим образом:

$$\theta(0, \zeta) = 0, \quad \theta(t, 0) = 1, \quad \theta(t, \infty) = 0. \quad (14)$$

Тепловой поток от диска к жидкости определяется законом Фурье  $q = -k(\partial T / \partial z)_w$ , который с использованием безразмерных переменных записывается так:

$$q = -k(T_w - T_\infty) \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \frac{\partial \theta(t, 0)}{\partial \zeta}.$$

Вводя число Нуссельта  $Nu = q\sqrt{\nu/\omega}/(k(T_w - T_\infty))$ , последнее выражение сведем к соотношению

$$Nu = -\frac{\partial\theta(t, 0)}{\partial\zeta}.$$

Поскольку существенные изменения скоростей и температур сосредоточены в ограниченной области, примыкающей к диску, определим толщины соответствующих слоев с использованием интегральных величин [8]. Для тангенциального направления вводится толщина вытеснения

$$\delta_{dis} = \int_0^\infty G d\zeta.$$

В качестве масштаба толщины теплового слоя вводится величина, определяемая избыточной (относительно окружающей среды) температурой [8]:

$$\delta_\theta = \int_0^\infty \theta d\zeta.$$

**Численное решение.** Численное решение нелинейных уравнений (7)–(9) с условиями (11) методом конечных разностей сопряжено с появлением численной осцилляции, обусловленной разрывом между начальными и граничными условиями (уравнения (11а) и (11б)). То же самое относится и к тепловой задаче (см. уравнение (14)). Эту проблему удалось решить, используя трансформацию координат, предложенную в работе [19]. Вводя в уравнения (7)–(9) и (13) координату  $\eta = \zeta/2\sqrt{t'}$ , получим

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} + 4\sqrt{t'} F = 0; \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t'} - \frac{\eta}{2t'} \frac{\partial F}{\partial \eta} - \frac{1}{4t'} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2\sqrt{t'}} H \frac{\partial F}{\partial \eta} + F^2 - G^2 + \\ + \frac{K}{8t'} \left( \left( \frac{\partial F}{\partial \eta} \right)^2 + 3 \left( \frac{\partial G}{\partial \eta} \right)^2 + 2F \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \right) = 0; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\frac{\partial G}{\partial t'} - \frac{\eta}{2t'} \frac{\partial G}{\partial \eta} - \frac{1}{4t'} \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2\sqrt{t'}} H \frac{\partial G}{\partial \eta} + 2FG - \frac{K}{4t'} \left( \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial G}{\partial \eta} - F \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} \right) = 0; \quad (17)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t'} - \frac{\eta}{2t'} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \frac{1}{4t'} \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2\sqrt{t'}} H \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0. \quad (18)$$

Система уравнений (15)–(18) с условиями (11), (14) решалась маршевой техникой с использованием метода Кранка — Николсона [19]. Результирующая система дифференциальных уравнений решалась в неограниченной области  $0 < \zeta < \infty$  и  $0 < t' < \infty$ . Задачу можно решать в ограниченной области  $\zeta$ , когда значение  $\zeta$  выбрано достаточным, чтобы решение не зависело от асимптотических условий на конечных расстояниях. Однако из-за введенной в работе координатной трансформации эта конечная область уменьшается со временем и определяет точность численного решения. Чтобы решить эту проблему, уравнения (15)–(17) интегрировались от  $t' = 0$  до  $t' = 1$ . Затем решение, полученное при  $t' = 1$ , использовалось как начальное условие при интегрировании уравнений (7)–(9), (13) от  $t' = 1$  до достаточно стационарного состояния.

**Результаты и обсуждение.** На рис. 1 приведена зависимость аксиальной скорости на бесконечности  $H_\infty$  от времени для различных значений  $K$  и параметра вдува. С увеличением  $K$  ослабевает аксиальное течение по направлению к диску, в то время как время установления стационарного течения возрастает при всех значениях  $S$ . Влияние величины  $K$  на время установления параметра  $H_\infty$  более существенно в случае отсоса. Результаты, представленные на рис. 1, в, показывают, что при вдуве значения  $H_\infty$  изменяются от положительных до отрицательных, причем время этого перехода увеличивается с ростом параметра  $K$ . Рис. 1, б иллюстрирует интересный эффект смены со временем направления течения для всех значений  $K$  при  $S = 0$ . Действительно, как следует из рис. 1, а, при больших  $K$  ( $K = 2$ ) параметр  $H_\infty$  на некоторое время становится положительным даже в случае отсоса. Это означает, что параметр  $K$  “обладает” инжекционными свойствами. Из рис. 1 также следует, что включение в рассмотрение  $K$  вызывает появление максимума значений  $H_\infty$ . Максимальное отклонение  $H_\infty$  от стационарного и время существования максимума увеличиваются с ростом  $K$ .

На рис. 2 показано изменение во времени тангенциальной толщины вытеснения  $\delta_{dis}$  для различных значений  $K$  и параметра вдува  $S$ . Видно, что с ростом  $K$  значения  $\delta_{dis}$  и время установления стационарных значений увеличиваются при всех значениях  $S$ . Кроме того, увеличение  $S$  ведет к росту  $\delta_{dis}$  при всех значениях  $K$ . Все кривые на рис. 2, а, б характеризуются наличием максимума, причем с ростом  $K$  величина максимума увеличивается. В свою очередь, в случае отсоса максимум на зависимостях  $\delta_{dis}(t')$  появляется только при больших  $K$  ( $K = 2$ ).

Зависимость  $Nu(t')$  при различных  $K$  и  $S$  и значении  $Pr = 0,7$  показана на рис. 3. С увеличением  $K$  числа Нуссельта уменьшаются при всех значениях параметра вдува. Это обусловлено тем, что с ростом  $K$  скорость потока по направлению к диску уменьшается. Значения  $Nu$  значительно снижаются и с ростом параметра вдува ввиду существования вблизи поверхности диска слоя жидкости с температурой, близкой к  $T_w$ . Отсос оказывает противоположное влияние, поскольку жидкость с температурой, близкой к температуре окружающей среды, попадает в область, непосредственно примыкающую к поверхности диска. Из результатов, представленных на рис. 3, также следует, что влияние параметра  $K$  на числа Нуссельта более существенно в случае отсоса.

На рис. 4 показана зависимость  $\delta_\theta(t')$  при различных  $K$  и  $S$  и значении числа Прандтля  $Pr = 0,7$ . С увеличением  $K$  значения  $\delta_\theta$  растут из-за отмеченного выше влияния этого параметра на скорость жидкости в направлении к диску.

На рис. 5–8 представлены стационарные профили параметров  $G$ ,  $F$ ,  $H$ ,  $\theta$  соответственно при различных параметрах вдува и значениях  $K = 0, 1$  и  $2$ . Как видно из рис. 5, с ростом параметров  $S$  и  $K$  значения  $G$  увеличиваются при всех значениях  $\zeta$ . Влияние скорости отсоса более существенно при больших значениях  $K$ . Однако в случае вдува зависимость параметра  $G(S)$  более заметна при меньших значениях  $K$ . Результаты расчетов, представленные на рис. 6, показывают, что в случае вдува (при  $K = 0$ ) увеличение  $S$  слабо уменьшает значения  $F$  при малых  $\zeta$ , но значительно увеличивает их при больших  $\zeta$ . Однако при  $K \neq 0$  (см. рис. 6, б, в) с ростом скорости вдува значения  $F$  увеличиваются во всем диапазоне.

Данные рис. 6, а также показывают, что с увеличением скорости отсоса при  $K = 0$  значения параметра  $F$  убывают при всех значениях  $\zeta$ . Однако в случае  $K \neq 0$  (рис. 6, б, в) наблюдается интересный эффект: радиальный поток при отсосе меняет направление при всех  $\zeta$ , при этом значения  $F$  увеличиваются с ростом параметра  $K$ . Влияние скорости отсоса на значения параметра  $F$  зависит от  $\zeta$ . Когда скорость отсоса увеличивается, величина  $F$  увеличивается при малых  $\zeta$ , но уменьшается при больших значениях  $\zeta$ .

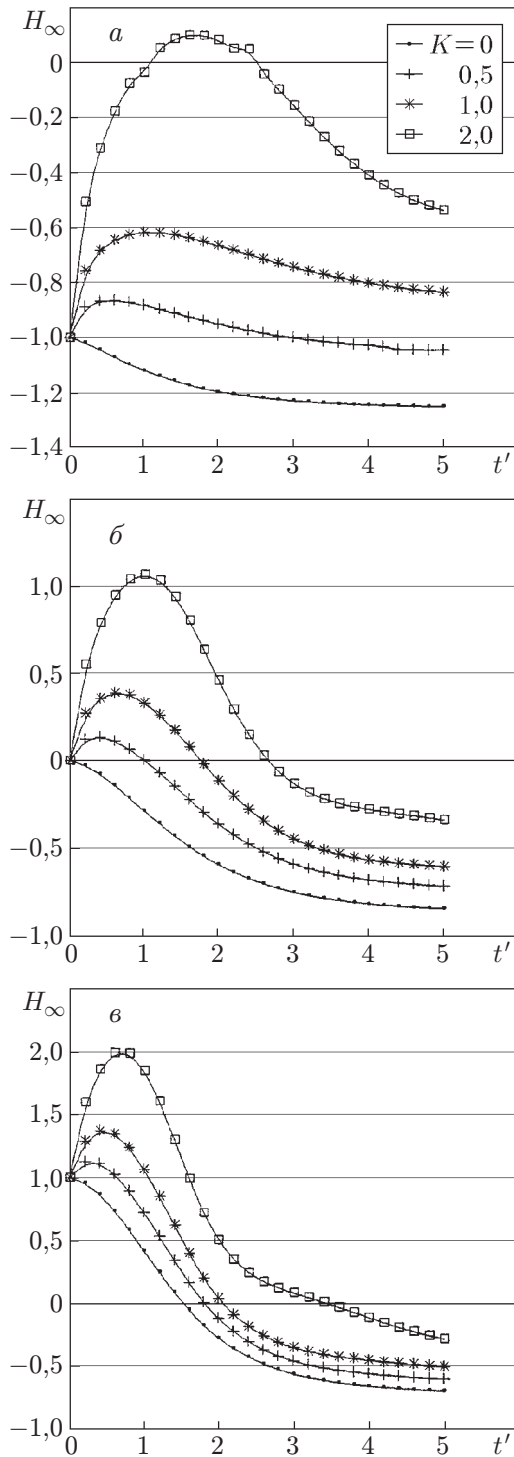


Рис. 1

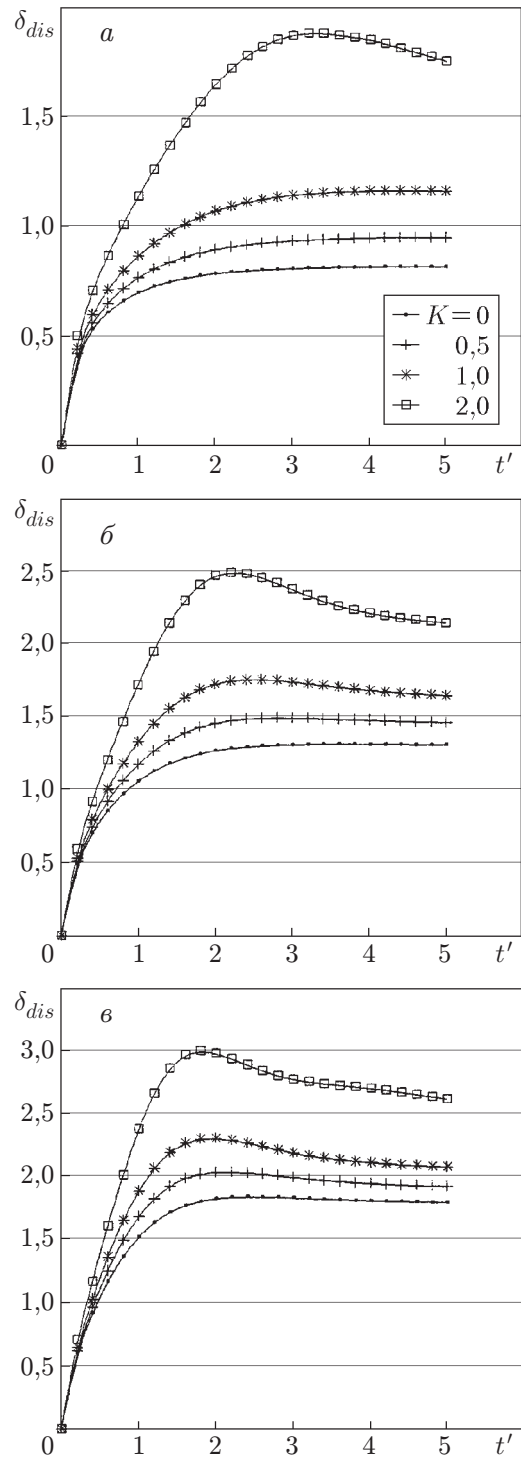


Рис. 2

Рис. 1. Зависимость параметра  $H_\infty$  от времени при различных значениях  $K$  и  $S = -1$  (а), 0 (б), 1 (в)

Рис. 2. Зависимость толщины вытеснения  $\delta_{dis}$  от времени при различных значениях  $K$  и  $S = -1$  (а), 0 (б), 1 (в)

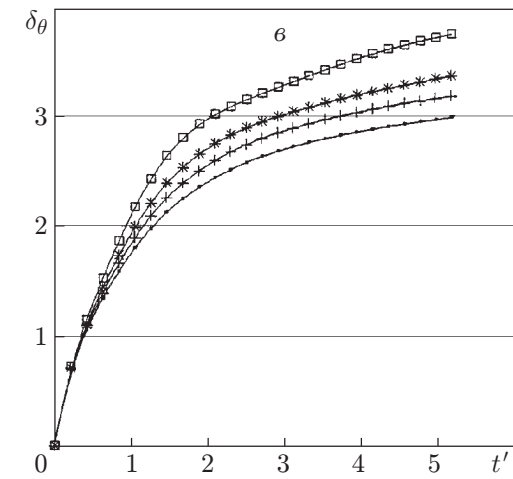
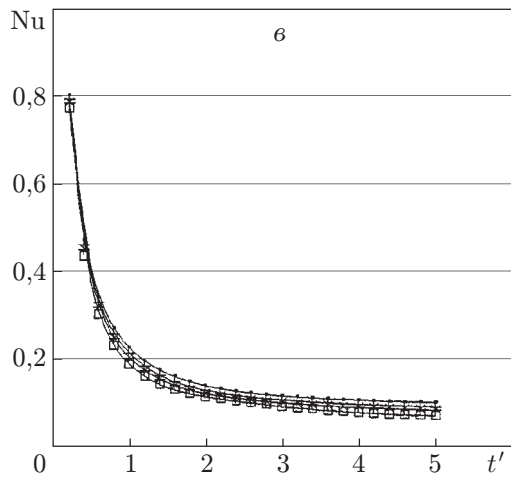
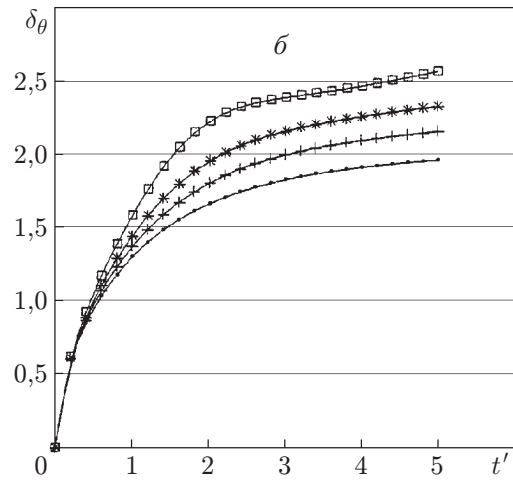
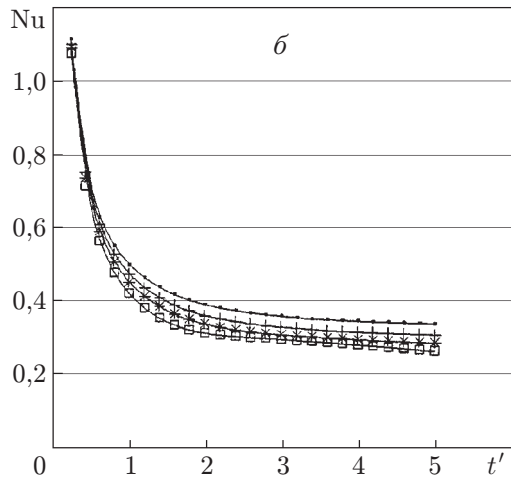
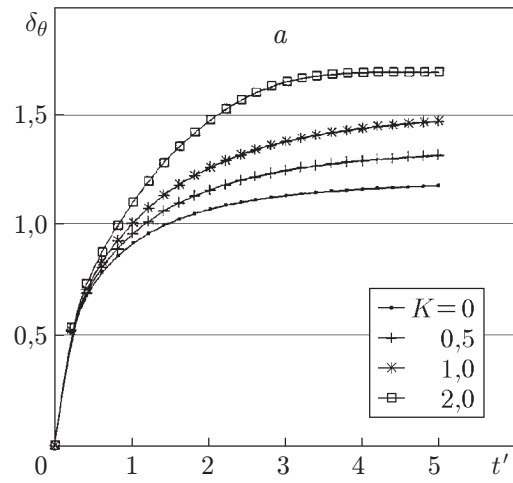
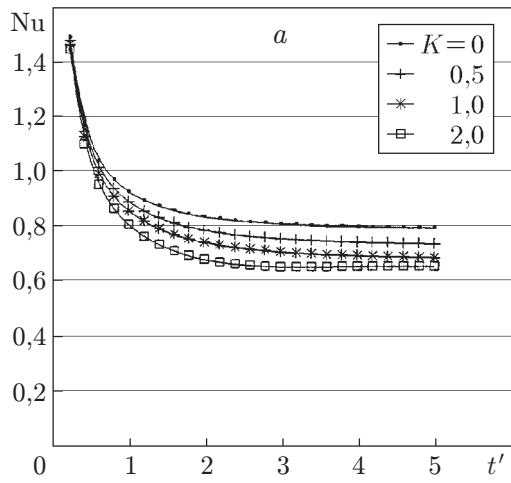


Рис. 3

Рис. 4

Рис. 3. Зависимость числа Нуссельта от времени при различных значениях  $K$  и  $S = -1$  (а),  $0$  (б),  $1$  (в)

Рис. 4. Зависимость параметра  $\delta_\theta$  от времени при различных значениях  $K$  и  $S = -1$  (а),  $0$  (б),  $1$  (в)

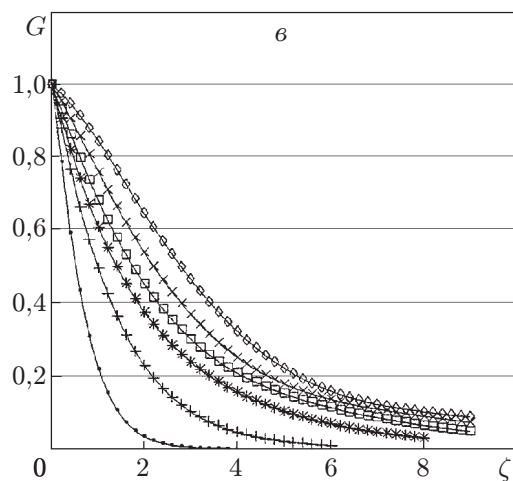
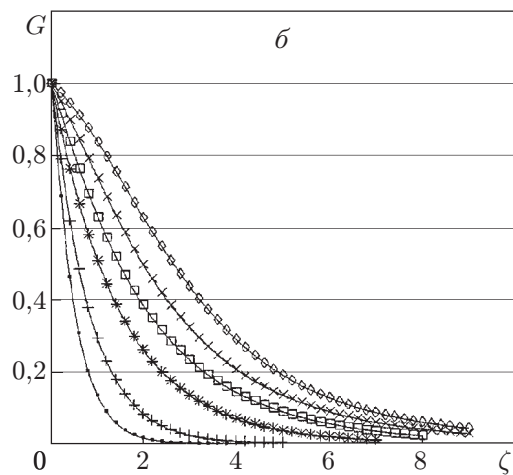
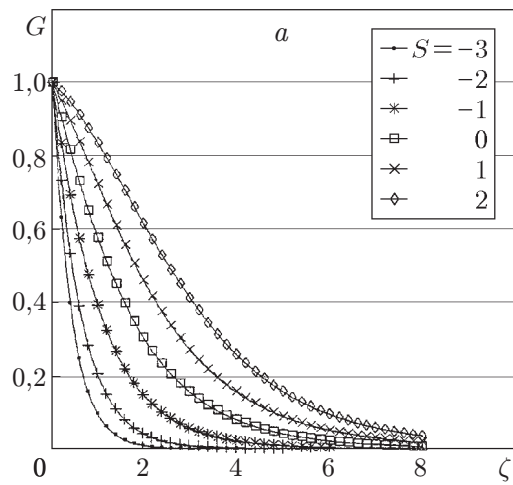


Рис. 5

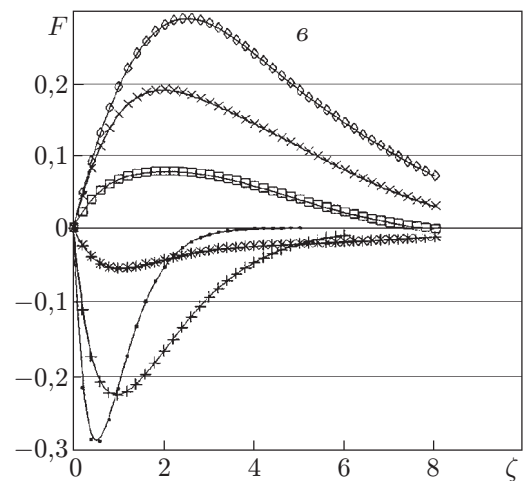
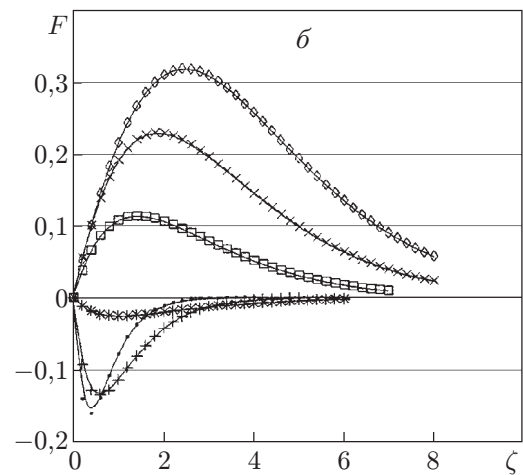
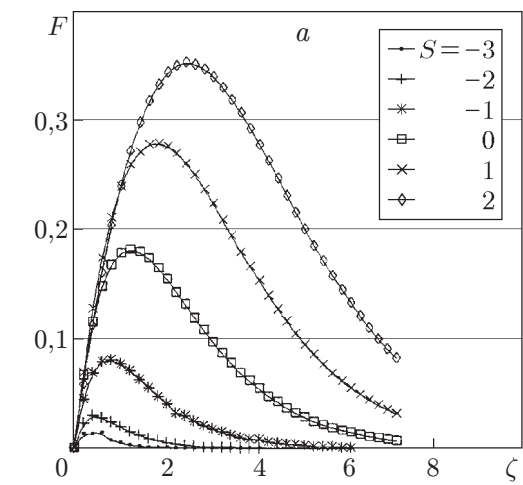


Рис. 6

Рис. 5. Стационарные профили параметра  $G$  при различных значениях  $S$  и  $K = 0$  (а), 1 (б), 2 (в)

Рис. 6. Стационарные профили параметра  $F$  при различных значениях  $S$  и  $K = 0$  (а), 1 (б), 2 (в)



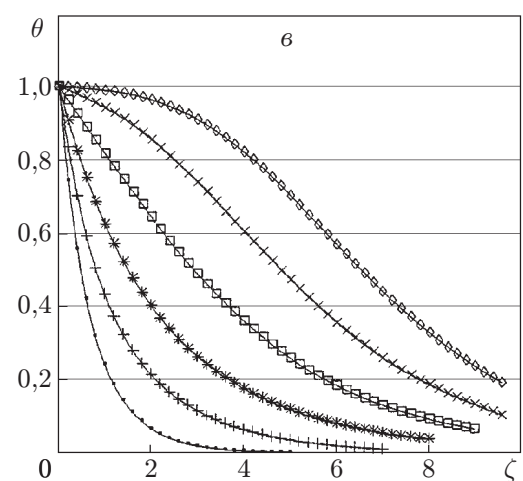
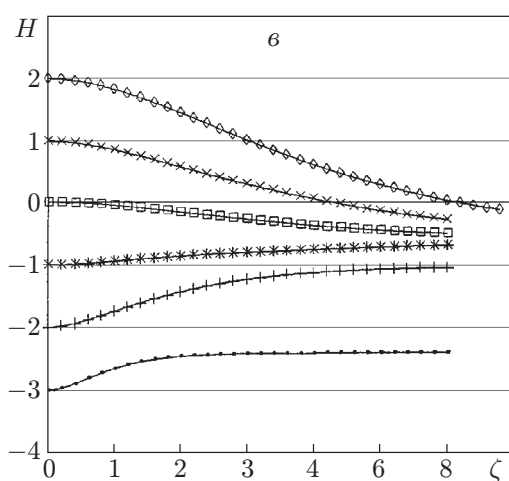
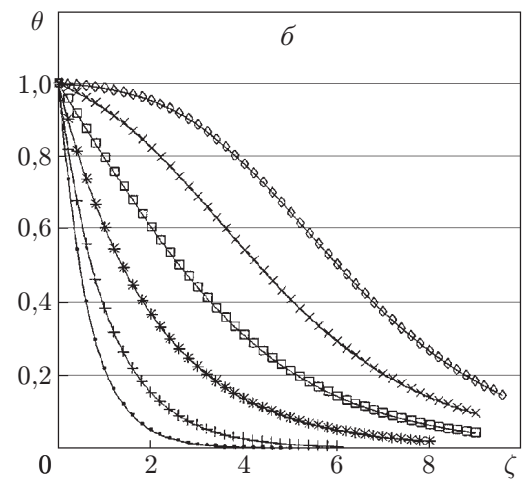
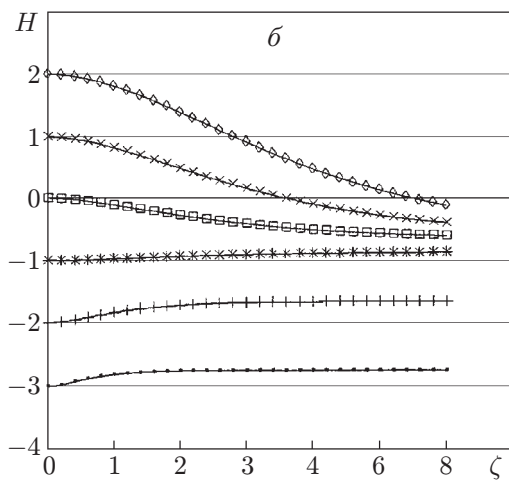
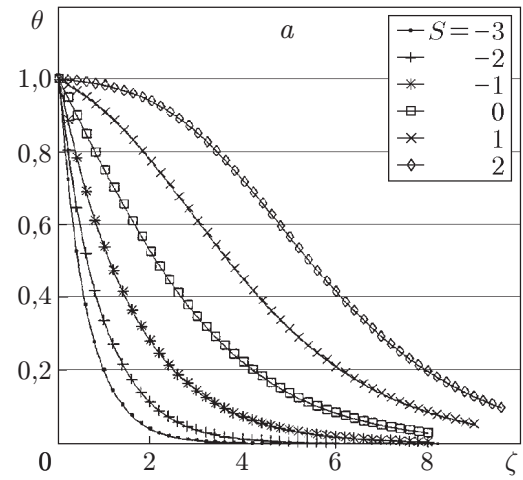
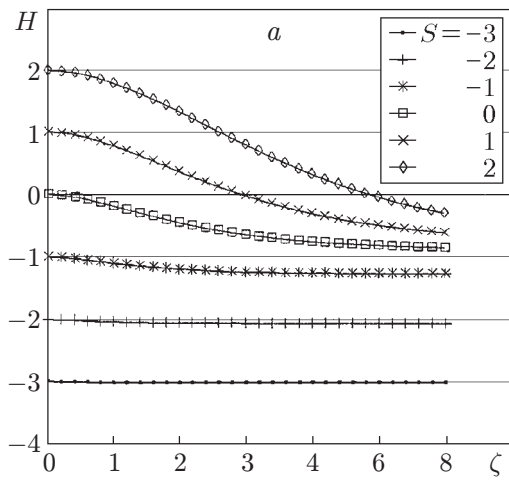


Рис. 7

Рис. 8

Рис. 7. Стационарные профили параметра  $H$  при различных значениях  $S$  и  $K = 0$  (а), 1 (б), 2 (в)

Рис. 8. Стационарные профили параметра  $\theta$  при различных значениях  $S$  и  $K = 0$  (а), 1 (б), 2 (в)

Этот эффект наблюдается в случае отсоса при  $K \neq 0$  и проявляется как пересечение кривых  $F(\zeta)$ , соответствующих различным значениям  $S$ .

Результаты, представленные на рис. 7, показывают, что с ростом параметров  $S$  и  $K$  значения  $H$  увеличиваются при всех  $\zeta$ . При всех значениях  $K$  параметр  $H$  меняет знак на некотором расстоянии  $\zeta$ . Значения  $\zeta$ , соответствующие смене знака  $H$ , увеличиваются с ростом  $S$  или  $K$ . Это обусловлено восходящей конвекцией жидкости при вдуве.

Значения  $\theta$  растут с увеличением  $S$  или  $K$  при всех значениях  $\zeta$  (рис. 8). Это объясняется влиянием этих параметров на тепловое сопротивление вблизи поверхности диска.

**Заключение.** В работе исследовано нестационарное течение неньютоновской жидкости с моделью вязкости Рейнера — Ривлина при равномерном вращении неограниченного пористого диска. Проанализировано влияние свойств неньютоновской жидкости (параметр  $K$ ), а также скорости отсоса или вдува (параметр  $S$ ) на распределения скоростей и температур. Рассмотрение совместного влияния этих параметров выявило ряд интересных особенностей. Обнаружено, что параметр  $K$  со временем меняет направление аксиальной скорости при отсутствии вдува и даже в случае отсоса. Отмечено также, что изменение параметра  $K$  ведет в случае отсоса к смене направления радиальной скорости  $F(\zeta)$  при вариации интенсивности отсоса. Характеристики неньютоновской жидкости значительно влияют на теплоотдачу от поверхности вращающегося диска, причем более существенно при отсосе, чем при вдуве.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Von Karman T.** Uber laminare und turbulente reibung // ZAMM. 1921. Bd 1, N 4. S. 233–235.
2. **Cochran W. G.** The flow due to a rotating disk // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1934. V. 30, N 3. P. 365–375.
3. **Benton E. R.** On the flow due to a rotating disk // J. Fluid Mech. 1966. V. 24, N 4. P. 781–800.
4. **Stuart J. T.** On the effects of uniform suction on the steady flow due to a rotating disk // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1954. V. 7. P. 446–457.
5. **Ockendon H.** An asymptotic solution for steady flow above an infinite rotating disk with suction // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1972. V. 25. P. 291–301.
6. **Kuiken H. K.** The effect of normal blowing on the flow near a rotating disk of infinite extent // J. Fluid Mech. 1971. V. 47, N 4. P. 789–798.
7. **Mithal K. G.** On the effects of uniform high suction on the steady flow of a non-Newtonian liquid due to a rotating disk // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1961. V. 14. P. 401–410.
8. **Srivastava A. C.** Flow of non-Newtonian fluids at small Reynolds number between two infinite disks: one rotating and the other at rest // Ibid. P. 353–385.
9. **Millsaps K., Pohlhausen K.** Heat transfer by laminar flow from a rotating disk // J. Aeronaut. Sci. 1952. V. 19. P. 120–126.
10. **Ostrach S., Thornton P. R.** Compressible flow and heat transfer about a rotating isothermal disk. NACA TN 4320. 1958.
11. **Sparrow E. M., Gregg J. L.** Heat transfer from a rotating disk to fluids of any Prandtl number // Trans. ASME. Ser. C. J. Heat Transfer. 1959. P. 249–251.
12. **Sparrow E. M., Gregg J. L.** Mass transfer, flow, and heat transfer about a rotating disk // Trans. ASME. Ser. C. J. Heat Transfer. 1960. P. 294–302.
13. **Tadros S. E., Erian F. F.** Generalized laminar heat transfer from the surface of a rotating disk // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1982. V. 25, N 11. P. 1615–1660.
14. **Evans G. H., Greif R.** Forced flow near a heated rotating disk: a similarity solution // Fluid Mech. 1988. V. 22, N 5. P. 804–807.

15. **Palec G. Le.** Numerical study of convective heat transfer over a rotating rough disk with uniform wall temperature // Intern. J. Comm. Heat Mass Transfer. 1989. V. 16, N 1. P. 107–113.
16. **Hirose K., Yokoyama T., Ouchi M.** Numerical study of convective heat transfer on a horizontal isothermal rotating disk // Trans. Japan. Soc. Mech. Engrs. Pt B. 1995. V. 61. P. 3770–3775.
17. **Attia H. A.** Transient flow of a conducting fluid with heat transfer due to an infinite rotating disk // Intern. J. Comm. Heat Mass Transfer. 2001. V. 28, N 3. P. 439–448.
18. **Astarita G., Marrucci G.** Principles of non-Newtonian fluid mechanics. N. Y.: McGraw-Hill, 1974.
19. **Ames W. F.** Numerical methods in partial differential equations. 2nd ed. N. Y.: Acad. Press, 1977.

*Поступила в редакцию 12/XI 2003 г.,  
в окончательном варианте — 2/IV 2004 г.*

---