

УДК 621.865

## САМОНАСТРАИВАЮЩАЯСЯ СИСТЕМА С ЭТАЛОННОЙ МОДЕЛЬЮ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ ПОДВОДНОГО АППАРАТА\*

А. В. Лебедев<sup>1</sup>, В. Ф. Филаретов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН,  
690041, г. Владивосток, ул. Радио, 5*

<sup>2</sup>*Дальневосточный федеральный университет,  
690950, г. Владивосток, ул. Суханова, 8  
E-mail: lebedev@dvo.ru*

Решена задача синтеза многоканальной системы с самонастройкой по эталонной модели для централизованного управления движением автономного подводного аппарата. Получены условия устойчивости процесса самонастройки с учётом динамического взаимовлияния и кинематических взаимосвязей между всеми каналами управления аппарата при наличии параметрической нестационарности его полной нелинейной математической модели. Для снижения величины сигнала самонастройки его амплитуда формируется в виде функции координат и задающих сигналов. Разработанная система обеспечивает высокое качество управления подводным аппаратом при значительных вариациях его параметров.

*Ключевые слова:* система управления, автономный подводный аппарат, эталонная модель, самонастройка.

**Введение.** Создание высококачественной подводной робототехники в настоящее время является одним из приоритетных направлений в области исследования и освоения Мирового океана. При этом весьма актуальной остаётся проблема синтеза систем управления (СУ) автономными подводными аппаратами (АПА), которые должны обеспечивать их точное и быстрое движение по сложным пространственным траекториям. Полная математическая модель динамики движения АПА является нелинейной, нестационарной, многомерной и многосвязной [1, 2]. Это обусловлено неопределённостью и значительными изменениями его инерционных и гидродинамических характеристик, взаимовлиянием каналов управления при одновременном изменении нескольких координат АПА, движущегося с различными скоростями в вязкой среде. Указанные факторы усложняют задачу синтеза и приводят к необходимости разработки специальных адаптивных и робастных СУ.

В настоящее время для управления АПА весьма успешно применяются самонастраивающиеся системы (СНС) с эталонной моделью [3–5]. Эти системы способны адаптироваться (подстраиваться) к изменяющимся параметрам нестационарных динамических объектов благодаря использованию специального контура сигнальной самонастройки [6–8] и обеспечивать неизменно высокие показатели качества работы.

Один из наиболее распространённых подходов при синтезе СНС — построение иерархических систем управления с выделением контуров скорости и положения АПА [9]. Однако их создание связано с необходимостью введения дополнительного нелинейного корректирующего устройства в контур управления положением аппарата, что является существенным недостатком, так как приводит к усложнению синтезируемых СУ.

В связи с этим в данной работе ставится задача синтеза централизованной СНС для управления шестистепенным АПА на основе его полной математической модели без спе-

\*Работа выполнена при поддержке комплексной программы фундаментальных исследований «Дальний Восток» (проект № 15-I-4-048).

циального выделения контуров управления скоростью и положением. Система управления должна формировать такой закон самонастройки, который парирует любые изменения параметров аппарата и внешних воздействий в заданных пределах без их идентификации. При этом необходимо обеспечивать возможность уменьшения величины сигнала самонастройки в благоприятных режимах работы СУ для снижения нагрузки на исполнительные элементы и гарантировать устойчивость процесса самонастройки при наличии кинематических взаимосвязей и динамического взаимовлияния между всеми каналами управления АПА.

**Математическая модель динамики АПА.** Динамика движения АПА в вязкой среде описывается системой шести нелинейных нестационарных дифференциальных уравнений, которая в матричной форме имеет вид [2]

$$\mathbf{M}(t)\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}(\mathbf{v}, t)\mathbf{v} + \mathbf{D}(\mathbf{v}, t)\mathbf{v} + \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{M}(t)$  — симметричная и положительно-определённая матрица инерции;  $\mathbf{C}(\mathbf{v}, t)$  — матрица центробежных и кориолисовых сил;  $\mathbf{D}(\mathbf{v}, t)$  — матрица вязкого трения;  $\mathbf{x}$  — вектор положения и ориентации АПА в абсолютной системе координат (СК);  $\mathbf{v}$  — вектор проекций линейной и угловой скоростей АПА на оси связанной СК;  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  — вектор гидростатических сил и моментов;  $\mathbf{f}$  — вектор сил и моментов движителей. Размер всех матриц  $6 \times 6$ , а размерность векторов  $6 \times 1$ . Причём матрицы  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{D}$  содержат параметры АПА, изменяющиеся во времени в процессе его движения (присоединённые массы и моменты инерции жидкости, параметры вязкого трения и т. д.).

Связь между проекциями линейной и угловой скоростей АПА на оси абсолютной и связанной СК задаётся матричным уравнением [2]

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{x})\mathbf{v}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{J}(\mathbf{x})$  — матрица преобразования координат размера  $6 \times 6$ .

Будем полагать, что АПА имеет нейтральную плавучесть (т. е.  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0$ ), а инерционность движителей много меньше его инерционности в целом. В этом случае движители могут быть описаны матричным уравнением вида

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}_t \mathbf{u}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{K}_t$  — положительно-определённая матрица коэффициентов усиления движителей размера  $6 \times 6$ ;  $\mathbf{u}$  — вектор сигналов управления движителями размерности  $6 \times 1$ .

Сведём систему (1)–(3) к одному матричному уравнению. Для этого вначале продифференцируем выражение (2) и разрешим полученное уравнение относительно  $\dot{\mathbf{v}}$ , учитывая, что  $\mathbf{v} = \mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{x}}$ :

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{J}^{-1}(\ddot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{J}}\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{x}}). \quad (4)$$

Подставив выражения (3) и (4) в уравнение (1), будем иметь

$$\mathbf{M}(t)\mathbf{J}^{-1}\ddot{\mathbf{x}} + (\tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) - \mathbf{M}(t)\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{J}})\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{K}_t \mathbf{u}, \quad (5)$$

где  $\tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \mathbf{C}(\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{x}}, t)$ ,  $\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \mathbf{D}(\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{x}}, t)$  — вспомогательные матрицы размера  $6 \times 6$ .

После преобразований соотношения (5) получим уравнение динамики АПА в виде

$$\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}. \quad (6)$$

Здесь  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = (\mathbf{J}(\mathbf{x})\mathbf{M}^{-1}(t)(\tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) + \tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)) - \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{x}))\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{x}) \times \mathbf{M}^{-1}(t)\mathbf{K}_t$  — функциональные матрицы размера  $6 \times 6$ .

Таким образом, АПА может быть описан системой шести нелинейных дифференциальных уравнений (6) с переменными параметрами и перекрёстными связями по координатам  $x_i$  и их производным  $\dot{x}_i$ . Каждое из них соответствует каналу управления отдельной координатой  $x_i$ , на который воздействует один управляющий сигнал  $u_i$ .

В силу физических ограничений, накладываемых на величины сигналов управления, на скорости и координаты АПА, а также на его параметры, векторы  $\mathbf{x}(t)$  и  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  являются ограниченными с оценками  $\sup \|\mathbf{x}(t)\| = M_x$  и  $\sup \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| = \tilde{M}_x$  (где  $M_x, \tilde{M}_x$  — положительные константы) и выполняются неравенства для их элементов  $|x_i(t)| \leq M_x, |\dot{x}_i(t)| \leq \tilde{M}_x$ . С учётом последних соотношений зададим диапазоны изменения элементов  $a_{ij}(t)$  и  $b_{ij}(t)$  матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ :

$$a_{ij \min} \leq a_{ij}(t) \leq a_{ij \max}; \quad b_{ij \min} \leq b_{ij}(t) \leq b_{ij \max}, \quad (7)$$

где  $a_{ij \min}, b_{ij \min}, a_{ij \max}, b_{ij \max}$  — наименьшие и наибольшие значения коэффициентов.

Далее будем решать задачу синтеза системы централизованного управления многомерным и многосвязным нелинейным динамическим объектом (6), которая обеспечит высокую точность и качество процессов управления при любых вариациях параметров  $a_{ij}(t)$  и  $b_{ij}(t)$  в заданных диапазонах (7). Это решение будем искать в классе СНС [6, 7], добиваясь инвариантности к изменениям параметров АПА за счёт сигнальной самонастройки по эталонной модели, параметры которой определяют желаемый процесс движения объекта.

**Синтез закона самонастройки по эталонной модели.** Будем полагать, что на вход каждого  $i$ -го канала управления АПА подаётся свой задающий сигнал  $x_{di}$ , определяющий желаемый закон изменения координаты  $x_i$ . Примем во внимание, что в соответствии с разрабатываемым подходом синтезируемый далее в рамках общей структуры СНС контур самонастройки по эталонной модели должен являться внешним, дополнительным контуром по отношению к замкнутому по положению внутреннему контуру управления АПА. Именно на этот внешний контур будет возложена функция компенсации основных негативных факторов, влияющих на процессы управления в системе. Поэтому в качестве регуляторов положения в каждом канале управления внутреннего контура для простоты реализации достаточно использовать пропорциональные регуляторы с отрицательными обратными связями по координатам  $x_i$ .

В данном случае соответствующий линейный закон управления  $\mathbf{u}$  в контуре управления положением АПА в матричном виде примет форму  $\mathbf{u} = \mathbf{K}_p(\mathbf{u}_x - \mathbf{x})$ , где  $\mathbf{K}_p$  — диагональная матрица постоянных коэффициентов размера  $6 \times 6$ ,  $\mathbf{u}_x = \mathbf{u}_x(t)$  — вектор сигналов, формируемых во внешнем контуре самонастройки, размерности  $6 \times 1$ . С учётом этого перепишем уравнение (6):

$$\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)\mathbf{K}_p\mathbf{x} = \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)\mathbf{K}_p\mathbf{u}_x. \quad (8)$$

Введём в рассмотрение расширенный вектор  $\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{x} \ \dot{\mathbf{x}})^T$  состояния системы (8) размерности  $12 \times 1$ , элементами которого являются координаты АПА  $x_i(t)$  и их производные  $\dot{x}_i(t)$ , а также нестационарные матрицы  $\mathbf{A}_t, \mathbf{B}_t$  размеров  $12 \times 12, 12 \times 6$ , определяемые следующим образом ( $\mathbf{O}$  и  $\mathbf{E}$  — нулевая и единичная матрицы размера  $6 \times 6$ ):

$$\mathbf{A}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)\mathbf{K}_p & -\mathbf{A}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)\mathbf{K}_p \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Учитывая (9), представим систему (8) в нормальной форме Коши:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}_t\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_t\mathbf{u}_x. \quad (10)$$

Выражение (10) используем в качестве математической модели АПА при синтезе его СУ. Как отмечалось выше, из-за многомерности, нестационарности и нелинейности модели (10) невозможно обеспечить заданные динамические свойства и показатели качества работы системы с помощью линейных законов управления. В данном случае целесообразно применять сигнальную самонастройку по эталонной модели как наиболее простое и эффективное средство адаптации к быстрым изменениям параметров АПА.

Желаемое изменение вектора координат  $\mathbf{x}_m = \mathbf{x}_m(t)$  размерности  $12 \times 1$  объекта (10) можно задать в виде решения линейного дифференциального уравнения эталонной модели

$$\dot{\mathbf{x}}_m = \mathbf{A}_m \mathbf{x}_m + \mathbf{B}_m \mathbf{x}_d, \quad (11)$$

где  $\mathbf{A}_m$  — постоянная матрица размера  $12 \times 12$ , значения элементов которой задаются таким образом, чтобы обеспечить устойчивость решения  $\mathbf{x}_m(t)$ , а значит, и всей эталонной модели (11) в целом;  $\mathbf{B}_m$  — постоянная матрица коэффициентов при задающих сигналах размера  $12 \times 6$ ;  $\mathbf{x}_d = \mathbf{x}_d(t)$  — вектор задающих сигналов по координатам движения АПА размерности  $6 \times 1$ . Причём  $|x_{di}(t)| \leq M_d$ , где  $M_d$  — положительная константа.

Вектор ошибки  $\mathbf{e} = \mathbf{e}(t)$  размерности  $12 \times 1$  системы относительно модели примет вид  $\mathbf{e} = \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_m$ . Поставим задачу синтеза такого закона управления  $\mathbf{u}_x(t)$ , чтобы  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}(t)\| = 0$  при любых значениях параметров АПА из диапазонов (7). Тогда поведение нелинейного нестационарного объекта (10) после завершения процесса самонастройки будет определяться желаемым линейным дифференциальным уравнением (11) с постоянными коэффициентами.

Для решения этой задачи, следуя рекомендациям, предложенным в работе [6], сформируем сигнал управления движением АПА в виде

$$\mathbf{u}_x = \mathbf{x}_d + \mathbf{z}, \quad (12)$$

где  $\mathbf{z} = \mathbf{z}(t)$  — вектор дополнительных сигналов самонастройки размерности  $6 \times 1$ .

Для определения закона изменения сигнала  $\mathbf{z}$  проведём следующие преобразования. В уравнении (10) предварительно выделим линейную стационарную часть, причём матрицы коэффициентов этой части примем равными заданным матрицам  $\mathbf{A}_m$  и  $\mathbf{B}_m$  эталонной модели

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}_m \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_m \mathbf{u}_x + (\mathbf{A}_t - \mathbf{A}_m) \tilde{\mathbf{x}} + (\mathbf{B}_t - \mathbf{B}_m) \mathbf{u}_x. \quad (13)$$

Подставив выражение (12) в равенство (13), получим уравнение рассматриваемой СУ

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}_m \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_m \mathbf{x}_d + \mathbf{s}_x + \mathbf{B}_t \mathbf{z}, \quad (14)$$

где  $\mathbf{s}_x = (\mathbf{A}_t - \mathbf{A}_m) \tilde{\mathbf{x}} + (\mathbf{B}_t - \mathbf{B}_m) \mathbf{x}_d$  — вектор размерности  $12 \times 1$ , элементы которого характеризуют отклонения параметров АПА от его заданных значений.

Для достижения цели управления достаточно обеспечить асимптотическую устойчивость состояния, при котором  $\mathbf{e} = 0$ . Этого можно добиться, сформировав вектор самонастройки  $\mathbf{z}$  для системы (14) с помощью метода Ляпунова так, чтобы  $\mathbf{e} \rightarrow 0$  при любых управляющих и возмущающих воздействиях и параметрах АПА из диапазона (7).

Отметим, что возможность компенсации невязки  $\mathbf{s}_x$  сигналом  $\mathbf{z}$  обеспечивается только при достижимости в результате самонастройки равенства  $\mathbf{B}_t \mathbf{z} = -\mathbf{s}_x$ . Из него легко получить так называемое условие согласованности [6], необходимое для работоспособности СНС:

$$\mathbf{s}_x = \mathbf{B}_t \mathbf{B}_t^+ \mathbf{s}_x, \quad (15)$$

где  $\mathbf{B}_t^+ = (\mathbf{B}_t^T \mathbf{B}_t)^{-1} \mathbf{B}_t^T$  — псевдообратная к  $\mathbf{B}_t$  матрица размера  $6 \times 12$ .

Соотношение (15) отражает тот факт, что рассогласования  $\mathbf{A}_t - \mathbf{A}_m$  и  $\mathbf{B}_t - \mathbf{B}_m$ , определяющие вектор  $\mathbf{s}_x$ , при неединичной матрице  $\mathbf{B}_t \mathbf{B}_t^+$  могут быть скомпенсированы сигналом самонастройки  $\mathbf{z}$  только тогда, когда не все элементы матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  испытывают изменения, т. е. указанные разности должны быть таковы (часть их элементов равна нулю), чтобы вектор  $\mathbf{s}_x$  принадлежал некоторой вполне определённой шестимерной гиперплоскости и даже при  $\mathbf{B}_t \mathbf{B}_t^+ \neq \mathbf{E}$  соотношение (15) всё-таки выполнялось.

Введём функцию Ляпунова  $V$  как положительно-определённую квадратичную форму  $V = 0,5 \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e}$ . Здесь матрица  $\mathbf{P}$  размера  $12 \times 12$  удовлетворяет условию  $\mathbf{A}_m^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_m = -\mathbf{Q}$  (где  $\mathbf{Q}$  — симметричная положительно-определённая матрица размера  $12 \times 12$ ) и также является симметричной и положительно-определённой.

Найдём производную функции  $V$ :

$$\dot{V} = 0,5(\dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{P} \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{e}}). \quad (16)$$

Вычитая из (14) уравнение (11), получим выражение  $\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}_m \mathbf{e} + \mathbf{s}_x + \mathbf{B}_t \mathbf{z}$ . Подставим это выражение в равенство (16) и с учётом свойства матрицы  $\mathbf{P}$  ( $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}$ ) будем иметь

$$\dot{V} = 0,5 \mathbf{e}^T (\mathbf{A}_m^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_m) \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{P} (\mathbf{s}_x + \mathbf{B}_t \mathbf{z}). \quad (17)$$

Покажем, что отрицательную определённость функции  $\dot{V}$  можно обеспечить выбором закона самонастройки вида

$$\mathbf{z} = -h \text{sign}(\mathbf{B}_t^T \mathbf{P} \mathbf{e}), \quad (18)$$

где  $h = \text{const} > 0$ ;  $\text{sign}(\mathbf{B}_t^T \mathbf{P} \mathbf{e})$  — вектор размерности  $6 \times 1$ , элементы которого определяются выражениями  $(\text{sign}(\mathbf{B}_t^T \mathbf{P} \mathbf{e}))_i = \text{sign}(\mathbf{B}_t^T \mathbf{P} \mathbf{e})_i$ , причём здесь и далее запись  $(\mathbf{y})_i$  представляет собой условное обозначение  $i$ -го элемента соответствующего вектора  $\mathbf{y}$ .

Первое слагаемое в (17) является отрицательно-определённой квадратичной формой, так как при любых  $\mathbf{e} \neq 0$  справедливо соотношение

$$0,5 \mathbf{e}^T (\mathbf{A}_m^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_m) \mathbf{e} = 0,5 \mathbf{e}^T (-\mathbf{Q}) \mathbf{e} < 0.$$

Учитывая (15) и (18), сумму остальных слагаемых в (17) перепишем в виде

$$\mathbf{e}^T \mathbf{P} (\mathbf{s}_x + \mathbf{B}_t \mathbf{z}) = \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{B}_t (\mathbf{B}_t^+ \mathbf{s}_x - h \text{sign}(\mathbf{B}_t^T \mathbf{P} \mathbf{e})). \quad (19)$$

В силу принятых ранее ограничений компонента  $\mathbf{s}_x$  также является ограниченной с некоторой оценкой  $\sup \|\mathbf{s}_x\| = M_s$ . В связи с этим будет выполняться неравенство  $|(\mathbf{B}_t^+ \mathbf{s}_x)_i| \leq \|\mathbf{B}_t^+\| M_s$ , где  $\|\mathbf{B}_t^+\| = \max \left( \sum_{j=1}^6 |(\mathbf{B}_t^+)_{ij}| \right)$  — норма матрицы  $\mathbf{B}_t^+$ .

Амплитуду  $h$  сигнала  $\mathbf{z}$  выберем в соответствии с неравенством

$$h \geq \|\mathbf{B}_t^+\| M_s. \quad (20)$$

Тогда при  $(\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{B}_t)_i > 0$  (в этом случае  $(\mathbf{B}_t^T \mathbf{P} \mathbf{e})_i > 0$ , а значит, имеет место равенство  $\text{sign}(\mathbf{B}_t^T \mathbf{P} \mathbf{e})_i = 1$ ) выполняются соотношения

$$(\mathbf{B}_t^+ \mathbf{s}_x)_i - h (\text{sign}(\mathbf{B}_t^T \mathbf{P} \mathbf{e}))_i \leq \|\mathbf{B}_t^+\| M_s - h \leq 0.$$

Аналогично при  $(\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{B}_t)_i < 0$  справедливы неравенства

$$(\mathbf{B}_t^+ \mathbf{s}_x)_i - h (\text{sign}(\mathbf{B}_t^T \mathbf{P} \mathbf{e}))_i \geq -\|\mathbf{B}_t^+\| M_s + h \geq 0.$$

Таким образом, знаки выражений  $(\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{B}_t)_i$  и  $(\mathbf{B}_t^+ \mathbf{s}_x)_i - h(\text{sign}(\mathbf{B}_t^T \mathbf{P} \mathbf{e}))_i$  противоположны при любом  $i$ . Значит, слагаемые  $(\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{B}_t)_i ((\mathbf{B}_t^+ \mathbf{s}_x)_i - h(\text{sign}(\mathbf{B}_t^T \mathbf{P} \mathbf{e}))_i)$  неположительны и при любых элементах векторов  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{s}_x$  и матрицы  $\mathbf{B}_t$  из заданных диапазонов имеет место соотношение

$$\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{B}_t (\mathbf{B}_t^+ \mathbf{s}_x - h \text{sign}(\mathbf{B}_t^T \mathbf{P} \mathbf{e})) \leq 0.$$

Следовательно, производная  $\dot{V}$  является отрицательно-определённой, поэтому гарантируется асимптотическая устойчивость состояния  $\mathbf{e} = 0$  при стремлении к бесконечности частоты переключений в алгоритме самонастройки (18).

Очевидно, что реализация закона управления (18), (20) сопряжена с трудностями, обусловленными необходимостью измерения элементов нестационарной матрицы  $\mathbf{B}_t$ . Однако при соблюдении некоторых условий эта матрица в (18) без нарушения соотношения  $\dot{V} < 0$  может быть заменена известной матрицей  $\mathbf{B}_m$ , т. е. закон самонастройки (18) примет вид

$$\mathbf{z} = -h \text{sign}(\mathbf{B}_m^T \mathbf{P} \mathbf{e}). \quad (21)$$

Далее определим эти условия в соответствии с методом, предложенным в работе [6]. С учётом равенства (21) сумму двух последних слагаемых в выражении (17) перепишем в виде

$$\mathbf{e}^T \mathbf{P} (\mathbf{s}_x + \mathbf{B}_t \mathbf{z}) = \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{s}_x - h \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{B}_t \text{sign}(\mathbf{B}_m^T \mathbf{P} \mathbf{e}). \quad (22)$$

Подставим в равенство (22) вместо  $\mathbf{B}_t$  выражение  $\mathbf{B}_m + (\mathbf{B}_t - \mathbf{B}_m)$ . Будем полагать, что надлежащим выбором элементов прямоугольной матрицы  $\mathbf{B}_m$  на этапе задания эталонной модели эта матрица определена как  $\mathbf{B}_m = \begin{pmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{B}_{m1} \end{pmatrix}$ , где  $\mathbf{B}_{m1}$  — невырожденная матрица размера  $6 \times 6$ . В данном случае справедливо равенство  $\mathbf{B}_m^+ \mathbf{B}_m = \mathbf{E}$ , а также выполняются с учётом вида матрицы  $\mathbf{B}_m \mathbf{B}_m^+ = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E} \end{pmatrix}$  условия  $\mathbf{s}_x = \mathbf{B}_m \mathbf{B}_m^+ \mathbf{s}_x$  и  $(\mathbf{B}_t - \mathbf{B}_m) = \mathbf{B}_m \mathbf{B}_m^+ (\mathbf{B}_t - \mathbf{B}_m)$ . Принимая во внимание указанные соотношения, преобразуем (22) следующим образом:

$$\mathbf{e}^T \mathbf{P} (\mathbf{s}_x + \mathbf{B}_t \mathbf{z}) = \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{B}_m (\mathbf{B}_m^+ \mathbf{s}_x - h (\mathbf{E} + \mathbf{B}_m^+ (\mathbf{B}_t - \mathbf{B}_m)) \text{sign}(\mathbf{B}_m^T \mathbf{P} \mathbf{e})). \quad (23)$$

Введём новое обозначение  $\mathbf{w} = (\mathbf{E} + \mathbf{B}_m^+ (\mathbf{B}_t - \mathbf{B}_m)) \text{sign}(\mathbf{B}_m^T \mathbf{P} \mathbf{e})$ . Для отрицательности правой части (23) достаточно, чтобы знак любого элемента  $w_i$  вектора  $\mathbf{w}$  определялся только знаком элемента  $(\text{sign}(\mathbf{B}_m^T \mathbf{P} \mathbf{e}))_i$  вектора  $\text{sign}(\mathbf{B}_m^T \mathbf{P} \mathbf{e})$  независимо от значений элементов матрицы  $\mathbf{B}_m^+ (\mathbf{B}_t - \mathbf{B}_m)$ , а знак любого элемента вектора  $\mathbf{B}_m^+ \mathbf{s}_x - h \mathbf{w}$  был противоположен знаку соответствующего элемента вектора  $\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{B}_m$  независимо от значений элементов вектора  $\mathbf{B}_m^+ \mathbf{s}_x$ .

Покажем, что первое требование удовлетворяется при соблюдении условия

$$\|\mathbf{B}_m^+ (\mathbf{B}_t - \mathbf{B}_m)\| \leq a_b < 1, \quad (24)$$

где  $\|\mathbf{B}_m^+ (\mathbf{B}_t - \mathbf{B}_m)\|$  — норма матрицы, аналогичная  $\|\mathbf{B}_t^+\|$ ;  $a_b$  — вспомогательный коэффициент.

Действительно в соответствии с правилом умножения матриц имеет место равенство

$$w_i = (\text{sign}(\mathbf{B}_m^T \mathbf{P} \mathbf{e}))_i + \sum_{j=1}^6 (\mathbf{B}_m^+ (\mathbf{B}_t - \mathbf{B}_m))_{ij} (\text{sign}(\mathbf{B}_m^T \mathbf{P} \mathbf{e}))_j. \quad (25)$$

Учитывая (24), получим

$$\left| \sum_{j=1}^6 (\mathbf{B}_m^+ (\mathbf{B}_t - \mathbf{B}_m))_{ij} (\text{sign}(\mathbf{B}_m^T \mathbf{P} \mathbf{e}))_j \right| < |(\text{sign}(\mathbf{B}_m^T \mathbf{P} \mathbf{e}))_i| = 1.$$

Значит,  $\text{sign}(w_i) = (\text{sign}(\mathbf{B}_m^T \mathbf{P} \mathbf{e}))_i$  при любых значениях элементов матрицы  $\mathbf{B}_t$ .

Кроме того, из соотношений (24) и (25) следует, что  $\min |w_i| \geq 1 - a_b > 0$ . Тогда для выполнения второго требования достаточно выбрать амплитуду  $h$  сигнала  $\mathbf{z}$  в виде

$$h \geq (1 - a_b)^{-1} \|\mathbf{B}_m^+\| M_s. \quad (26)$$

В таком случае будут выполняться неравенства

$$h(1 - a_b) \geq \|\mathbf{B}_m^+\| M_s, \quad |hw_i| \geq \|\mathbf{B}_m^+\| M_s \geq |(\mathbf{B}_m^+ \mathbf{s}_x)_i|.$$

Поэтому, как показано в приведённом выше аналогичном доказательстве, при любых значениях элементов вектора  $\mathbf{B}_m^+ \mathbf{s}_x$  из заданного диапазона будет иметь место неравенство

$$\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{B}_m (\mathbf{B}_m^+ \mathbf{s}_x - h(\mathbf{E} + \mathbf{B}_m^+ (\mathbf{B}_t - \mathbf{B}_m)) \text{sign}(\mathbf{B}_m^T \mathbf{P} \mathbf{e})) \leq 0. \quad (27)$$

Итак, в результате выполнения неравенства (27) в соответствии с выражением (17) обеспечивается отрицательная определённость производной функции Ляпунова  $V$ .

В целях уменьшения амплитуды  $h$  сигнала самонастройки используем соотношения для  $M_s$  и  $\mathbf{s}_x$  и получим выражение для неё в виде функции координат и задающих сигналов:

$$h(t) = M_a \|\tilde{\mathbf{x}}(t)\| + M_b \|\mathbf{x}_d(t)\|, \quad (28)$$

где  $M_a = \text{const} > (1 - a_b)^{-1} \|\mathbf{B}_m^+\| \sup \|\mathbf{A}_t - \mathbf{A}_m\|$ ;  $M_b = \text{const} > (1 - a_b)^{-1} \|\mathbf{B}_m^+\| \sup \|\mathbf{B}_t - \mathbf{B}_m\|$ .

В результате закон самонастройки примет окончательный вид:

$$\mathbf{z} = -h(t) \text{sign}(\mathbf{B}_m^T \mathbf{P} \mathbf{e}),$$

где  $h(t)$  определяется в соответствии с (28), а  $\mathbf{P}$  задаётся с учётом требования её симметричности и положительной определённости. Очевидно, что для сигнала  $h(t)$  по-прежнему выполняется неравенство (26), а амплитуда сигнала  $\mathbf{z}$  и, значит, нагрузка на исполнительные элементы СУ существенно снижаются.

Следует отметить, что в рамках приведённых выше теоретических рассуждений считается заведомо доступной точная информация о линейных перемещениях и углах поворота АПА по всем осям абсолютной СК, а также о производных этих величин, необходимая для реализации предложенных законов самонастройки. Подробное обсуждение конкретных способов получения такой информации (способов измерения соответствующих величин) выходит за рамки данной работы. В целом же на практике имеются два основных пути решения этой проблемы.

С одной стороны, в большинстве случаев современные датчики и измерительные устройства позволяют непосредственно измерять указанные величины с достаточной степенью точности. В частности, линейные координаты и скорости в абсолютной СК могут быть найдены с помощью гидроакустических навигационных систем и доплеровских лагов, угловые координаты в абсолютной СК — с помощью угловых датчиков (гироскопов) и магнитного компаса. Недоступные для прямого измерения значения производных от угловых координат при этом могут быть вычислены по формуле (2) на основе информации о самих угловых координатах (входящих в матрицу  $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ ) и об угловых скоростях АПА в связанной СК, легко определяемых датчиками угловых скоростей.

С другой стороны, при отсутствии возможности непосредственного измерения производных от перемещений и углов поворота нахождение их значений может осуществляться с помощью реальных дифференцирующих устройств (или численного дифференцирования при цифровой реализации системы управления). Степень возможного влияния возникающих при этом малых дополнительных инерционностей на процессы в системе потребует в каждом конкретном случае дополнительного анализа.

Ещё одним важным аспектом практической реализации предложенной СНС является решение проблем, связанных с наличием разрывных составляющих в управляющих воздействиях (напряжениях  $u_i$ ), подаваемых на входы двигателей АПА.

Очевидно, что при использовании «идеального» релейного закона управления (18) или (21) частота переключений разрывного сигнала самонастройки стремится к бесконечности. Однако с точки зрения технической реализации любых систем с разрывным управлением важно, что на практике в них вместо указанного режима переключений всегда формируется некоторый «неидеальный» режим с достаточно высокой, но конечной частотой переключений. Это происходит вследствие использования реальных переключающих устройств (релейных элементов) с неидеальными характеристиками (например, усилитель с большим коэффициентом усиления и ограничением или реле с гистерезисом). И хотя в этом случае уже не обеспечивается асимптотическая устойчивость состояния  $\mathbf{e} = 0$ , но возможные отклонения от него при правильном выборе параметров этих релейных элементов не превышают заданные, приемлемые по техническим требованиям величины.

Конечно, и указанный «неидеальный» режим работы контуров сигнальной самонастройки может оказаться весьма неблагоприятным для исполнительных элементов СУ. Но при создании подводных аппаратов, предназначенных для выполнения ответственных миссий, зачастую приоритетными становятся достигаемые показатели качества и сравнительная простота создаваемых устройств управления. В то же время в качестве двигателей в большинстве современных АПА применяются двигатели постоянного тока с гребными винтами, управляемые посредством широтно-импульсной модуляции, а значит, заведомо способные работать с разрывными управляющими воздействиями.

Важно также отметить, что в синтезированной СНС, как следует из уравнения  $\mathbf{u} = \mathbf{K}_p(\mathbf{u}_x - \mathbf{x})$  и выражений (12), (18), в управляющих воздействиях  $\mathbf{u}$ , подаваемых на двигатели, помимо разрывной составляющей  $\mathbf{K}_p \mathbf{z}$  присутствует и непрерывная составляющая  $\mathbf{K}_p(\mathbf{x}_d - \mathbf{x})$ . К тому же в соответствии с предложенным алгоритмом (28) амплитуда  $h$  разрывного сигнала  $\mathbf{z}$  в процессе управления может снижаться по сравнению с максимально необходимым значением (26). Всё это приводит к уменьшению нагрузки на исполнительные элементы СУ.

В целом инженерное проектирование систем рассматриваемого типа зачастую требует нахождения компромиссных решений при наличии многих противоречивых эксплуатационных факторов и может быть осуществлено только с учётом заданных технических требований, характеристик и особенностей конкретного подводного аппарата.



**Результаты численного моделирования.** Численное моделирование синтезированной системы централизованного управления движением АПА проводилось в пакете MATLAB с использованием полной математической модели подводного аппарата (1), (2), преобразованной к системе уравнений, в явном виде описывающих изменение всех его пространственных координат, и приведённой, например, в работе [10], а также упрощённой модели движителей (3). При этом были приняты следующие значения параметров объекта (элементов матриц, входящих в указанные уравнения):  $m_{11 \min} = 50$  кг,  $m_{11 \max} = 100$  кг,  $m_{22 \min} = 125$  кг,  $m_{22 \max} = 250$  кг,  $m_{33 \min} = 150$  кг,  $m_{33 \max} = 300$  кг,  $m_{44 \min} = 10$  кг · м<sup>2</sup>,  $m_{44 \max} = 20$  кг · м<sup>2</sup>,  $m_{55 \min} = 20$  кг · м<sup>2</sup>,  $m_{55 \max} = 40$  кг · м<sup>2</sup>,  $m_{66 \min} = 25$  кг · м<sup>2</sup>,  $m_{66 \max} = 50$  кг · м<sup>2</sup> (здесь  $m_{ii \min}$ ,  $m_{ii \max}$  — наименьшие и наибольшие значения диагональных элементов матрицы инерции  $\mathbf{M}$  с учётом присоединённых масс и моментов инерции жидкости);  $d_{11 \min} = 100$  кг/м,  $d_{11 \max} = 200$  кг/м,  $d_{22 \min} = 75$  кг/м,  $d_{22 \max} = 150$  кг/м,  $d_{33 \min} = 62,5$  кг/м,  $d_{33 \max} = 125$  кг/м,  $d_{44 \min} = 30$  кг · м,  $d_{44 \max} = 60$  кг · м,  $d_{55 \min} = 40$  кг · м,  $d_{55 \max} = 80$  кг · м,  $d_{66 \min} = 35$  кг · м,  $d_{66 \max} = 70$  кг · м (здесь  $d_{ii \min}$ ,  $d_{ii \max}$  — наименьшие и наибольшие значения диагональных элементов матрицы вязкого трения  $\mathbf{D}$ );  $k_{tii} = 10$  рад/м ( $k_{tii}$  — коэффициенты усиления каждого из шести движителей, т. е. диагональные элементы матрицы  $\mathbf{K}_t$ ). Все недиагональные элементы матриц  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{K}_t$  полагались нулевыми, что вполне соответствует достаточно широкому классу подводных аппаратов.

В целях обеспечения заданных показателей качества переходных процессов и независимости движения по каждой координате АПА эталонная модель (11) была определена (в качестве одного из возможных вариантов) как совокупность шести линейных звеньев второго порядка (по одному в каждом канале управления). Это обусловило выбор следующих значений элементов матриц  $\mathbf{A}_m$  и  $\mathbf{B}_m$  эталонной модели:  $a_{mi, i+6} = 1$ ,  $a_{mi+6, i} = -2$ ,  $a_{mi+6, i+6} = -2$ ,  $b_{mi+6, i} = 2$  (здесь  $i = \overline{1, 6}$ , остальные элементы указанных матриц равны нулю).

Единственным обязательным требованием к матрице  $\mathbf{P}$ , как было отмечено ранее, является её симметричность и положительная определённость, поэтому можно рекомендовать для простоты выбирать данную матрицу диагональной с положительными элементами  $p_{ii} > 0$ . В соответствии с этим при моделировании принималось  $p_{ii} = 2$ . В ходе предварительных исследований были также вычислены значения коэффициентов  $M_a = 10$ ,  $M_b = 10$  закона управления (28), достаточные для обеспечения устойчивости процесса самонастройки при используемых входных сигналах и установленных диапазонах изменения параметров АПА.

Результаты моделирования для ступенчатых задающих сигналов  $x_{di} = 1$ , подаваемых на вход каждого  $i$ -го канала управления АПА, представлены на рис. 1. Здесь кривые 1–6 соответствуют фактическим переходным процессам изменения ошибок  $e_{xi} = x_{di} - x_i$  по каждой из трёх линейных ( $i = 1, 2, 3$ ) и трёх угловых ( $i = 4, 5, 6$ ) координат  $x_i$  подводного аппарата, а кривая 7 — желаемому процессу изменения ошибки по каждой координате, определяемому уравнением эталонной модели (11) при выбранных  $a_{mii}$  и  $b_{mii}$ .

На рис. 1, а показаны переходные процессы в системе с типовыми линейными ПИД-регуляторами (одинаковыми во всех каналах управления) при заданной комбинации параметров АПА ( $m_{ii} = m_{ii \max}$ ,  $d_{ii} = d_{ii \min}$ ). При этом в пакете MATLAB с помощью инструмента PID Tuner, интегрированного в Simulink PID Controller Block, настройка этих регуляторов произведена таким образом, чтобы переходный процесс хотя бы по одной координате (кривая 1) был максимально близок к желаемому (кривая 7). В результате получены значения  $k_{\text{п}} = 1,94$ ,  $k_{\text{и}} = 0,15$ ,  $k_{\text{д}} = 2,24$  для коэффициентов пропорциональной, интегральной и дифференциальной составляющих ПИД-регуляторов. Из рис. 1, а видно, что форма переходных процессов по остальным координатам из-за наличия динамического

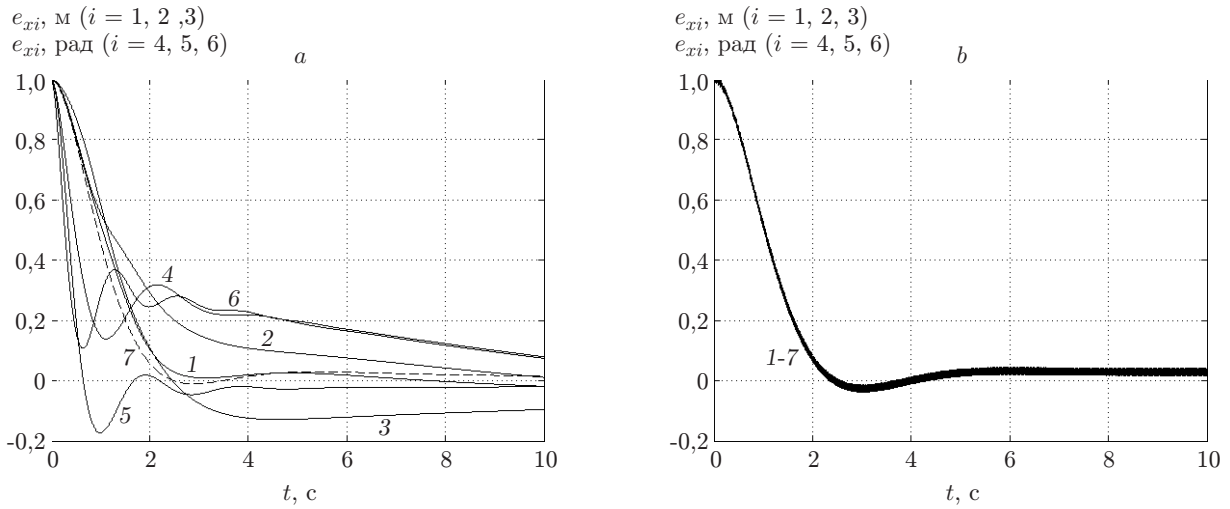


Рис. 1

взаимовлияния и кинематических взаимосвязей между подсистемами даже при этих параметрах объекта значительно отличается от желаемого процесса управления (в частности, имеет место перерегулирование по отдельным координатам). Как показали результаты исследований, отклонения параметров от заданных значений приводят к ещё большему ухудшению характеристик переходных процессов.

На рис. 1, *b* приведены переходные процессы в СНС, которые идентичны при разных комбинациях параметров АПА из установленных диапазонов и совпадают с желаемым процессом изменения ошибки по каждой координате. Достигается развязка каналов управления, а переходные процессы быстро затухают ( $t_{\text{пн}}$  не более 5 с) с малым перерегулированием.

Переходные процессы изменения ошибки  $e_{x1}(t)$  по одной из координат АПА при синусоидальных задающих сигналах  $x_{di} = \sin(t)$  представлены на рис. 2, *a, b* (при использовании ПИД-регуляторов и СНС соответственно). Кривые 1 и 2 — это реальные процессы изменения ошибки в СУ при значениях параметров АПА  $m_{ij} = m_{ij \text{ max}}$ ,  $d_{ij} = d_{ij \text{ min}}$  и  $m_{ij} = m_{ij \text{ min}}$ ,  $d_{ij} = d_{ij \text{ max}}$ , а кривая 3 — желаемый процесс изменения ошибки.

Применение ПИД-регуляторов не позволяет достичь высокого качества управления для всех значений параметров АПА. Например, при  $m_{ij} = m_{ij \text{ max}}$ ,  $d_{ij} = d_{ij \text{ min}}$  изменение

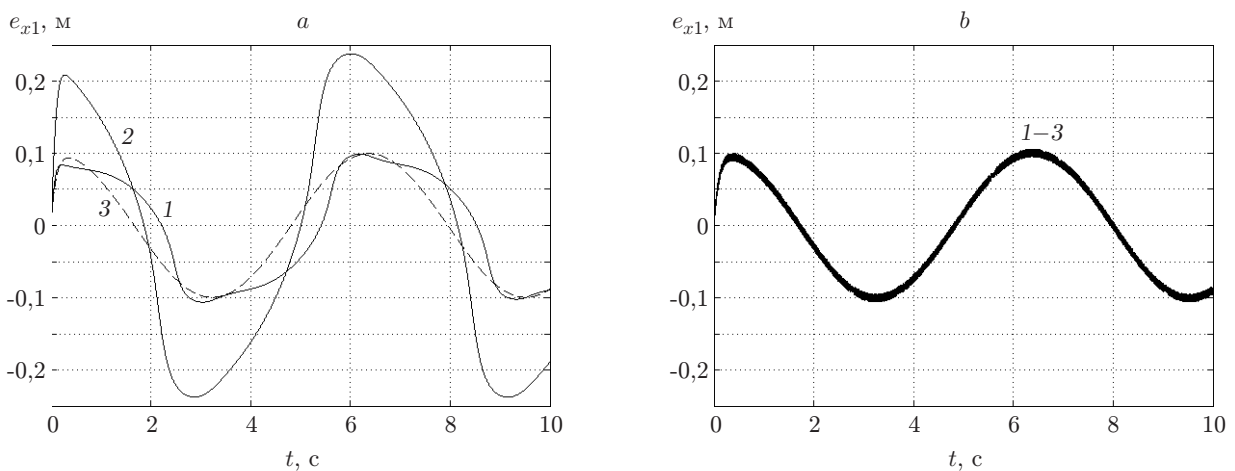


Рис. 2

ошибки происходит в соответствии с кривой 1. Однако при той же настройке ПИД-регулятора и  $m_{ij} = m_{ij \min}$ ,  $d_{ij} = d_{ij \max}$  максимальное значение ошибки увеличивается почти в 2,5 раза (кривая 2). В СНС требуемое качество управления и совпадение процессов в СУ с желаемым (кривые 1–3 на рис. 2, *b*) обеспечиваются при любых параметрах АПА из заданных диапазонов.

**Заключение.** В данной работе на основании известных положений теории самонастраивающихся систем решена важная задача синтеза многоканальной СНС с самонастройкой по эталонной модели для централизованного управления движением АПА. Выведен закон самонастройки, обеспечивающий высокое качество управления при любых изменениях параметров объекта в заданных пределах, и доказаны условия её устойчивости с учётом существенного динамического взаимовлияния и кинематических взаимосвязей между всеми каналами управления АПА. Предложен новый закон формирования амплитуды разрывных сигналов самонастройки, позволяющий уменьшить нагрузку на исполнительные элементы СУ в большинстве режимов её практической эксплуатации. При этом синтезированные законы управления могут быть реализованы в реальном масштабе времени с помощью достаточно простых технических средств.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Пантов Е. Н., Махин Н. Н., Шереметов Б. Б.** Основы теории движения подводных аппаратов. Л.: Судостроение, 1973. 211 с.
2. **Fjellstad О.-Е., Fossen Т. I., Egeland О.** Adaptive control of ROVs with actuator dynamics and saturation // Proc. of the 2nd Intern. Offshore and Polar Engineering Conf. San Francisco, USA, 1992. P. 513–519.
3. **Stepanyan V., Krishnakumar K.** MRAC revisited: Guaranteed performance with reference model modification // Proc. American Control Conf. Baltimore, USA, 2010. P. 93–98.
4. **Lebedev A. V., Filaretov V. F.** The synthesis of adaptive control system with reference model for autonomous underwater vehicle // Proc. IMECE-2002 ASME Intern. Mechanical Engineering Congress and Exposition. New Orleans, USA, 2002. Vol. 2. P. 15–19.
5. **Лебедев А. В., Филаретов В. Ф., Стаценко О. М.** Многоканальная самонастраивающаяся система централизованного управления движением подводного робота // Мехатроника. 2001. № 9. С. 41–45.
6. **Борцов Ю. А., Поляхов Н. Д., Путов В. В.** Электромеханические системы с адаптивным и модальным управлением. Л.: Энергоатомиздат, 1984. 216 с.
7. **Александров А. Г.** Адаптивное управление с эталонной моделью при внешних возмущениях // АИТ. 2004. № 5. С. 77–90.
8. **Коломейцева М. Б., Агвами С. А.** Синтез алгоритма прямого адаптивного управления многосвязным объектом методом декомпозиции с явной эталонной моделью // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. № 8. С. 7–12.
9. **Лебедев А. В., Филаретов В. Ф.** Синтез самонастраивающейся системы с эталонной моделью для управления скоростью пространственного движения подводного аппарата // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2002. № 2. С. 170–176.
10. **Филаретов В. Ф., Лебедев А. В., Юхимец Д. А.** Устройства и системы управления подводных роботов. М.: Наука, 2005. 270 с.

*Поступила в редакцию 24 февраля 2015 г.*