

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАМЕРЗАНИЯ — ТАЯНИЯ  
ЗАСОЛЕННОГО МЕРЗЛОГО ГРУНТА \*В. И. Васильев<sup>1</sup>, А. М. Максимов<sup>2</sup>, Е. Е. Петров<sup>1</sup>, Г. Г. Цыпкин<sup>2</sup><sup>1</sup> Якутский государственный университет, 677000 Якутск<sup>2</sup> Институт проблем механики РАН, 117526 Москва

Необходимость построения математической модели взаимодействия мерзлых пород с раствором соли возникает при изучении ряда природных процессов и процессов, связанных с технической деятельностью. Так, в [1–3] показано, что взаимодействие морской воды с мерзлыми породами дна северных морей существенно влияет на динамику их протаивания. В [4, 5] изучается взаимодействие мерзлых пород с раствором соли при бурении в них скважин с промывкой жидкостью на основе или с добавками соли. Присутствие в промывочной жидкости растворенной соли позволяет охладить ее до отрицательных температур и тем самым уменьшить радиус протаивания и смыва пород, т. е. понизить кавернообразование. Еще одним примером природного процесса, приведенным в [6], в котором происходит взаимодействие мерзлых пород с раствором соли, является эволюция криопэггов (областей в мерзлых породах, заполненных минерализованными водами с отрицательной температурой).

В настоящей работе построена математическая модель процессов теплоассоциированного с фазовыми переходами в мерзлом грунте, получено автоматическое решение (численное и аналитическое для линеаризованной задачи) и проведено численное исследование нестационарной задачи.

**1. Модель мерзлого грунта.** В [7] качественно сформулирована модель мерзлого грунта, в основу которой легло предположение о наличии незамерзшей влаги в мерзлых грунтах: «... в любой момент времени в мерзлом грунте (в порах или между контактами минеральных частиц) предполагается наличие некоторого количества воды в жидкой фазе, находящейся в равновесном состоянии с рядом внешних факторов (температурой, давлением и пр.)». Под равновесным состоянием понималось не только термодинамическое равновесие, но и более общий факт, что мерзлый грунт «реагирует» на изменение внешних условий, в результате чего достигается новое состояние равновесия.

Как известно, температура фазового перехода  $H_2O$  зависит от концентрации растворенной примеси, давления и сил поверхностного взаимодействия. Естественно предположить, что в поровом пространстве мерзлого грунта вода существует в жидком состоянии при отрицательных температурах из-за наличия указанных факторов и находится в состоянии локального термодинамического равновесия с поровым льдом. Это состояние термодинамического равновесия может быть количественно описано посредством формулы, связывающей температуру фазового перехода вода — лед с концентрацией примеси (давление и поверхностные явления остаются вне рамок настоящей работы). При практических расчетах чаще используется линейная зависимость

$$T_f = T_w - \alpha c, \quad (1.1)$$

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94-01-00513).

где  $\alpha$  — коэффициент понижения температуры фазового перехода вода — лед.

Условие термодинамического равновесия означает, что локальная температура  $T$  мерзлого грунта совпадает с локальной температурой фазового перехода  $T_f$ , вычисляемой по формуле (1.1). При таком определении равновесия становится ясным, что всякое изменение внешних условий приводит к нарушению состояния термодинамического равновесия между льдом и незамерзшей водой в поровом пространстве, в результате чего начинаются кристаллизация воды или плавление льда, сопровождающиеся процессами тепломассопереноса до тех пор, пока не будет достигнуто новое состояние равновесия.

Рассмотрим качественный пример. Пусть в поровом пространстве мерзлого грунта водный раствор соли находится в состоянии термодинамического равновесия со льдом при отрицательной температуре  $T_f = T_w - \alpha c$ . Понижим температуру мерзлого грунта на  $\Delta T$ . Тогда в порах начнется кристаллизация с отторжением соли в раствор. Этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока концентрация примеси не повысится на такое значение  $\Delta c$ , при котором наступит новое состояние равновесия, описываемое формулой  $T_f - \Delta T = T_w - \alpha(c + \Delta c)$ . Наоборот, повышение температуры приведет к плавлению льда и разбавлению раствора, который достигнет равновесного состояния со льдом, но уже при более высокой температуре. Аналогичное действие производит и повышение (понижение) давления. Для построения математической модели фазовых переходов в мерзлом грунте требуется дополнить условие равновесия (1.1) уравнениями переноса, начальными и граничными условиями, в том числе на подвижных границах промерзания и протаивания.

**2. Постановка задачи.** Математическое описание процессов тепломассопереноса с фазовыми превращениями в мерзлых грунтах может быть построено в рамках механики сплошных сред на основе законов сохранения массы, импульса, энергии, а также законов термодинамики. Такой подход приводит к системе уравнений, в которой искомыми функциями являются температура, давление, концентрация растворенных примесей, влажность и т. д. Рассмотрим систему уравнений, описывающих изменение фазового состава, процессы переноса тепла, влаги и растворенной примеси. Будем полагать, что мерзлые грунты представляют собой пористые среды, насыщенные льдом и незамерзшей водой. Газовый компонент и влага в виде пара предполагаются отсутствующими. Скелет пористой среды, лед и поровая жидкость несжимаемы и неподвижны. Молекулы примеси в кристаллической структуре льда отсутствуют. Вся растворенная примесь при образовании льда отторгается в раствор и в осадок не выпадает. Совместное существование льда и незамерзшей воды осуществляется в условиях термодинамического равновесия, т. е. характерное время макропроцесса много больше характерного времени установления локального термодинамического равновесия.

Закон сохранения массы растворенного вещества с учетом сделанных предположений имеет вид

$$\partial(m S c)/\partial t - \operatorname{div}(D m S \operatorname{grad} c) = 0, \quad (2.1)$$

где  $m$  — пористость;  $S$  — влажность;  $c$  — массовая концентрация растворенного вещества;  $D$  — коэффициент диффузии. Это уравнение является следствием общего уравнения неразрывности растворенного вещества и учитывает диффузионный механизм переноса примеси, а также концентрирование (разбавление) раствора при уменьшении (увеличении) функции водонасыщенности. Конвективный механизм переноса примеси здесь не рассматривается вследствие предположения об отсутствии тече-

ния жидкости.

Уравнение энергии, учитывающее выделение или поглощение тепла при фазовых переходах в области мерзлого грунта, запишем в форме

$$(\rho C)_r \partial T / \partial t - \operatorname{div}(\lambda_r \operatorname{grad} T) + m \rho_i q \partial S / \partial t = 0. \quad (2.2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} (\rho C)_r &= (1 - m)\rho_s C_s + mS\rho_w C_w + m(1 - S)\rho_i C_i; \\ \lambda_r &= (1 - m)\lambda_s + mS\lambda_w + m(1 - S)\lambda_i; \quad q = h_w - h_i; \end{aligned}$$

$\rho$  — плотность;  $C$  — теплоемкость;  $\lambda$  — теплопроводность;  $q$  — теплота фазового перехода вода — лед;  $h$  — энтальпия; индексы:  $s$  — скелет грунта,  $w$  — вода,  $i$  — лед.

Постановки задач с фазовыми переходами содержат искомые движущиеся поверхности фазового перехода, на которых функция  $S$  может претерпевать разрыв. Используя универсальные соотношения на скачках, получим условия на границах фазового перехода. Будем рассматривать скачки функции влажности, на которых выполняются условия непрерывности температуры и концентрации примеси:

$$[T]^\pm = 0, \quad [c]^\pm = 0.$$

Законы сохранения массы, растворенной примеси и энергии на скачке имеют вид

$$m[S]^\pm c V_n + m[DS(\operatorname{grad} c)_n]^\pm = 0; \quad (2.3)$$

$$m[S]^\pm q V_n + [\lambda_m(\operatorname{grad} T)_n]^\pm = 0. \quad (2.4)$$

Полученные условия на скачках влажности должны быть дополнены условием термодинамического равновесия (1.1), вместе с которым они составляют полную систему условий на неизвестных подвижных границах фазовых переходов.

Рассмотрим процесс взаимодействия мерзлых грунтов с раствором соли. Пусть мерзлый грунт, находящийся в равновесном состоянии при температуре  $T_0 = T_w - \alpha c_0$  и заполняющий полупространство  $x > 0$ , контактирует на неподвижной границе  $x = 0$  с водным раствором соли с температурой  $T^0$  и концентрацией  $c^0$  ( $T^0 > T_w - \alpha c^0$ ). Если граничная температура ниже начальной, то, учитывая более высокую скорость процесса распространения тепла по сравнению с диффузией примеси, естественно предположить, что существуют два фронта фазовых превращений: фронт кристаллизации, вызванный охлаждением, и фронт протаивания, обусловленный разрушением порового льда на границе контакта с рассолом. Как показано в [8], постановка двухфронтной задачи содержит противоречие, которое приводит к нарушению условия термодинамического равновесия в области мерзлого грунта. Это выражается в факте «перегрева» или «переохлаждения» смеси лед — рассол, заполняющей поровое пространство. Таким образом, фронтальной режим фазовых переходов в мерзлом грунте не реализуется вообще.

Чтобы построить непротиворечивое теоретическое описание, достаточно предположить, что фазовые переходы имеют место во всей области существования мерзлого грунта (факт распространения фазовых переходов на всю полубесконечную область обусловлен тем, что температурные возмущения распространяются с бесконечной скоростью). В этом случае математическая формулировка задачи предполагает существование фронта частичных фазовых переходов, распространяющегося справа от  $x = 0$  и разделяющего области талого грунта (слева от фронта) и мерзлого (перед фронтом).

В области талого грунта справедливы уравнения теплопроводности и диффузии соли:

$$\partial T / \partial t = a_l \Delta T, \quad \partial c / \partial t = D \Delta c, \quad x < \chi(t) \quad (2.5)$$

$$(a_l = [(1 - m)\lambda_s + m\lambda_w] / [(1 - m)\rho_s C_s + m\rho_w C_w]).$$

Уравнения (2.1), (2.2) представляют собой систему уравнений переноса с фазовыми переходами в области мерзлого грунта.

На подвижной границе, которая является фронтом протаивания мерзлого грунта (сзади фронта лед отсутствует), справедливы граничные условия (2.3), (2.4).

Если возмущения искомым функций малы по сравнению с абсолютными величинами, то имеет смысл рассмотреть решение задачи в линейном приближении. Так, линеаризуя уравнение (2.1) около начального состояния, в первом приближении получаем

$$S_0 \frac{\partial c}{\partial t} + c_0 \frac{\partial S}{\partial t} - D S_0 \Delta c = 0. \quad (2.6)$$

Заметим, что два остальных уравнения системы уже линейны. Выражая концентрацию примеси из уравнения (1.1) и подставляя в уравнение (2.6), имеем систему уравнений для возмущений насыщенности и температуры:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\alpha c_0}{S_0} \frac{\partial S}{\partial t} = \nu \Delta T, \quad \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{m q \rho_i}{(\rho C)_r} \frac{\partial S}{\partial t} = a_r \Delta T. \quad (2.7)$$

Отметим, что функция влажности входит только под знаком временной производной. Исключая эти производные, находим эффективное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a_m \Delta T,$$

где

$$a_m = \frac{\lambda_m}{(\rho C)_m}; \quad \lambda_m = \frac{m D q S_0 \rho_i}{\alpha c_0 (\rho C)_r} + a_r; \quad (\rho C)_m = \frac{m q S_0 \rho_i}{\alpha c_0 (\rho C)_r} + 1.$$

**3. Автомодельное решение.** Рассмотрим решение линеаризованной задачи в одномерном приближении. Если  $T_0, c_0, S_0, T^0, c^0$  — постоянные величины, то задача имеет автомодельное решение типа Неймана:

$$T = T(\xi), \quad c = c(\xi), \quad S = S(\xi), \quad x = \chi(t) = \varphi \sqrt{t}, \quad \xi = x / \sqrt{t}.$$

При  $0 < x < \chi(t)$

$$\begin{aligned} T &= T^0 + (T_* - T^0) \operatorname{erf}(\xi / 2\sqrt{a_l}) / \operatorname{erf}(\varphi / 2\sqrt{a_l}), \\ c &= c^0 + (c_* - c^0) \operatorname{erf}(\xi / 2\sqrt{D}) / \operatorname{erf}(\varphi / 2\sqrt{D}); \end{aligned} \quad (3.1)$$

при  $x > \chi(t)$

$$T = T_0 + (T_* - T_0) \operatorname{erfc}(\xi / 2\sqrt{a_m}) / \operatorname{erfc}(\varphi / 2\sqrt{a_m}). \quad (3.2)$$

Распределение концентрации примеси в области перед фронтом находится из уравнения равновесия (1.1). Для определения функции влажности в этой области исключим из системы (2.7) пространственные производные. В результате получим соотношение между влажностью и температурой

$$T - T_0 = \sigma(S - S_0), \quad (3.3)$$

где

$$\sigma = \frac{D}{a_r} \left[ \frac{m q \rho_i}{(\rho C)_r} + \frac{\alpha c_0 a_r}{S_0 D} \right].$$

Условия на подвижной границе в автомодельном приближении имеют вид

$$\begin{aligned} m \rho_i q (1 - S_*) \frac{\varphi}{2} &= \lambda_+ \left( \frac{dT}{d\xi} \right)_+ - \lambda_- \left( \frac{dT}{d\xi} \right)_-, \\ \frac{c_* (1 - S_*)}{D} \frac{\varphi}{2} &= S_* \left( \frac{dc}{d\xi} \right)_+ - \left( \frac{dc}{d\xi} \right)_-, \quad T_* = T_w - \alpha c_*. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Подставляя решения (3.1)–(3.3) в (3.4), находим систему трансцендентных уравнений относительно неизвестных  $T_*$ ,  $c_*$ ,  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} m \rho_i q (1 - S) \frac{\varphi}{2} + \lambda_+ \left( \frac{T_* - T_0}{\sqrt{\pi a_r}} \frac{\exp(-\varphi^2/4a_m)}{\operatorname{erfc}(\varphi/2\sqrt{a_m})} \right)_+ + \\ + \lambda_- \left( \frac{T_* - T_0}{\sqrt{\pi a_l}} \frac{\exp(-\varphi^2/4a_l)}{\operatorname{erf}(\varphi/2\sqrt{a_l})} \right)_- = 0, \\ \frac{c_* (1 - S_*)}{D} \frac{\varphi}{2} - S_* \left( \frac{T_* - T_0}{\sqrt{\pi a_r}} \frac{\exp(-\varphi^2/4a_m)}{\operatorname{erfc}(\varphi/2\sqrt{a_m})} \right)_+ + \\ + \left( \frac{c_* - c^0}{\sqrt{\pi D}} \frac{\exp(-\varphi^2/4D)}{\operatorname{erf}(\varphi/2\sqrt{D})} \right)_- = 0, \quad c_* = \frac{T_w - T_*}{\alpha}. \end{aligned}$$

Если возмущения искомых функций сопоставимы с их абсолютными величинами, для построения автомодельного решения требуется решить двухточечную краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений в мерзлой зоне, к которой преобразуются (2.1), (2.2) вследствие замены  $\xi = x/\sqrt{t}$ , а также систему трансцендентных уравнений для искомых границы раздела зон, температуры и концентрации на этой границе.

**4. Численное решение нестационарной задачи.** Для численного решения рассматриваемой неклассической задачи используем чисто неявную разностную схему, сочетающую достоинства как разностных схем сквозного счета, так и метода ловли поверхности раздела лед — двухфазная зона в узел прямоугольной пространственно-временной сетки [9, 10]. На сегменте  $[0, 1]$  введем квазиравномерную сетку

$$\bar{\omega}_h = \{ x_i = x_{i-1} + h_i, \quad i = \overline{1, n}; \quad x_0 = 0; \quad h_i = a \bar{h}_{i-1}, \quad i = \overline{1, n} \},$$

шаги которой образуют возрастающую геометрическую прогрессию со знаменателем  $a > 1$ , при этом параметры сетки  $n$ ,  $h_0$ ,  $a$  выбраны таким образом, что  $x_n = L$ . Величина временного шага определяется в ходе решения поставленной задачи.

Пусть найдены приближенные значения решения исходной задачи до момента времени  $t = t_{j-1}$ . Построим вычислительный алгоритм, осуществляющий переход на следующий временной слой.

Уравнениям теплопроводности и диффузии в талой зоне (2.5) поставим в соответствие их чисто неявные дискретные аналоги:

$$h_i \frac{T_i - \bar{T}_i}{a_l \tau} = \frac{T_{i+1} - T_i}{h_{i+1}} - \frac{T_i - T_{i-1}}{h_i}, \quad i = \overline{1, j-1}; \quad (4.1)$$

$$h_i \frac{c_i - \bar{c}_i}{D \tau} = \frac{c_{i+1} - c_i}{h_{i+1}} - \frac{c_i - c_{i-1}}{h_i}, \quad i = \overline{1, j-1}. \quad (4.2)$$

В мерзлой зоне из уравнений (2.1), (2.2) и соотношения (1.1) выведем уравнение, которое используем для нахождения распределения температуры. Из уравнения (2.1) в силу (1.1) следует

$$(T - T_w) \frac{\partial S}{\partial t} = D \frac{\partial}{\partial x} \left( S \frac{\partial T}{\partial x} \right) - S \frac{\partial T}{\partial t}, \quad x > \chi(t), \quad t > 0.$$

Поставив правую часть полученного соотношения вместо последнего слагаемого в правой части дифференциального уравнения (2.2), имеем

$$(\rho C)_r \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_r \frac{\partial T}{\partial x} \right) - m \rho_i q \frac{D}{T - T_w} \frac{\partial}{\partial x} \left( S \frac{\partial T}{\partial x} \right) + m \rho_i q \frac{1}{T - T_w} \frac{\partial T}{\partial t},$$

$$x > \chi(t), \quad t > 0.$$

Аппроксимируем это уравнение с помощью чисто неявных трехточечных разностных уравнений:

$$\begin{aligned} \bar{h}_i \left[ (\rho C)_{r,i} - \frac{\rho_i q m}{\bar{T}_i - T_w} \right] \frac{T_i - \bar{T}_i}{\tau} = & \left[ \lambda_{r,i+1/2} - \frac{m q \rho_i D}{\bar{T}_i - T_w} \right] \frac{T_{i+1} - T_i}{h_{i+1}} - \\ & - \left[ \lambda_{r,i-1/2} - \frac{m q \rho_i D}{\bar{T}_i - T_w} \right] \frac{T_i - T_{i-1}}{h_i}, \quad i = \overline{j+1, n-1}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь

$$(\rho C)_{r,k} = (1 - m) \rho_s C_s + m S_k \rho_w C_w + m (1 - S_k) \rho_i C_i;$$

$$\lambda_{r,k+1/2} = (1 - m) \lambda_s + m \lambda_i + m (\lambda_w - \lambda_i) (S_k + S_{k+1}) / 2.$$

Распределение концентрации соли в мерзлой зоне находим из дискретного аналога соотношения (1.1), выражающего термодинамическое равновесие воды и льда:

$$c_i = (T_w - T_i) / \alpha, \quad i = \overline{j, n}. \quad (4.4)$$

Численную реализацию дифференциально-разностной схемы Рунге, аппроксимирующей закон сохранения энергии

$$(\rho C)_r \frac{T - \bar{T}}{\tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_r \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \rho_i q m \frac{\partial S}{\partial t}, \quad x > \chi(t),$$

используя принцип аддитивности [9], осуществляем в два этапа. На первом этапе определяем вспомогательное распределение температуры как решение уравнения теплопроводности:

$$(\rho C)_r \frac{\bar{T} - \bar{T}}{\tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_p \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad x > \chi_j$$

( $\lambda_p = (1 - m) \lambda_s + m \lambda_i$ ). Ему ставим в соответствие его чисто неявный дискретный аналог

$$\bar{h}_i (\rho C)_{r,i} \frac{T_i - \bar{T}_i}{\lambda_p \tau} = \frac{T_{i+1} - T_i}{\bar{h}_{i+1}} - \frac{T_i - T_{i-1}}{h_i}, \quad i = \overline{j+1, n-1}. \quad (4.5)$$

На втором этапе выписываем схему Рунге для распределения температуры на верхнем временном слое:

$$(\rho C)_r \frac{T - T}{\tau} = (\lambda_l - \lambda_p) \frac{\partial}{\partial x} \left( S \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \rho_i q m \frac{\partial S}{\partial t}, \quad x > \chi_j.$$

В силу того что в двухфазной зоне лед и вода сосуществуют в состоянии термодинамического равновесия и локальные значения температуры и концентрации соли в растворе удовлетворяют соотношению (1.1), из выведенного соотношения, используя уравнение (2.1), получим

$$(\rho C)_r \frac{T - T}{\tau} = (\lambda_p - \lambda_l) \frac{S(T - T_p) + \alpha \bar{S} c}{D \tau} - \rho_i q m \frac{S - \bar{S}}{\tau}, \quad x > \chi_j.$$

Из дискретного аналога этого уравнения находим распределение влажности в двухфазной зоне:

$$S_i = \frac{\rho_i q m S_i - (\rho C)_p (T_i - \bar{T}_i) + (\lambda_p - \lambda_l) \alpha S_i c_i}{\rho_i q m + [(\rho C)_l - (\rho C)_p](T_i - T_i) - (\lambda_p - \lambda_l)(T_i - T_w)}, \quad i = \overline{j, n-1} \quad (4.6)$$

$$((\rho C)_p = (1 - m)(\rho C)_s + m(\rho C)_i).$$

Перед тем, как построить дискретные аналоги граничных условий на неизвестной поверхности раздела талой и мерзлой зон, из соотношения (2.3) с помощью условия (2.4) исключим слагаемое, содержащее скорость ее движения:

$$(T_* - T_w) \left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right] = \alpha q \rho_i D \left[ S \frac{\partial c}{\partial x} \right], \quad t > 0.$$

Полученному соотношению поставим в соответствие его дискретный аналог

$$\begin{aligned} (T_j - T_w) \left[ \lambda_{r,j} \frac{T_{j+1} - T_j}{h_{j+1}} - \lambda_l \frac{T_j - T_{j-1}}{h_j} \right] = \\ = m \alpha q \rho_i D \left[ \frac{c_{j+1} - c_j}{h_{j+1}} S_j - \frac{c_j - c_{j-1}}{h_j} \right]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Обобщенному условию Стефана (2.4) ставим в соответствие его чисто неявную конечно-разностную аппроксимацию

$$m q \rho_s (1 - S_j) \frac{h_j}{\tau} = \lambda_{r,j} \frac{T_{j+1} - T_j}{h_{j+1}} - \lambda_l \frac{T_j - T_{j-1}}{h_j}. \quad (4.8)$$

Аналогично строятся дискретные аналоги краевых условий на неподвижных границах.

Таким образом, для перехода с  $(j - 1)$ -го временного слоя на следующий  $j$ -й временной слой необходимо решить нелинейную систему алгебраических уравнений. Нелинейность рассматриваемой системы обусловлена тем, что, для того чтобы найти распределения температуры, концентрации примеси и влажности, мы должны знать временной шаг, и, наоборот, вычисление временного шага возможно лишь по известному распределению температуры, по крайней мере при известных значениях температуры в окрестности поверхности раздела талой и мерзлой зон. Поэтому для реализации полученной нелинейной системы приходим к необходимости организации итерационного процесса. Будем пользоваться нижеприведенным способом последовательных приближений, по существу являющимся некоторой реализацией метода простых итераций.

*Шаг 1.* Положим  $k = 0$  (счетчик итераций) и зададим начальное приближение временного шага  $\tau_0$  (например,  $\tau_0 = \bar{\tau}$ ). Естественно, что придется отдельно задавать начальное приближение первого временного шага, например, по формуле

$$\tau_0 = \sigma q \rho_i h_1^2 / [\lambda_l (T_w - \alpha c_0 - T_c)], \quad \sigma \in (0, 1].$$

**Шаг 2.** Решаем линеаризованную систему уравнений (4.1)–(4.6) с соответствующими краевыми условиями на неподвижных границах.

**Шаг 3.** Из линеаризованного уравнения (4.7) определяем очередное приближение температуры фазового перехода  $T_j$ , а из соотношения (4.8) — временной шаг. При этом в качестве очередного приближения температуры фазового перехода льда в воду берется меньший из корней получающегося квадратного уравнения. Концентрация примеси на фронте находится из линеаризованного соотношения (4.4).

**Шаг 4.** Рассмотрим ошибку итерационного процесса

$$z = |\tau_{k+1}/\tau_k - 1|.$$

Если  $z \geq \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — заданное малое число, то  $k$  увеличиваем на единицу и возвращаемся к выполнению шага 2 итерационного процесса. В противном случае считаем, что переход на следующий временной слой осуществлен, и за величины искомого временного шага, распределений температуры, концентрации примеси и влажности в обеих фазах и на поверхности фазового перехода берем соответствующие величины, полученные на последней итерации.

**5. Примеры расчетов.** Ниже представлено сравнение результатов расчетов трех решений одномерной задачи: решение линеаризованной автомодельной задачи, автомодельной задачи в исходной нелинейной постановке и численное решение нестационарной задачи. Расчеты проведены при следующих параметрах:  $\rho_w = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_i = 910$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_s = 2000$  кг/м<sup>3</sup>,  $m = 0,2$ ,  $\lambda_w = 0,58$  Вт/(м·К),  $\lambda_i = 2,23$  Вт/(м·К),  $\lambda_s = 2$  Вт/(м·К),  $c_w = 4190$  Дж/(кг·К),  $c_i = 2000$  Дж/(кг·К),  $c_s = 1920$  Дж/(кг·К),  $q = 3,34 \cdot 10^5$  Дж/кг,  $D = 1,45 \cdot 10^{-9}$  м<sup>2</sup>/с,  $\alpha = 66,7$  К,  $T_w = 273,15$  К,  $S_0 = 0,5$ ,  $T_0 = 271$  К,  $c^0 = 0,05$ .

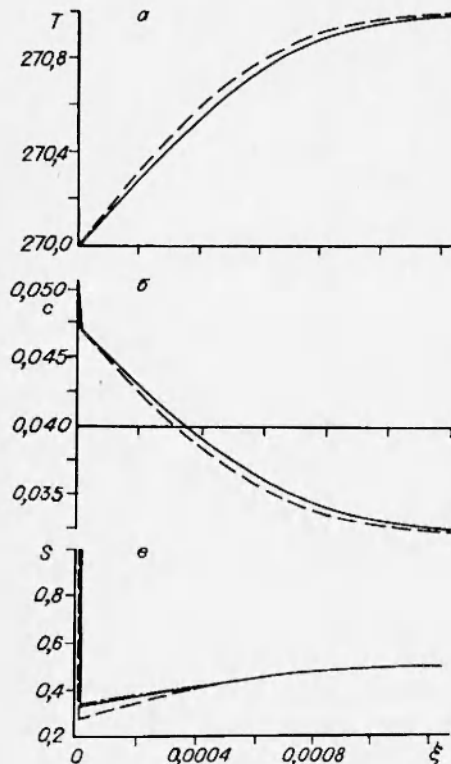


Рис. 1

На рис. 1 и 2 приведены характерные распределения искомых функций в обеих областях (сплошная линия — численное решение нестационарной задачи, штриховая — численное решение автомодельной задачи, а штрихпунктирная — решение линеаризованной задачи). Результаты численных экспериментов показывают, что существуют два принципиально различных режима взаимодействия мерзлых пород с раствором соли.

В первом случае (рис. 1), когда температура раствора соли ( $T^0 = 272$  К) выше температуры мерзлого грунта, наряду с фронтом полного протаивания имеет место плавление льда в области перед фронтом. Представленное распределение концентрации соли говорит о разбавлении раствора в окрестности фронта в связи с образованием дополнительного объема воды при таянии льда. Уменьшение концентрации примеси приводит к ее диффузионному перераспределению в обеих областях.



Этот фактор, так же как и распространение тепла, приводит к нарушению термодинамического равновесия в области мерзлого грунта, что вызывает фазовые переходы в протяженной области перед фронтом.

Второй случай (рис. 2)

отражает ситуацию, возникающую при взаимодействии мерзлых пород с раствором высокой минерализации, когда его температура ( $T^0 = 270$  К) ниже, чем температура мерзлых пород. Здесь существование фронта полного протаивания обусловлено «разъеданием» солью порового льда. Этот процесс сопровождается значительным поглощением тепла на фронте протаивания, в результате чего температура на фронте оказывается ниже начальных температур мерзлого грунта и раствора. Охлаждение приводит к тому, что тепло отводится из области мерзлого грунта, вызывая частичное замерзание, о чем свидетельствует уменьшение функции влажности на фронте и в области перед ним по сравнению с начальным значением. Скорость распространения фронта полного протаивания определяется главным образом величиной теплового потока из зоны талого грунта и оказывается значительно выше в случае более теплого раствора (см. рис. 1). Отметим удовлетворительную близость решений задачи в точной и линеаризованной постановках.

Построенная математическая модель мерзлого грунта и фазовых переходов в нем позволяет объяснить некоторые эффекты, возникающие при бурении скважин в мерзлых породах с промывкой жидкостью на водной основе, когда протаивание и вынос пород оказываются существенно большими, чем предполагалось на основе решения фронтальной тепловой задачи. Действительно, если мерзлые породы содержат незамерзшую воду, в которой растворено даже небольшое количество примеси, и температура раствора выше температуры мерзлого грунта, то процесс протаивания будет происходить в режиме, качественный вид которого изображен на рис. 1, т. е. не только образуется полностью талая зона (как и во фронтальной модели), но и произойдет значительное частичное протаивание. Поскольку прочность мерзлых пород во многом определяется их влажностью (лед

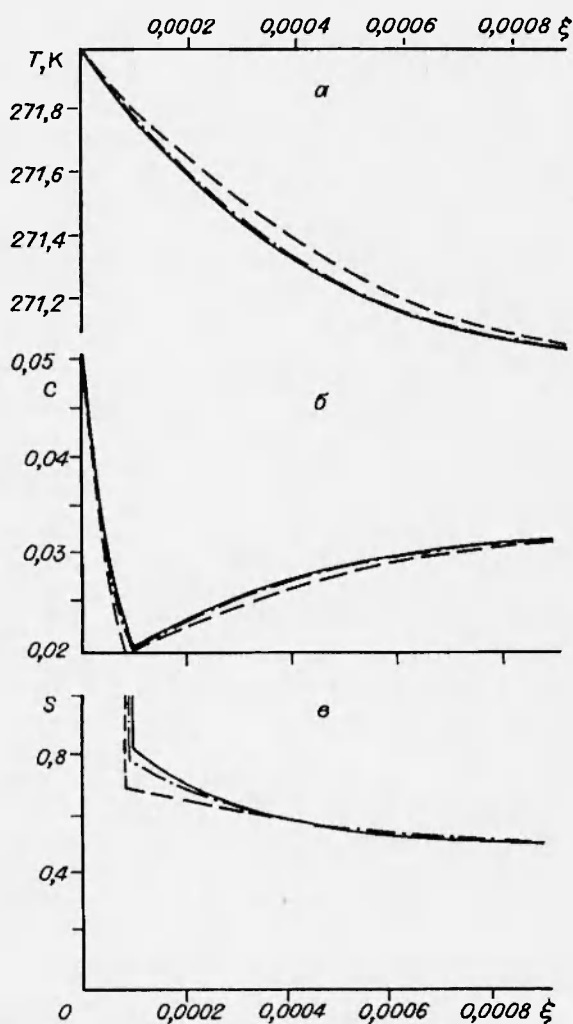


Рис. 2

цементирует породу), то достижение критической влажности при частичном протаивании приведет к обрушению и выносу из скважины таких неполовностью протаявших пород. С другой стороны, при использовании для замораживания грунта минерализованных охлажденных растворов следует учитывать, что наряду с замерзанием имеет место и более медленный процесс протаивания из-за «разъедания» льда раствором соли (рис. 2).

Аналогичные явления наблюдаются и при взаимодействии инженерных сооружений с мерзлыми грунтами. Этот случай можно смоделировать стенкой, непроницаемой для примеси и проницаемой для тепла. Тогда тепло, поступающее в грунт от более теплой поверхности, вызовет протаивание в протяженной области, что приведет к нарушению прочностных свойств в значительно большей по размерам области, чем та, которая получается из решения тепловой задачи Стефана.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Harrison W. D., Osterkamp T. E.** Heat and mass transport processes in subsea permafrost: I. An analysis of molecular diffusion and its consequences // *J. Geophys. Res.*, С. 1978. V. 83, N 9. P. 4707-4712.
2. **Hutter K., Alts T.** Ice and snow mechanics. A challenge to theoretical and applied mechanics // *Theoretical and Applied Mechanics: Proc. XVI Int. Congr.* Amsterdam: North Holland, 1985.
3. **Swift D. W., Harrison W. D., Osterkamp T. E.** Heat and salt transport in thawing subsea permafrost at Prudhoe Bay, Alaska // *Permafrost: Proc. 4th Int. Conf.*, Washington, 1983.
4. **Быков И. Ю., Дмитриев В. Д.** Бурение скважин на воду в северных районах. Л.: Недра, 1981.
5. **Кудряшов Б. Б., Яковлев А. М.** Бурение скважин в мерзлых породах. М.: Недра, 1983.
6. **Анисимова Н. П.** Криогидрогеохимические особенности мерзлой зоны. Новосибирск: Наука, 1981.
7. **Цытович Н. А.** Механика мерзлых грунтов. М.: Высш. шк., 1973.
8. **Максимов А. М., Цыпкин Г. Г.** Явление «перегрева» и образование двухфазной зоны при фазовых переходах в мерзлых грунтах // *Докл. АН СССР*. 1987. Т. 294, № 5. С. 1117-1121.
9. **Самарский А. А.** Теория разностных схем. М.: Наука, 1986.
10. **Васильев В. И.** О фронтальной модели замораживания толщи раствора // *Мат. заметки ЯГУ*. 1994. Вып. 1. С. 136-144.

*Поступила в редакцию 16/XI 1994 г.*

---