ПМТФ, № 3, 1971

ОБ ОДНОМ ПЛОСКОМ НЕСТАЦИОНАРНОМ ТЕЧЕНИИ ГАЗА С СИЛЬНЫМ РАЗРЫВОМ

В. М. Тешуков

(Новосибирск)

Рассматривается задача о плоском нестационарном движении газа под действием поршня, имеющего форму двугранного угла и вдвигающегося в газ с постоянной скоростью. В отличие от одномерного движения под действием плоского поршня здесь возникает криволинейная ударная волна и течение становится неизэнтропическим и вихревым. В данной работе эта задача рассмотрена в линейной постановке, когда угол излома поршня предполагается малым. Линейная задача сводится к неоднородной задаче Римана — Гильберта, решение которой находится явно.

Рассматриваемая задача примыкает к кругу задач, связанных с дифракцией и отражением ударных волн, изученных в работах Лайтхилла [1], Смирла [2], Тер-Минасянца [3] и других.

1. Постановка задачи. Политропный газ, покоящийся при $t \leqslant 0$, приходит в движение под действием стенок двугранного угла, которому в момент $t = 0$ сообщается постоянная скорость $\mathbf{U}_0 = (U_0, V_0)$ такая, что нормальные составляющие скоростей движения стенок направлены в сторону газа. Перед угловым поршнем образуется ударная волна, фронт которой будет плоским вдали от вершины угла и искривленным в области влияния вершины. Требуется рассчитать поле скоростей и давление в области влияния вершины угла, в частности определить форму ударной волны и давление на поршне.

Введем в плоскости течения декартову прямоугольную систему координат X, Y, так, чтобы начало координат в момент $t = 0$ совпадало с вершиной угла, а ось X была направлена по оси симметрии поршня. Вдали от вершины течение описывается известным одномерным решением.

Решение в возмущенной области ищем в классе конических течений [4], полагая все искомые функции u°, v°, p°, ρ°, S° зависящими от переменных $\xi = X / t$, $\eta = Y / t$. Здесь $\mathbf{u}^\circ = (u^\circ, v^\circ)$ — скорость газа, p° — давление, ρ° — плотность, S° — энтропия, t — время.

Введем новые искомые функции

$$U = u^\circ - \xi, \quad V = v^\circ - \eta, \qquad P = p^\circ(\xi, \eta), \quad R = \rho^\circ(\xi, \eta), \tag{1.1}$$
$$S = S^\circ(\xi, \eta)$$

Система уравнений газовой динамики приведется к следующему виду:

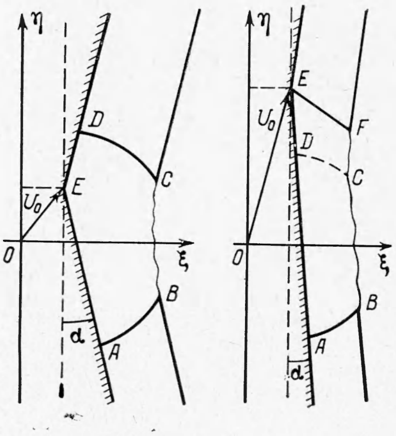
$$(\mathbf{U}\cdot\nabla)\mathbf{U} + R^{-1}\nabla P + \mathbf{U} = 0, \quad \mathbf{U}\cdot\nabla R + R(\operatorname{div}\mathbf{U} + 2) = 0, \quad \mathbf{U}\cdot\nabla S = 0 \tag{1.2}$$

Область возмущенного течения ограничена линией вырождения типа системы (1.2) (AB и CD на фиг. 1)

$$|\mathbf{U}|^2 = U^2 + V^2 = C^2 \qquad (C^2 = \gamma R^{-1} P) \tag{1.3}$$

неизвестным фронтом ударной волны BC и поршнем AED при дозвуковой скорости V_0.

Если скорость V_0 больше скорости звука, вершина угла E находится вне области эллиптичности (задаваемой неравенством $|\mathbf{U}| < C$) и к области эллиптичности $ABCD$ добавляется область гиперболичности ($|\mathbf{U}| > C$) $EDCF$; линия EF будет либо характеристикой, либо фронтом ударной волны в зависимости от того, будет ли угол раствора поршня больше или меньше π.



Фиг. 1

На фронтах ударных волн должны выполняться условия Гюгонио, связывающие решение в возмущенной области с известными решениями в других областях, на поршне должно выполняться условие непротекания, на всех остальных границах — условия непрерывного примыкания.

2. Уравнения и граничные условия линейной задачи. Пусть угол излома поршня α мал. Линеаризуем задачу по малому параметру α, взяв в качестве основного решения одномерное течение, которое получается при $\alpha = 0$. Представим искомые функции в следующем виде:

$$U = U_0 - \xi + \alpha U_0 u, \quad V = -\eta + \alpha U_0 v, \quad P = p_1 + \alpha \rho_1 C_1 U_0 p,$$
$$R = \rho_1 (1 + \alpha \rho) \tag{2.1}$$

Здесь p_1, ρ_1, C_1 — параметры газа в основном постоянном решении. После линеаризации получается линейная система уравнений для безразмерных возмущений u, v, p, ρ, рассматриваемых как функции от безразмерных переменных x и y

$$(\mathbf{x}\cdot\nabla)\,\mathbf{u} = \nabla p$$
$$(\mathbf{x}\cdot\nabla)\,\rho = U_0\,(\operatorname{div}\mathbf{u})\,/\,C_1 \qquad \left(x = \frac{\xi - U_0}{C_1}, \quad y = \frac{\eta}{C_1}\right)$$
$$(\mathbf{x}\cdot\nabla)\,p = \operatorname{div}\mathbf{u} \tag{2.2}$$

Исключая u и v из последнего уравнения, получаем уравнение для одной функции p

$$(x^2 - 1)p_{xx} + 2\,xyp_{xy} + (y^2 - 1)\,p_{yy} + 2xp_x + 2yp_y = 0 \tag{2.3}$$

Граничные условия линейной задачи получаются линеаризацией граничных условий нелинейной задачи и переносом их на соответствующие невозмущенные границы. Запишем уравнение возмущенного участка фронта ударной волны BC в форме

$$x = k + \alpha f(y) \qquad \left(k = \frac{D_0 - U_0}{C_1} = \left[\frac{(\gamma-1)M^2 + 2}{2\gamma M^2 - \gamma + 1}\right]^{1/2}, \; M = \frac{D_0}{C_0}\right) \tag{2.4}$$

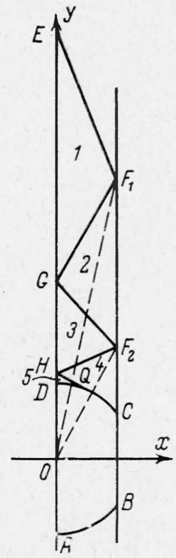
Здесь D_0 — скорость невозмущенной ($\alpha = 0$) ударной волны, C_0 — скорость звука в покоящемся газе перед ударной волной, γ — показатель адиабаты. Используя соотношения Гюгонио на ударной волне, можно вычислить u, v, p, ρ на фронте (2.4)

$$u = LN^{-1}(f(y) - yf'(y)) \qquad \left(L = \frac{1}{2k}\,\frac{M^2+1}{M^2}\right)$$
$$v = -f'(y) \qquad \left(N = \frac{(\gamma+1)}{2}\,\frac{M^2 - 1}{(\gamma-1)M^2 + 2}\right) \tag{2.5}$$
$$p = N^{-1}(f(y) - yf'(y)), \qquad \rho = \frac{4}{(\gamma+1)kM^2}\,(f(y) - yf'(y))$$

Из (2.5) и (2.2) следует соотношение, которому должна удовлетворять функция p на границе BC (BF) (фиг. 2)

$$(k^2-1)p_x+[(L+k)y-Nky^{-1}]p_y=0 \tag{2.6}$$

При дозвуковой скорости V_0, т. е. когда $V_0<C_1$ (не теряя общности, можно считать, что $V_0\geqslant 0$), вершина E находится внутри области эллиптичности.



Фиг. 2

Из условия непротекания получаем

$$u|_{AF}=V_0\,/\,U_0,\quad u|_{ED}=-\,V_0\,/\,U_0$$

Следовательно, на границе AED имеем

$$p_x=-\,Tk_1\delta\,(y-k_1)\qquad \left(T=\frac{k_1\,[(\gamma-1)\,M^2+2]}{k\,(M^2-1)},\ k_1=\frac{V_0}{C_1}\right) \tag{2.7}$$

Здесь $\delta(x)$ — функция Дирака. При $k_1>1$ на ADE выполняется условие $p_x=0$. На линии вырождения типа уравнения (2.3) AB ($x^2+y^2=1$; фиг. 2) выполняются условия непрерывного примыкания к известному течению

$$p=p_2,\quad \rho=\rho_2,\quad u=u_2,\quad v=v_2$$

Все эти величины вычисляются по формулам (2.5), если положить

$$f\,(y)=-\,y+\frac{\gamma+1}{2}\,k_1\,\frac{M^2}{M^2+1}$$

В дозвуковом случае на CD также имеет место непрерывное примыкание

$$p=-\,p_2,\quad \rho=-\,\rho_2,\quad u=-\,u_2,\quad v=-\,v_2$$

При $k_1>1$ через слабый скачок уплотнения или разрежения EF (в зависимости от знака α) это же течение примыкает к возмущенному в гиперболической области $EFCD$. Кроме перечисленных выше условий должно выполняться условие гладкости фронта ударной волны в точках B и C

$$\int\limits_{-k'}^{k'}\frac{p_y}{y}\,dy=-\,N^{-1}\,(1+f'\,(k'))=K\qquad (x=k,\ k'=\sqrt{1-k^2}) \tag{2.8}$$

Если $k_1<1$, то $f'(k')=1$, если $k_1>1$, то $f'(k')$ определяется после решения задачи в гиперболической области.

3. Решение задачи в области гиперболичности. Можно показать, что в области гиперболичности функция p будет кусочно-постоянной. Области постоянства p будут связаны через слабые скачки уплотнения и разрежения. Скачки разрежения возникают из линеаризации некоторых волн разрежения в нелинейной задаче. Фронты этих скачков в первом приближении совпадают с характеристиками — касательными к единичной окружности. Из условий Гюгонио для слабых скачков можно получить следующие соотношения:

$$u_2-u_1=(p_2-p_1)n_1,\ v_2-v_1=(p_2-p_1)n_2,\ \rho_2-\rho_1=U_0C_1^{-1}\,(p_2-p_1) \tag{3.1}$$

Здесь $\mathbf{n}=(n_1,\,n_2)$ — нормаль к характеристике, по которой в линейном приближении происходит скачок; нижний индекс 1 обозначает состояние перед скачком, индекс 2 — состояние за скачком. Количество скачков зависит от величины k_1. При помощи соотношений (3.1) все слабые скачки легко рассчитываются.

Для примера рассмотрим случай, изображенный на фиг. 2, когда таких скачков пять. На разрыве EF_1 давление p^1 определяется в области *1* из условия непротекания $u = V_0 / U_0$ на EG. В области *2* искомые функции должны удовлетворять условиям Гюгонио на F_1G и F_1F_2.

Такое решение можно построить, вводя контактный разрыв, идущий в первом приближении по прямой контактной характеристике F_1O основного решения. Величина p^2 определяется из условия на контактном разрыве. Действительно, по известной p^2 определяется функция $f(y)$ из (2.5) и условия прохождения фронта через точку F_1. По известной $f(y)$ определяются u и v за контактным разрывом. Перед контактным разрывом u и v выражаются через p^2 из условий (3.1) на скачке F_1G. Условие равенства нормальной составляющей скорости газа на F_1O дает уравнение для определения p^2. В области *3* определяем p^3 из условия непротекания на границе GH, как и в области *1*, при этом условия на контактном разрыве F_1O выполняются автоматически. В области *4* нужно вводить новый контактный разрыв F_2O и p^4 определять из условий на этом контактном разрыве, как и в области *2*, и т. д.

После расчета в гиперболической области определятся u, v, p, ρ вдоль CD. Все эти величины имеют разрыв в точке Q, а u, v, ρ — в точках пересечения контактных характеристик F_jO со звуковой окружностью. Пусть $p = p_*$ на DQ и $p = p^*$ на QC. Положение точки Q задается полярным углом $\theta^* = \theta^*(k_1)$, отсчитываемым от оси x.

4. Нахождение решения в области эллиптичности. В области эллиптичности уравнение (2.3) преобразованием Буземана — Чаплыгина

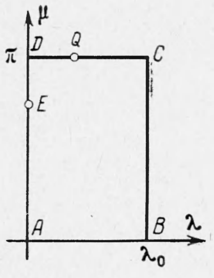
$$r = \frac{2\beta}{\beta^2 + 1}, \qquad \theta = \theta' \quad \left(\begin{array}{l} r^2 = x^2 + y^2 \\ \theta = \operatorname{arctg}(y / x) \end{array} \right) \tag{4.1}$$

приводится к уравнению Лапласа. Пусть

$$\xi_1 = \beta \cos\theta, \quad \eta_1 = \beta \sin\theta, \quad \zeta = \xi_1 + i\eta_1$$

Конформное преобразование

$$z = \ln \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta} + \frac{1}{2} \pi i \tag{4.2}$$



Фиг. 3

отображает область $ABCD$ в плоскости ζ в прямоугольник

$$0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + k}{1 - k}, \qquad 0 \leqslant \mu \leqslant \pi$$

в плоскости $z = \lambda + i\mu$ (фиг. 3).

Рассмотрим аналитическую функцию

$$\Phi(z) = p_\lambda - i p_\mu \tag{4.3}$$

В силу условий краевой задачи для нее возникает неоднородная задача Гильберта с разрывными коэффициентами

$$a(z) p_\lambda - b(z)\, p_\mu = \varphi(z) \quad (z \in \Gamma) \tag{4.4}$$

Здесь Γ — контур $ABCD$, а коэффициенты a, b и φ задаются формулами

$$\lambda = \lambda_0: \quad a = \sin\mu\cos\mu, \quad b = Nk(1 - k^2)^{-1} - L\cos^2\mu, \quad \varphi = 0$$

$$\lambda = 0: \ a = 1, \quad b = 0, \quad \varphi = \begin{cases} -Tk_1(1 - k_1^2)^{-1/2}\,\delta(\mu - \mu_0) & (k_1 < 1) \\ 0, & (k_1 > 1) \end{cases}$$

$$\mu = \pi: \ a = 1, \quad b = 0, \quad \varphi = \begin{cases} 0, & (k_1 < 1) \\ (p^* - p_2)\,\delta(\lambda - \lambda_1) & (k_1 > 1) \end{cases} \tag{4.5}$$

$$\mu = 0: \ a = 1, \quad b = 0, \quad \varphi = 0$$

$$\left(\mu_0 = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1 - \sqrt{1 - k_1^2}}{k_1}, \quad \lambda_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos\theta^*}{1 - \cos\theta^*}\right)$$

Так как коэффициенты задачи Гильберта разрывны в точках B и C, множество ее решений можно разбить на классы либо ограниченных, либо неограниченных в данных точках. Кроме условий (4.4), (4.5) необходимо наложить дополнительные — условие гладкости фронта ударной волны в точках B и C (2.8) и условие изменения p вдоль BC на определенную величину

$$\lambda = \lambda_0: \int_0^\pi p_\mu \, d\mu = \begin{cases} -2p_2 & (k_1 < 1), \\ p^* - p_2 & (k_1 > 1), \end{cases} \quad \int_0^\pi \frac{p_\mu}{\cos\mu} d\mu = -k'K \tag{4.6}$$

Решение задачи (4.4) — (4.6) в классе функций, ограниченных в точках разрыва коэффициентов, единственно. Для его построения отобразим прямоугольник $ABCD$ на верхнюю полуплоскость при помощи функции

$$w(z) = \frac{\vartheta_2(0, q)\,\vartheta_2(-iz, q)}{\vartheta_3(0, q)\,\vartheta_3(-iz, q)} \qquad \left(q = \frac{1-k}{1+k}\right) \tag{4.7}$$

Здесь и далее $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4$ — эллиптические тэта-функции [5]. Задача Гильберта в полуплоскости известным образом сводится к задаче Римана [6]. Индекс задачи Римана оказывается равным единице, т. е. решение определяется с точностью до двух произвольных постоянных, которые однозначно находятся из условий (4.6). Если известно каноническое решение $X(w)$ соответствующей однородной задачи, то решение неоднородной задачи выписывается явно в виде

$$\Phi(w) = \frac{X(w)}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{(a - ib)\, X^+(\zeta)(\zeta - w)} + X(w)(B_1 w + D_1) \tag{4.8}$$

где B_1 и D_1 — произвольные вещественные постоянные, $X^+(\zeta)$ — предельные значения функции $X(w)$ из верхней полуплоскости. Таким образом решение задачи сводится к построению канонического решения однородной задачи. Представим $X(w)$ в виде

$$X(w) = X_1(w) X_2(w) \tag{4.9}$$

где $X_1(w)$ удовлетворяет условию на BC, а $X_2(w)$ имеет кусочно-постоянный аргумент на границе.

Первое условие (4.4), (4.5) можно записать в виде [1]

$$\arg X(w(z)) = \operatorname{arc\,tg}(\alpha_1 \operatorname{tg}\mu) + \operatorname{arc\,tg}(\beta_1 \operatorname{tg}\mu)$$

$$\frac{1}{\alpha_1 + \beta_1} = L - N\frac{k}{1-k^2}, \qquad \frac{\alpha_1\beta_1}{\alpha_1 + \beta_1} = \frac{Nk}{1-k^2} \tag{4.10}$$

Разложим правую часть (4.10) в ряд Фурье по синусам

$$\arg X(w(z)) = \pi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 - a_1^n - b_1^n)}{n} \sin 2n\mu \tag{4.11}$$

$$a_1 = (\alpha_1 - 1)/(\alpha_1 + 1), \qquad b_1 = (\beta_1 - 1)/(\beta_1 + 1)$$

Положим $X_1(w)$ равным

$$X_1(w(z)) = \exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty} (2 - a_1^n - b_1^n) \frac{\operatorname{ch} 2nz}{n \operatorname{sh} 2n\lambda_0}\right\} \tag{4.12}$$