

УДК 534.521.6

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ОДНОМЕРНОГО КОНТИНУУМА С ДВИЖУЩИМСЯ ПО НЕМУ ИНЕРЦИОННЫМ ОБЪЕКТОМ

А. Д. Сергеев

Институт проблем машиноведения РАН, 199178 Санкт-Петербург

E-mail: sergeyev@cards.lanck.net

Изучаются свободные поперечные колебания в системе, состоящей из бесконечного моментного континуума типа лежащей на винклеровском основании балки Бернулли — Эйлера и движущегося вдоль нее с постоянной скоростью твердого тела, имеющего точечный контакт с направляющей. Диапазон рассматриваемых скоростей перемещения сосредоточенного инерционного объекта вдоль континуума ограничен требованием того, чтобы энергия упругой деформации бесконечного континуума, отвечающая совместным свободным колебаниям неограниченной системы, оставалась бы конечной. Построено аналитическое решение соответствующей спектральной задачи в системе со смешанным спектром. Проанализированы предельные ситуации, когда движущийся вдоль балки инерционный твердотельный объект тем или иным путем лишен одной из своих “осцилляционных” степеней свободы. В частности, рассмотрен инерционный объект, не имеющий массы, но обладающий ненулевым тензором инерции. Приведены зависимости всех характеристик дискретного спектра колебаний и формы этих колебаний от величины скорости перемещения объекта вдоль моментной упругоинерционной направляющей.

Ключевые слова: балка Бернулли — Эйлера, винклеровское основание, колебания.

**Введение.** Интерес к свойствам систем, моделирующих взаимодействие континуума и перемещающегося в континууме объекта, связан с исследованиями в области механики движущихся сред и нуждами транспортной механики (механика корабля, трубопроводный транспорт, высокоскоростные поезда, поезда на магнитной подушке). В частности, принципиально важными являются условия существования экспериментально наблюдаемых в безграничных системах наряду со сплошными дискретных спектров стационарных колебаний, зависящих от скорости движения объекта в среде. При наличии периодических воздействий на объект в системах такого рода возникают дополнительные низкочастотные резонансы, обусловленные увеличением скорости движения объекта в среде.

Исследования стационарного и нестационарного взаимодействия движущейся частицы с одномерным континуумом, динамику которого описывает классическое волновое уравнение, представлены в литературе достаточно широко (см., например, [1, 2]). Однако приложения требуют обобщения результатов для моментных континуумов, поведение которых описывают операторы более высокого порядка, нежели классический одномерный волновой оператор. В работе [3] (со ссылкой на [4]) высказаны осторожные предположения о некоторых заслуживающих внимания свойствах свободных локализованных колебаний взаимодействующей с движущейся массой бесконечной инерционной балки Бернулли — Эйлера, лежащей на винклеровском основании. Систематическому изучению локализованных колебаний посвящена работа [5], в которой основное внимание уделялось “вмороженным” в неограниченные континуумы инерционным включениям. Вопросы, связанные с наличием незатухающих локализованных свободных колебаний бесконечного моментного контину-

ума с движущимся инерционным включением, рассматривались теоретиками в рамках анализа устойчивости движения точечной массы по упругоинерционной направляющей типа балки Бернулли — Эйлера [6]. При этом применялись методы численного анализа и изучались системы с диссипативными силами. В отношении “чисто консервативного случая” (отсутствие демпфирования) авторы работы [6] ограничились констатацией того, что результаты могут быть получены предельным переходом к нулевой вязкости в предложенном ими алгоритме численного анализа, основанном на методе D-разбиений [7]. Такой подход получил развитие в [8, 9].

Аналитическое рассмотрение в работе [10] “чистых” незатухающих колебаний при консервативном (без демпфирования за счет сил вязкого трения) взаимодействии движущейся частицы с одномерным моментным континуумом стало попыткой начать обобщение сформулированных в [5] положений на случай систем с подвижными инерционными включениями. В настоящей работе изложены результаты расширенного исследования стационарной локализованной динамики систем подобного рода для случая, когда включение является твердотельным объектом.

### 1. Взаимодействие континуума с подвижной гармонической нагрузкой.

Пусть гармоническая нагрузка, включающая силовую и моментную составляющие, перемещается с постоянной скоростью вдоль бесконечной балки Бернулли — Эйлера, лежащей на винклеровском основании. При этом взаимодействие нагрузки с направляющей реализуется в одной точке. В переменных  $\xi = s - vt$  и  $\tau = t$  ( $s$  — лагранжева координата сечения балки, отсчитываемая вдоль направляющей,  $t$  — время) поперечные движения упругой линии для  $-\infty < \xi < 0$  и  $0 < \xi < \infty$  описываются уравнением

$$\rho \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} - 2v \frac{\partial^2 w}{\partial \tau \partial \xi} + v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right) = -C \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} - k_n w \quad (1)$$

с условием сопряжения

$$\begin{aligned} w \Big|_{\xi=-0}^{\xi=+0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} \Big|_{\xi=-0}^{\xi=+0} = 0, \\ L_0 e^{i\omega\tau} = C \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi=-0}^{\xi=+0}, \quad N_0 e^{i\omega\tau} = -C \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} \Big|_{\xi=-0}^{\xi=+0}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $v$  — скорость изменения лагранжевой координаты сечения, в котором нагрузка действует на балку;  $i^2 = -1$ ;  $C$  — изгибная жесткость балки;  $\rho$  — инерционная характеристика единицы длины направляющей;  $w$  — поперечное смещение сечения направляющей с координатой  $s$ ;  $k_n$  — жесткость винклеровского основания;  $N_0$  — амплитуда силовой составляющей воздействия в сечении, где нагрузка действует на балку;  $L_0$  — амплитуда моментной составляющей воздействия в этом же сечении. Связи между  $N_0$ ,  $L_0$  и деформациями упругой линии в каждой конкретной системе должны быть описаны специально.

Стационарные решения задачи (1), (2) суть функции вида  $f(\xi, \tau) = f_0 e^{i(\mu\xi + \omega\tau)}$ , параметры которых  $\mu$  и  $\omega$  должны удовлетворять равенству

$$\mu^4 - \frac{v^2}{\gamma^4} \mu^2 + \frac{2\omega v}{\gamma^4} \mu + \frac{\omega_b^2 - \omega^2}{\gamma^4} = 0 \quad \left( \gamma^4 = \frac{C}{\rho}, \quad \omega_b = \sqrt{\frac{k_n}{\rho}} \right). \quad (3)$$

При  $v < v_* = \gamma\sqrt{2\omega_b}$  уравнение (3) имеет две пары комплексно-сопряженных корней

$$\mu_1 = a + ib_1, \quad \mu_2 = a - ib_1, \quad \mu_3 = -a + ib_2, \quad \mu_4 = -a - ib_2. \quad (4)$$

В (4) принято  $a > 0$ ,  $b_1 > 0$ ,  $b_2 > 0$ . В работе [4] для  $N_0 = \text{const}$ ,  $L_0 \equiv 0$  рассмотрено решение задачи (1), (2), соответствующее  $\omega = 0$ , и установлено, что поперечный прогиб упругоинерционной направляющей под силой обращается в бесконечность, когда  $v = v_*$ .

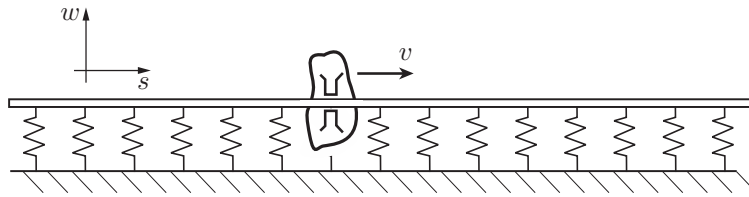


Рис. 1. Твердое тело, перемещающееся вдоль балки

Мы исследуем ситуацию для  $\omega \neq 0$  в диапазоне скоростей включения  $0 \leq v < v_*$ . Ниже показано, что с приближением скорости сосредоточенного твердотельного включения к  $v_*$  теория предсказывает снижение эффективной жесткости упругоинерционной направляющей, причем для весьма инерционного включения действительно резкое падение величины жесткости имеет место только вблизи  $v = v_*$ .

Интересно оценить абсолютную величину  $v_*$  для стандартного рельсового пути, поскольку достижение железнодорожным экипажем данной скорости грозит возникновением опасных низкочастотных резонансов в вертикальном направлении. С использованием значений параметров, приводимых в [11] для модели пути и подрельсового основания в виде инерционной балки Бернулли — Эйлера, лежащей на винклеровском основании, получим  $v_* \approx 700$  км/ч. Таких скоростей традиционные рельсовые экипажи в обозримом будущем вряд ли достигнут.

**2. Система балка — абсолютно твердое тело.** Пусть в качестве движущейся нагрузки выступает абсолютно твердое тело (рис. 1), поле силы тяжести отсутствует, в центре масс твердого тела реализован его безотрывный точечный контакт с направляющей. Продольную динамику объекта и направляющей из рассмотрения исключим. Для этого достаточно считать, что все сечения балки могут двигаться только в поперечном направлении и что внешние воздействия на твердое тело, происхождение которых значения не имеет, обеспечивают перемещение тела вдоль балки с постоянной по величине относительной продольной скоростью.

Поперечные движения упругой линии в переменных  $\xi, \tau$  описывает уравнение (1). В точке контакта потребуем равенства перемещений центра масс твердого тела и его поворотов перемещениям и поворотам упругоинерционной балки. Условия сопряжения по перемещениям

$$w \Big|_{\xi=-0}^{\xi=+0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} \Big|_{\xi=-0}^{\xi=+0} = 0. \quad (5)$$

Обозначим массу твердого тела через  $m$ , его главный центральный момент инерции относительно оси, перпендикулярной к плоскости рисунка, — через  $J$ . Тогда условия сопряжения по силам и моментам таковы:

$$J \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \partial \tau^2} \Big|_{\xi=0} = C \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi=-0}^{\xi=+0}, \quad m \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} \Big|_{\xi=0} = -C \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} \Big|_{\xi=-0}^{\xi=+0}. \quad (6)$$

Будем рассматривать скорости изменения координаты точки контакта, удовлетворяющие неравенству  $v < v_* = \gamma \sqrt{2\omega_b}$ . Для таких значений  $v$  решение уравнения (1) с условиями (5), (6) ограничено при  $\xi \rightarrow \pm\infty$  и имеет вид

$$w(\xi, \tau) = \begin{cases} (A_2 e^{i\mu_2 \xi} + A_4 e^{i\mu_4 \xi}) e^{i\omega \tau}, & \xi \leq 0, \\ (A_1 e^{i\mu_1 \xi} + A_3 e^{i\mu_3 \xi}) e^{i\omega \tau}, & \xi \geq 0. \end{cases}$$

Структура параметров  $\mu_j$  описывается соотношениями (4). Сопряжение в точке контакта требует выполнения равенств

$$A_2 + A_4 = A_1 + A_3, \quad \mu_2 A_2 + \mu_4 A_4 = \mu_1 A_1 + \mu_3 A_3,$$

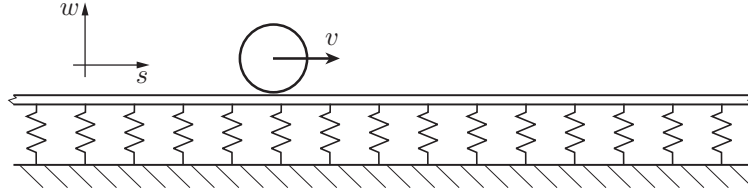


Рис. 2. Частица, перемещающаяся вдоль балки

$$iJ\omega^2(\mu_1 A_1 + \mu_3 A_3)/(\rho\gamma^4) = \mu_1^2 A_1 + \mu_3^2 A_3 - \mu_2^2 A_2 - \mu_4^2 A_4, \quad (7)$$

$$im\omega^2(A_1 + A_3)/(\rho\gamma^4) = \mu_1^3 A_1 + \mu_3^3 A_3 - \mu_2^3 A_2 - \mu_4^3 A_4.$$

Нетривиальные решения (1) с условиями (5), (6) для  $\mu_j$  из (4) существуют, если выполнено соотношение

$$\omega^4 - 2(b_1 + b_2) \left\{ \frac{a^2 + b_1 b_2}{m} + \frac{1}{J} \right\} \rho\gamma^4 \omega^2 + \frac{\rho^2 \gamma^8}{mJ} 4b_1 b_2 [4a^2 + (b_1 + b_2)^2] = 0. \quad (8)$$

К (8) добавляются вытекающие из (3) равенства

$$a^4 + \frac{v^4}{16\gamma^8} - \frac{a^2 v^2}{2\gamma^4} - \frac{v^2 \omega^2}{16a^2 \gamma^8} - \frac{\omega_b^2 - \omega^2}{4\gamma^4} = 0, \quad (9)$$

$$b_1^2 = a^2 - \frac{v^2}{2\gamma^4} + \frac{v\omega}{2\gamma^4 a}, \quad b_2^2 = a^2 - \frac{v^2}{2\gamma^4} - \frac{v\omega}{2\gamma^4 a}.$$

Рассматриваемое твердотельное включение имеет степени свободы, обеспечивающие дискретному инерционному объекту возможность совершать два вида свободных колебательных движений в плоскости рисунка при движении вдоль направляющей — поперечные смещения и повороты. В связи с этим можно ожидать и наличия у системы двух дискретных спектров [2, 5]. Действительно, при скоростях включения, принадлежащих рассматриваемому диапазону, система уравнений (8), (9) имеет два вещественных корня  $\omega$ . Отвечающий поперечным смещениям корень (8), (9) определяется величиной массы твердого тела  $m$ , корень, отвечающий поворотам, — величиной момента инерции твердого тела  $J$ . Поскольку явного решения относительно  $\omega$  система (8), (9) не допускает, изучение характера зависимости дискретных спектров частот свободных колебаний от скорости движения включения вдоль направляющей удобнее всего вести путем численного решения данных уравнений для конкретных значений каждого из входящих в систему параметров. В условиях, когда нет априорной информации о соотношении инерционных параметров  $m$  и  $J$  для твердого тела общего вида, при численном решении уравнений представляется разумным рассмотреть такие частные постановки задачи, в которых один из двух инерционных параметров исчезает.

### 3. Предельные случаи для твердого тела. 3.1. Балка и материальная точка.

Если вдоль балки движется частица массы  $m$  (рис. 2), уравнение для определения зависимости частоты от скорости получается из (8) при  $J \rightarrow 0$ . В результате приходим к системе уравнений, состоящей из вспомогательных соотношений (9) и “основного” уравнения

$$m\omega^2/(2\rho\gamma^4) = b_1 b_2 [4a^2 + (b_1 + b_2)^2]/(b_1 + b_2). \quad (10)$$

Из совместного решения уравнений (9) и (10) определяются зависимости  $\omega = \omega(v)$ ,  $a = a(v)$ ,  $b_1 = b_1(v)$  и  $b_2 = b_2(v)$ , представленные соответственно на рис. 3, 4 и 5. Прогиб упругой линии с движущейся по ней частицей описывается следующей функцией:

$$w(\xi, \tau) = \begin{cases} W_0 [e^{b_1 \xi} e^{i(a\xi + \omega\tau + \Psi)} + \sigma e^{b_2 \xi} e^{-i(a\xi - \omega\tau + \Phi)}] / (e^{i\Psi} + \sigma e^{-i\Phi}), & \xi \leq 0, \\ W_0 [e^{-b_1 \xi} e^{i(a\xi + \omega\tau - \Psi)} + \sigma e^{-b_2 \xi} e^{-i(a\xi - \omega\tau - \Phi)}] / (e^{-i\Psi} + \sigma e^{i\Phi}), & \xi \geq 0. \end{cases} \quad (11)$$

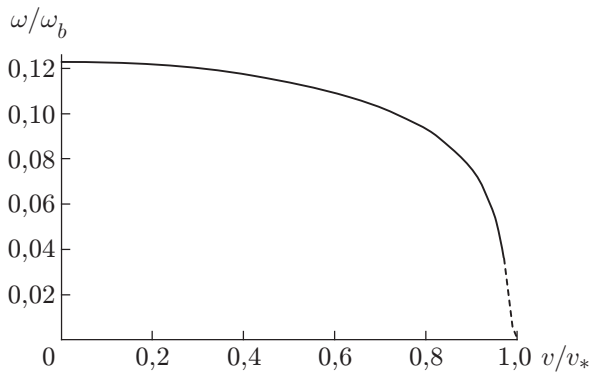


Рис. 3

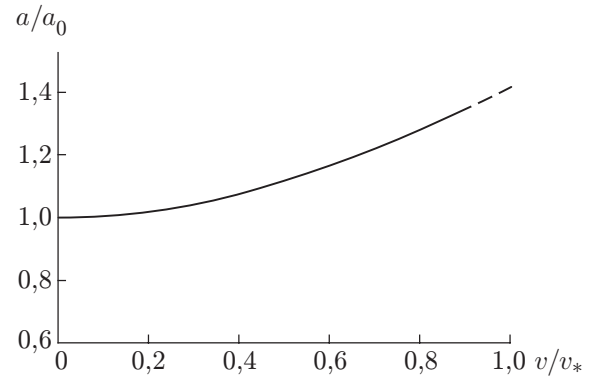


Рис. 4

Рис. 3. Зависимость частоты поперечных колебаний частицы от параметра  $v$

Рис. 4. Модуль вещественной части  $\mu_j$  как функция  $v$

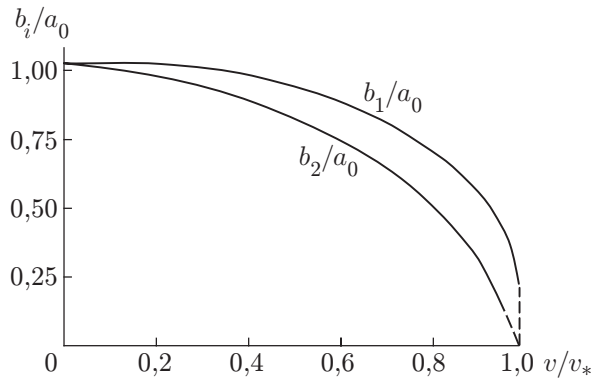


Рис. 5. Зависимость от  $v$  параметров, отвечающих за затухание возмущений в балке по длине

Здесь  $W_0$  — амплитуда поперечного смещения частицы, а зависящие от  $v$  параметры  $\sigma$ ,  $\Psi$  и  $\Phi$  определяются соотношениями

$$\sigma = \frac{b_1}{b_2} \sqrt{\frac{(a^2 + (b_1^2 - b_2^2)/4)^2 + a^2 b_2^2}{(a^2 - (b_1^2 - b_2^2)/4)^2 + a^2 b_1^2}},$$

$$\operatorname{tg} \Psi = ab_1/[a^2 - (b_1^2 - b_2^2)/4], \quad \operatorname{tg} \Phi = ab_2/[a^2 + (b_1^2 - b_2^2)/4].$$

Решение (11) “перемещается” вдоль направляющей вместе с частицей. Совершая свободные поперечные колебания вместе с направляющей, движущаяся вдоль упругой линии частица излучает в моментную среду две не затухающие со временем, но локализованные в окрестности частицы (т. е. нераспространяющиеся) волны, амплитуды и фазы которых связаны между собой однозначно. Волна, отвечающая слагаемому с множителями  $\exp(-b_1|\xi|)$  (ее амплитуда затухает интенсивнее по мере удаления от точки контакта), движется медленнее, нежели частица движется вдоль балки. Эта волна все время “отстает” от частицы. Волна, затухающая дальше от точки контакта (отвечает слагаемым с множителями  $\exp(-b_2|\xi|)$ ), наоборот, все время “обгоняет” частицу. По мере приближения скорости движения частицы вдоль направляющей к  $v_*$  область, возмущаемая поперечными движениями частицы, становится все протяженнее и при  $b_2 \rightarrow 0$  стремится к бесконечности по обе стороны от точечного дискретного инерционного элемента.

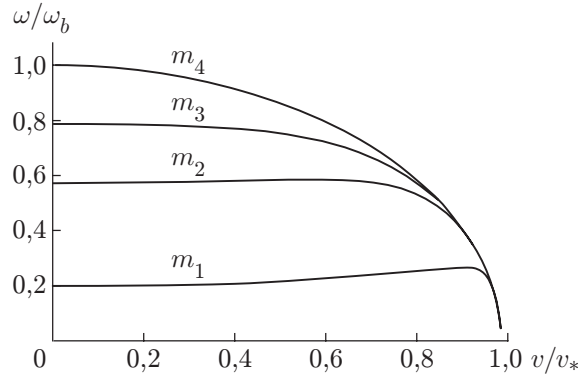


Рис. 6. Зависимость частоты поперечных колебаний частицы от параметров  $m$  и  $v$

Находя для (9) и (10) производную  $d\omega/dv$ , можно показать, что кривые  $\omega = \omega(v, m)$  имеют максимум. Для “легких” по отношению к погонной массе направляющей частиц максимум располагается вблизи  $v = 0$ . С ростом массы частицы ( $m_1 > m_2 > m_3 > m_4$ ) кривые  $\omega = \omega(v, m)$  опускаются ближе к горизонтальной оси, экстремум внутри интервала  $0 < v < v_*$  сдвигается в сторону больших значений  $v$  (рис. 6).

Для частиц, у которых собственная масса относится к массе единицы длины упруго-инерционной направляющей примерно так же, как масса вагона относится к массе одного метра верхнего строения железнодорожного пути, частота начинает существенно меняться только тогда, когда скорость достигает величины, равной примерно  $0,75v_*$  (нижняя кривая на рис. 6). Применительно к железнодорожному транспорту величина  $0,75v_*$  составляет около 500 км/ч. До достижения этих скоростей вертикальная динамика вагона “не замечает” наличия у рельсошпальной решетки инерционности. Вагон “реагирует” на реакцию со стороны рельса так же, как и на воздействие со стороны дискретного безынерционного упругого элемента.

3.2. *Балка и частично стесненное твердое тело.* Лишение твердого тела одной из его степеней свободы реализуем двумя способами, а именно: внешними связями наложим запрет либо на повороты тела в плоскости рисунка, либо на поперечные перемещения его центра масс. Формально первый случай можно описать предельным переходом  $J \rightarrow \infty$  в (8), что дает

$$m\omega^2/(2\rho\gamma^4) = (b_1 + b_2)(a^2 + b_1b_2). \quad (12)$$

Соотношения (9) и (12) составляют систему уравнений для определения дискретного спектра поперечных колебаний в задаче о движении вдоль балки Бернулли — Эйлера стесненного тела, которому запрещено поворачиваться в плоскости, содержащей нормаль и касательную к направляющей (рис. 7). В случае нулевой скорости перемещения сосредоточенного инерционного объекта вдоль направляющей и равенства массы стесненного тела массе частицы (см. рис. 1) частоты поперечных колебаний обеих систем совпадают. Представляет интерес проследить зависимости характеристик их спектров от параметра  $v$ .

При малых значениях параметра  $v$  зависимости  $\omega = \omega(v)$ ,  $a = a(v)$ ,  $b_1 = b_1(v)$  и  $b_2 = b_2(v)$  аналогичны функциям, полученным в ранее рассмотренной задаче о частице. Но с ростом скорости перемещения инерционного объекта вдоль направляющей частота поперечных колебаний  $\omega(v)$  в системе с частицей падает быстрее, нежели уменьшается частота в более “жесткой” системе со стесненным телом. На рис. 8 показано резкое нарастание разности между значениями частоты свободных локализованных колебаний в двух системах (см. рис. 2 и рис. 7), отнесенной к частоте  $\omega_0$ , отвечающей в обоих случаях

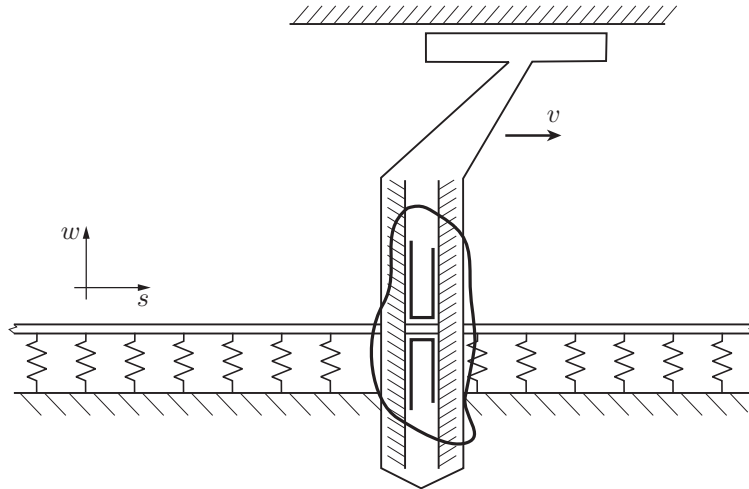


Рис. 7. Невращающееся твердое тело, перемещающееся вдоль балки

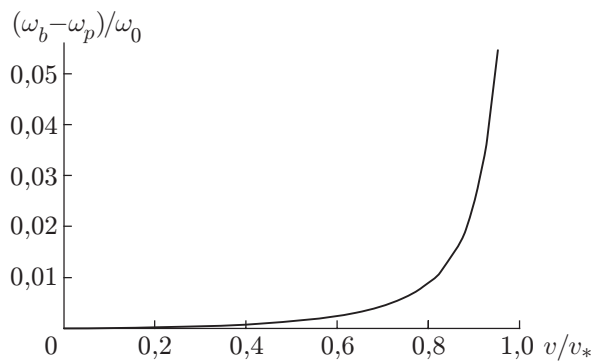


Рис. 8. Различие в частотах для стесненного тела и частицы при равенстве их масс

нулевой скорости продольного перемещения каждого из включений. Индекс  $p$  указывает частоту, соответствующую решению задачи о частице, индекс  $b$  — частоту, соответствующую задаче о частично стесненном твердом теле.

В работе [3] показано, что при  $v \equiv v_*$  в задаче о частице частота свободных колебаний движущегося включения на направляющей обращается в нуль. В области скоростей  $v > v_*$  движущаяся нагрузка возбуждает в системе распространяющиеся волны, которые обеспечивают затухание любых локализованных в окрестности сосредоточенного инерционного включения возмущений, следовательно, дискретные спектры исчезают. Таким образом, если в задаче о частице дискретный спектр исчезает с ростом скорости перемещения вдоль направляющей, проходя при  $v \equiv v_*$  через нулевое значение, то в задаче о стесненном твердом теле есть основания полагать, что исчезновение дискретного спектра (или по крайней мере одного из двух дискретных спектров в задаче о нестесненном твердом теле) происходит уже при значениях  $v < v_*$ . Причем это явление имеет место без обращения частоты свободных локализованных колебаний в нуль. Сравнивая при  $v \rightarrow v_*$  исходную консервативную систему (рис. 1) с ее вырожденными случаями, отвечающими  $J = 0$  (рис. 2) и  $J = \infty$  (рис. 7), ограничимся осторожными утверждениями. Во-первых, для значений  $v$  из интервала  $1 - \varepsilon < v/v_* < 1$ , где  $\varepsilon \ll 1$ , корни уравнения (8) (в совокупности с (9)), а также корни его предельных вариантов (10), (9) и (12), (9) численно определяются со значительно большей погрешностью, нежели вдали от  $v_*$ . Во-вторых, как показано в [3], при

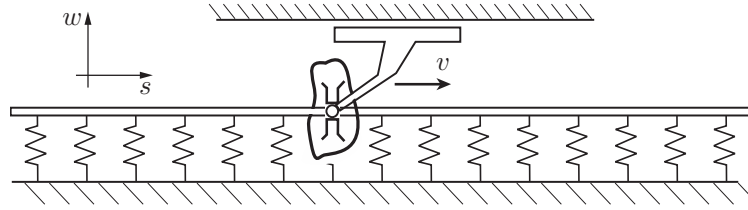


Рис. 9. Твердое тело, перемещающееся вдоль балки без поперечных трансляционных движений

$v \rightarrow v_*$  амплитуды поперечных деформаций балки, отвечающие формально допустимым режимам движения внешней нагрузки, могут стремиться к бесконечности. На рис. 3, 4 и 5 данному интервалу изменения  $v$  отвечают участки кривых, изображенные штриховыми линиями. В совокупности это указывает на обоснованность сомнений относительно разумности использования данной модели при интерпретации физических явлений для  $v \approx v_*$  без ее уточнения либо путем введения диссипативных членов, либо учетом нелинейных слагаемых.

Второй случай стеснения колебательных движений твердого тела описывается, если выполнить в (8) переход к пределу  $m \rightarrow \infty$

$$J\omega^2 / (2\rho\gamma^4) = b_1 + b_2. \tag{13}$$

Добавив к (13) уравнения (9), получаем систему уравнений для определения дискретного спектра частот поперечных колебаний в задаче о движении вдоль балки Бернулли — Эйлера стесненного тела, которое может поворачиваться в плоскости, содержащей нормаль и касательную к направляющей, однако точке контакта которого запрещено смещение в направлении нормали к направляющей (рис. 9).

3.3. *Балка и неньютонов инерционный объект.* В физике большое значение придают тем или иным симметриям формальных математических описаний природных явлений. Обращает на себя внимание то, что в исходное уравнение (8) входят равноправно и масса — инерционный параметр, отвечающий за вклад в кинетическую энергию инерционного объекта трансляционной составляющей его движения, и так называемый спинорный инерционный параметр, отвечающий за кинетическую энергию вращательной составляющей движения объекта — в данном случае это один из моментов инерции твердого тела. Две рассмотренные в пп. 3.1 и 3.2 частные задачи о дискретном спектре, имеющие ясную физическую интерпретацию, были получены из (8) предельными переходами к нулю и бесконечности по спинорному параметру, в последней задаче предельный переход к бесконечности был выполнен по трансляционному инерционному параметру — массе. Сохранив симметрию в смысле равноправия инерционных параметров, получим четвертую задачу о дискретном спектре движущегося вдоль упругоинерционной направляющей объекта, осуществив единственный оставшийся предельный переход — устремив в (8) к нулю массу сосредоточенного инерционного объекта. В этом случае к системе вспомогательных уравнений (9) для исследования зависимости дискретной частоты от скорости движения вдоль балки безмассового инерционного объекта в качестве основного необходимо добавить уравнение

$$\frac{J\omega^2}{2\rho\gamma^4} = \frac{b_1 b_2}{b_1 + b_2} \frac{4a^2 + (b_1 + b_2)^2}{a^2 + b_1 b_2}.$$

По сравнению с системой, изображенной на рис. 9, система с движущимся инерционным безмассовым объектом является менее “жесткой”. Как следствие при одинаковом



значении параметра  $J$  кривая зависимости частоты дискретного спектра от скорости движения объекта вдоль балки в последнем случае располагается ниже аналогичной кривой для стесненного твердого тела. Качественные же особенности кривых  $\omega(v)$ ,  $a(v)$ ,  $b_1(v)$  и  $b_2(v)$  повторяют зависимости, представленные на рис. 3–6.

**Заключение.** С использованием реальных параметров из [10] получены оценки, имеющие прикладное значение для задач совместной вертикальной динамики пути и высокоскоростного подвижного состава. Выяснено, что если скорости движения рельсовых экипажей не превышают 150 км/ч, моделирование воздействия рельсошпальной решетки на экипаж посредством безынерционных упругих элементов является вполне обоснованным.

Получены аналитические (неявные) зависимости частот свободных локализованных колебаний нескольких типов движущихся дискретных инерционных включений, движущихся с постоянной продольной скоростью вдоль упругоинерционной балки Бернулли — Эйлера. В качестве включений рассмотрены точечная масса, стесненное и нестесненное твердые тела, а также — предельным переходом  $m \rightarrow 0$  — нетипичный для классической механики инерционный объект, не имеющий массы.

Уточнены особенности форм локализованных колебаний, отвечающих дискретным спектрам лежащей на винклеровском основании балки Бернулли — Эйлера, взаимодействующей с подвижным дискретным инерционным включением. Эти положения дополняют результаты, представленные в [3, 6, 8, 9].

Отметим, что в ньютоновой механике инерция представлена только массой. Поэтому рассмотрение безмассовых объектов в ньютоновой динамике ведет к малосодержательным результатам. В эйлеровой механике важна не только инерция трансляционных движений, но и инерция спиновых (вращательных) движений. Эти два типа инерции проявляются по-разному и реально наблюдаемы. Например, специально подобранным управлением влияние “трансляционной инерции” можно свести к нулю. Тем не менее динамика объектов, лишенных трансляционной инерции, оказывается нетривиальной и ясно наблюдается в реальности. Пример среды, состоящей из частиц, обладающих только спиновой инерцией, приведен в работе [12].

В нашей работе теоретически показано, что инерционный безмассовый объект, движущийся относительно инерционной моментной среды с некой “докритической” относительной скоростью, вызывает в ней наблюдаемые локальные возмущения, аналогичные тем, которые имеют место при рассмотрении систем с традиционными инерционными телами. Таким образом, с позиций классической механики рассмотренный неньютонов объект, движущийся в моментной среде, можно признать принципиально доступным наблюдению при использовании спектральных методов регистрации.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Каплунов Ю. Д. Крутильные колебания стержня на деформируемом основании при действии движущейся инерционной нагрузки // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1986. № 6. С. 174–177.
2. Гаврилов С. Н., Индейцев Д. А. Об эволюции ловушечной моды колебаний в дискретно-континуальной системе с медленно меняющимися параметрами // Актуальные проблемы механики: Тр. XXVIII летней школы-конференции. Спб.: Ин-т пробл. машиноведения РАН, 2001. Т. 2. С. 80–92.
3. Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем: Современные концепции, парадоксы и ошибки. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.
4. Пономарев С. Д., Бидерман В. Л., Лихарев К. К. и др. Основы современных методов расчета в машиностроении. М.: Машгиз, 1952. С. 198–202.

5. **Бабешко В. А., Глушков Б. В., Винченко Н. Ф.** Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989.
6. **Денисов Г. Г., Кугушева Е. К., Новиков В. В.** К задаче об устойчивости одномерных безграничных упругих систем // Прикл. математика и механика. 1985. Т. 49, вып. 4. С. 691–696.
7. **Неймарк Ю. И.** Динамические системы и управляемые процессы. М.: Наука, 1978.
8. **Metrikine A. V., Dieterman H. A.** Instability of vibrations of a mass moving uniformly along an axially compressed beam on a visco-elastic foundation // J. Sound Vibrations. 1997. V. 201, N 5. P. 567–576.
9. **Веричев С. Н., Метрикин А. В.** Динамическая жесткость балки в движущемся контакте // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 6. С. 170–177.
10. **Индейцев Д. А., Сергеев А. Д.** Локализованные колебания системы “упругая направляющая — движущееся инерционное включение” // Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем: Тр. XXV–XXVI летних школ. СПб.: Ин-т пробл. машиноведения РАН, 1998. С. 154–162.
11. **Шахунянц Г. М.** Железнодорожный путь. М.: Транспорт, 1987.
12. **Жилин П. А.** Реальность и механика // Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем: Тр. XXIII летней школы-конференции. СПб.: Ин-т пробл. машиноведения РАН, 1996. С. 6–49.

*Поступила в редакцию 14/IV 2004 г.,  
в окончательном варианте — 28/VII 2004 г.*

---