

УДК 539.3

## ДВА КЛАССА КОЛЕБАНИЙ КОРОТКОГО КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА

Л. И. Фридман

Самарский государственный архитектурно-строительный университет, 443001 Самара  
E-mail: levfridman@rambler.ru

Приводится решение стационарной динамической задачи теории упругости, описывающее два класса собственных неосесимметричных колебаний конечного кругового цилиндра. В частном случае осевой симметрии полученное решение описывает известные два класса осесимметричных колебаний: колебания первого класса переходят в продольно-поперечные колебания, а колебания второго класса — в крутильные колебания. Существование двух классов неосесимметричных колебаний обусловлено граничными условиями на торцах. Показано, что по мере увеличения длины (высоты) цилиндра влияние граничных условий на торцах на частотный спектр ослабевает, частоты колебаний двух классов становятся приближенно равными, а затем совпадают.

**Ключевые слова:** собственные колебания, класс колебаний, кинематическая классификация, физическая классификация, частотное уравнение, спектр частот.

**Введение.** Колебания круговых цилиндров, исследуемые в течение длительного времени, применяются во многих областях техники. В частности, задача отстройки от частот опасных внешних воздействий расчетными методами на стадии проектирования конструкций в форме тел вращения сводится к аппроксимации их круговыми цилиндрами и решается на основе неклассической теории колебаний пластин (модель Тимошенко) либо в рамках динамической задачи теории упругости для кругового цилиндра конечной длины [1].

Существует два класса осесимметричных колебаний цилиндра: продольно-поперечные и крутильные [2]. Классификационным признаком вида колебаний являются кинематические условия: при продольно-поперечных колебаниях отличны от нуля перемещения  $u_r$  и  $u_z$  ( $u_\varphi = 0$ ), а при крутильных —  $u_\varphi$  ( $u_r = u_z = 0$ ). Здесь  $u_r$ ,  $u_\varphi$ ,  $u_z$  — безразмерные компоненты вектора перемещений в безразмерных цилиндрических координатах  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$ . Координаты  $r$ ,  $z$ , размеры цилиндра, а также перемещения отнесены к внешнему радиусу  $R$  цилиндра (внутренний радиус —  $r_1$ , внешний радиус —  $r_2 = 1$ , высота —  $z_0$ ).

При продольно-поперечных колебаниях в сечениях цилиндра, перпендикулярных его оси, в том числе на торцах,  $\tau_{\varphi z} = 0$ , а при крутильных  $\sigma_z = 0$  ( $\sigma_z$ ,  $\tau_{\varphi z}$  — компоненты тензора напряжений). Указанные граничные условия на торцах будем считать физическим классификационным признаком вида колебаний. Физический классификационный признак показывает, что продольно-поперечные и крутильные колебания не могут возбуждаться нагрузками на торцах цилиндра, задаваемыми напряжениями  $\tau_{\varphi z}$  и  $\sigma_z$  соответственно.

В отличие от решений, полученных в [1, 3–5], приведенное ниже решение динамической задачи теории упругости для цилиндра описывает два класса неосесимметричных колебаний в частном случае осевой симметрии, переходящих соответственно в продольно-

поперечные и крутильные колебания. При этом классификационным признаком неосесимметричных колебаний является физический признак.

**1. Стационарная динамическая задача теории упругости для полого цилиндра.** Рассматриваются свободные колебания полого кругового цилиндра, граничные поверхности которого свободны от внешних воздействий. Задача сводится к определению трех скалярных потенциалов перемещений, удовлетворяющих уравнениям Гельмгольца [6, 7]

$$\nabla^2 \Phi + \alpha^2 \Phi = 0, \quad \nabla^2 \Psi_p + \beta^2 \Psi_p = 0, \quad p = 1, 2,$$

в области, занятой полым цилиндром ( $r_1 \leq r \leq r_2$ ,  $0 \leq z \leq z_0$ ). Здесь  $\alpha = \lambda_{j,m}/c_1$ ;  $\beta = \lambda_{j,m}/c_2$ ;  $\lambda_{j,m}$  — безразмерная круговая частота, отнесенная к величине  $R/c$ ;  $c$  — скорость звука в материале цилиндра;  $c_1$ ,  $c_2$  — соответственно безразмерные скорости волн расширения и сдвига, отнесенные к  $c$ ;  $m$  — число узловых плоскостей, для которых  $\varphi = \text{const}$ ;  $j$  — порядковый номер частоты при фиксированном значении  $m$ . Компоненты вектора перемещения определяются зависимостями

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_2}{\partial \varphi}, & u_\varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \varphi \partial z} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial r}, \\ u_z &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z^2} + \beta^2 \Psi_1. \end{aligned} \quad (1)$$

Для свободного цилиндра справедливы граничные условия для компонент тензора напряжений

$$r = r_1, r = r_2: \quad \sigma_r = 0, \quad \tau_{rz} = 0, \quad \tau_{r\varphi} = 0; \quad (2)$$

$$z = 0, z = z_0: \quad \sigma_z = 0, \quad \tau_{rz} = 0, \quad \tau_{\varphi z} = 0. \quad (3)$$

Уравнения Гельмгольца решаются методом разделения переменных, при этом функции величины  $\varphi$  удовлетворяют условию периодичности. Путем подбора параметров разделения уравнений для функций  $r$  и  $z$  в сочетании с краевыми условиями решается задача Штурма — Лиувилля. Решения уравнений Гельмгольца представлены в виде двух бесконечных сумм произведений функций  $r$  и  $z$ . В первой сумме ортогональной системой являются функции  $\psi_{i,n}(z)$ , во второй —  $w_{i,k}(r)$ :

$$\begin{aligned} \Phi &= \left( \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(r) \psi_{i,n}(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(z) w_{i,k}(r) \right) \theta_i(\varphi), \\ \Psi_1 &= \left( \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_{1,n}(r) \frac{1}{\nu_n} \psi'_{i,n}(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_{1,k}(z) w_{i,k}(r) \right) \theta_i(\varphi), \\ \Psi_2 &= \left( \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_{2,n}(r) \psi_{i,n}(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_{2,k}(z) w_{i,k}(r) \right) \frac{1}{m} \theta'_i(\varphi). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь штрих обозначает производную по соответствующему аргументу;  $i = 1, 2$  — индекс класса колебаний;

$$\psi_{1,n}(z) = \cos(z\nu_n), \quad \psi_{2,n}(z) = \sin(z\nu_n), \quad \nu_n = (n-1)\pi/z_0,$$

$$w_{1,k}(r) = Y'_m(r_2 h_{1,k}) J_m(r h_{1,k}) - J'_m(r_2 h_{1,k}) Y_m(r h_{1,k}),$$

$$w_{2,k}(r) = Y_m(r_2 h_{2,k}) J_m(r h_{2,k}) - J_m(r_2 h_{2,k}) Y_m(r h_{2,k}),$$

$J_m(rh_{i,k}), Y_m(rh_{i,k})$  — функции Бесселя; функции  $w_{i,k}(r)$  удовлетворяют условию ортогональности

$$\int_{r_1}^{r_2} w_{i,k}(r)w_{i,p}(r)r dr = 0, \quad k \neq p,$$

собственные значения  $h_{1,k}, h_{2,k}$  являются корнями уравнений  $w'_{1,k}(r_1) = 0, w_{2,k}(r_1) = 0$  соответственно;

$$\begin{aligned} \Phi_n(r) &= A_{1,n}I_m(r\sqrt{\nu_n^2 - \alpha^2}) + B_{1,n}K_m(r\sqrt{\nu_n^2 - \alpha^2}), \\ \Psi_{p,n}(r) &= A_{p+1,n}I_m(r\sqrt{\nu_n^2 - \beta^2}) + B_{p+1,n}K_m(r\sqrt{\nu_n^2 - \beta^2}), \quad p = 1, 2, \\ \Phi_k(z) &= C_{1,k} \exp(z\sqrt{h_{i,k}^2 - \alpha^2}) + D_{1,k} \exp(-z\sqrt{h_{i,k}^2 - \alpha^2}), \\ \Psi_{p,k}(z) &= C_{p+1,k} \exp(z\sqrt{h_{i,k}^2 - \beta^2}) + D_{p+1,k} \exp(-z\sqrt{h_{i,k}^2 - \beta^2}); \\ \theta_1(\varphi) &= \cos(m\varphi), \quad \theta_2(\varphi) = \sin(m\varphi). \end{aligned} \quad (5)$$

Следует отметить, что в случае неосесимметричных колебаний замена  $\theta_1(\varphi)$  на  $\theta_2(\varphi)$  в (4) не оказывает влияния на результаты вычислений. Однако в частном случае осесимметричных колебаний ( $m = 0$ ), если справедлива зависимость (6), колебания первого класса ( $i = 1$ ) переходят в продольно-поперечные колебания, а колебания второго класса ( $i = 2$ ) — в крутильные колебания.

В зависимостях (5)  $A_{1,n}, B_{1,n}, \dots, C_{3,k}, D_{3,k}$  — 12 наборов произвольных постоянных. При  $\alpha > \nu_n$  или  $\beta > \nu_n$  модифицированные функции Бесселя  $I_m(r\sqrt{\nu_n^2 - \alpha^2}), \dots, K_m(r\sqrt{\nu_n^2 - \beta^2})$  переходят соответственно в функции Бесселя  $J_m(r\sqrt{\alpha^2 - \nu_n^2}), \dots, Y_m(r\sqrt{\beta^2 - \nu_n^2})$ , а при  $\alpha > h_{i,k}$  или  $\beta > h_{i,k}$  экспоненты переходят в тригонометрические функции.

Подставляя (4) в (1), получаем компоненты вектора перемещений для двух любых значений  $i$  (двух классов колебаний):

$$\begin{aligned} u_r &= U_r \theta_i(\varphi), \quad u_\varphi = U_\varphi \frac{1}{m} \theta'_i(\varphi), \quad u_z = U_z \theta_i(\varphi), \\ U_r &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \Phi'_n(r) - \nu_n \Psi'_{1,n}(r) - \frac{m}{r} \Psi_{2,n}(r) \right) \psi_{i,n}(z) + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \left( [\Phi_k(z) + \Psi'_{1,k}(z)] w'_{i,k}(r) + \Psi_{2,k}(z) \frac{m}{r} w_{i,k}(r) \right), \\ U_\varphi &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{m}{r} [\Phi_n(r) - \nu_n \Psi_{1,n}(r)] + \Psi'_{2,n}(r) \right) \psi_{i,n}(z) + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \left( [\Phi_k(z) + \Psi'_{1,k}(z)] \frac{m}{r} w_{i,k}(r) + \Psi_{2,k}(z) w'_{i,k}(r) \right), \\ U_z &= \sum_{n=1}^{\infty} [\nu_n \Phi_n(r) + (\beta^2 - \nu_n^2) \Psi_{1,n}(r)] \frac{1}{\nu_n} \psi'_{i,n}(z) + \sum_{k=1}^{\infty} [\Phi'_k(z) + h_{i,k}^2 \Psi_{1,k}(r)] w_{i,k}(r). \end{aligned} \quad (7)$$

В сечениях цилиндра, перпендикулярных его оси, в том числе на торцах, компоненты тензора напряжений равны

$$\sigma_z \frac{1 + \nu}{E} = S_z \theta_i(\varphi), \quad \tau_{\varphi z} \frac{1 + \nu}{E} = T_{\varphi z} \frac{1}{m} \theta'_i(\varphi), \quad \tau_{rz} \frac{1 + \nu}{E} = T_{rz} \theta_i(\varphi).$$

Здесь  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $E$  — модуль упругости;

$$S_z = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \alpha^2 - \frac{\beta^2}{2} - \nu_n^2 \right) \Phi_n(r) - (\beta^2 - \nu_n^2) \Psi_{1,n}(r) \right] \psi_{i,n}(z) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ - \left( \frac{\beta^2}{2} - h_{i,k}^2 \right) \Phi_k(z) + h_{i,k}^2 \Psi'_{1,n}(z) \right] w_{i,k}(r),$$

$$T_{\varphi z} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ 2\nu_n \frac{m}{r} \Phi_n(r) + (\beta^2 - 2\nu_n^2) \frac{m}{r} \Psi_{1,n}(r) + \nu_n \Psi'_{2,n}(r) \right] \frac{1}{\nu_n} \psi'_{i,n}(z) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ (2\Phi'_k(z) - (\beta^2 - 2h_{i,k}^2) \Psi_{1,k}(z)) \frac{m}{r} w_{i,k}(r) + \Psi'_{2,k}(z) w'_{i,k}(r) \right],$$

$$T_{rz} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ 2\nu_n \Phi'_n(r) + (\beta^2 - 2\nu_n^2) \Psi'_{1,n}(r) + \nu_n \frac{m}{r} \Psi_{2,n}(r) \right] \frac{1}{\nu_n} \psi'_{i,n}(z) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ (2\Phi'_k(z) - (\beta^2 - 2h_{i,k}^2) \Psi_{1,k}(z)) w'_{i,k}(r) + \Psi'_{2,k}(z) \frac{m}{r} w_{i,k}(r) \right].$$

При  $i = 1$  приведенное решение описывает колебания первого класса и совпадает с решением, полученным в [3], которое подтверждают данные, полученные в эксперименте [4], а также результаты расчетов по предельным моделям [8]. При этом точно выполняются граничные условия (3) для касательных напряжений (физический классификационный признак неосесимметричных колебаний первого класса) и исключаются наборы произвольных постоянных  $C_{2,k}$ ,  $D_{2,k}$ ,  $C_{3,k}$ ,  $D_{3,k}$ . Остальные граничные условия (2), (3) в результате разложения по соответствующим ортогональным функциям переходят в бесконечную систему однородных линейных алгебраических уравнений относительно оставшихся восьми наборов произвольных постоянных. При удержании в бесконечных суммах (4) и далее во всех зависимостях  $n_0$  слагаемых по каждому индексу суммирования из условия разрешимости усеченной однородной системы порядка  $8n_0$  следует частотное уравнение.

Если решается граничная задача в рядах по собственным формам колебаний, то к торцам могут быть приложены только нормальные усилия, так как внутренние касательные напряжения на торцах тождественно равны нулю.

В частном случае  $m = 0$  перемещения (7) соответствуют кинематическому классификационному признаку:

$$u_r = \sum_{n=1}^{\infty} [\Phi'_n(r) - \nu_n \Psi'_{1,n}(r)] \cos(z\nu_n) + \sum_{k=1}^{\infty} [\Phi_k(z) + \Psi'_{1,k}(z)] w'_{1,k}(r),$$

$$u_{\varphi} = 0,$$

$$u_z = \sum_{n=1}^{\infty} [\nu_n \Phi_n(r) + (\beta^2 - \nu_n^2) \Psi_{1,n}(r)] \sin(z\nu_n) + \sum_{k=1}^{\infty} [\Phi_k(z) + h_{1,k}^2 \Psi_{1,k}(z)] w_{1,k}(r).$$

При  $i = 2$  точно выполняется условие (3) для  $\sigma_z$  (физический классификационный признак колебаний второго класса) и исключаются наборы произвольных постоянных  $C_{2,k}$ ,  $D_{2,k}$ . Остальные граничные условия (3) заменяются условиями

$$T_{\varphi z} \pm T_{rz} = \sum_{n=1}^{\infty} [2\nu_n \Phi_n^{\pm}(r) + (\beta^2 - \nu_n^2) \Psi_{1,n}^{\pm}(r) \pm \nu_n \Psi_{2,n}^{\pm}(r)] \cos(\nu_n z) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} [2\Phi'_k(z) - (\beta^2 - 2h_{2,k}) \Psi_{1,k}(z) \pm \Psi_{2,k}(z)] W_k^{\pm}(r) = 0, \quad (8)$$

где

$$\Phi_n^{\pm}(r) = \frac{m}{r} \Phi_n(r) \pm \Phi'_n(r), \quad \Psi_{p,n}^{\pm}(r) = \frac{m}{r} \Psi_{p,n}(r) \pm \Psi'_{p,n}(r); \\ W_k^{\pm}(r) = \frac{m}{r} w_{2,k}(r) \pm w'_{2,k}(r). \quad (9)$$

Переход от (3) к (8) обоснован в работе [5], там же показано, что функции (9) удовлетворяют условию ортогональности

$$\int_{r_1}^{r_2} W_k^{\pm}(r) W_p^{\pm}(r) r dr = 0, \quad k \neq p.$$

Граничные условия (8) после разложений функций  $r$  в ряды по  $W_k^{\pm}(r)$  и условия (2) после разложений функций  $z$  по функциям  $\psi_{2,n}(z)$  переходят в бесконечную систему однородных алгебраических уравнений относительно оставшихся 10 наборов произвольных постоянных. При удержании в бесконечных суммах (4) по каждому индексу суммирования  $n_0$  слагаемых порядок усеченной системы равен  $10n_0$ . Условие разрешимости усеченной системы является частотным уравнением.

При  $m = 0$  перемещения (7) соответствуют кинематическому классификационному признаку колебаний второго класса:

$$u_r = 0, \quad u_{\varphi} = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi'_{2,n}(r) \sin(z\nu_n) + \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_{2,k}(z) w'_{2,k}(r), \quad u_z = 0.$$

При решении граничной задачи в рядах по собственным формам к торцам могут быть приложены только касательные усилия, так как внутренние нормальные напряжения на торцах тождественно равны нулю.

**2. Результаты вычислений и их обсуждение.** Частоты колебаний вычисляются из трансцендентных уравнений, которые следуют из условия разрешимости усеченной однородной системы линейных уравнений порядка  $8n_0$  для первого класса колебаний и  $10n_0$  для второго класса.

Сходимость результатов расчетов показана на примере вычисления частоты  $\lambda_{3,2}$  второго класса для цилиндра с размерами  $r_1 = 0,3$ ,  $z_0 = 1$ . Значениям числа удерживаемых в (4) слагаемых  $n_0 = 3, 5, 7, 10$  соответствуют значения частоты  $\lambda_{3,2} = 3,101\ 07; 3,062\ 14; 3,047\ 89; 3,041\ 75$ .

Анализ результатов вычислений показывает, что не все корни частотных уравнений первого и второго классов колебаний являются частотами. Существует ряд критериев, позволяющих отделить частоты от других корней. Например, корни, не являющиеся частотами, не меняются с изменением  $n_0$ . Однако наиболее надежным способом отделения частот от прочих корней является проверка колебаний на резонанс. Полученные значения

Значения частоты  $\lambda_{3,2}$  и перемещений  $u_\varphi$ 

$\lambda_{3,2}$	$u_\varphi$
3,062 241 092	176,43
3,062 141 092 149 72	$1,912 \cdot 10^{13}$
3,062 141 092 149 71	$-1,946 \cdot 10^{12}$
3,062 041 092	-176,65

корней проверяются в численном эксперименте: задается возбуждение с предполагаемой частотой и частотой, незначительно отличающейся от нее. Если вычисленный корень частотного уравнения является частотой, то при возбуждении с частотой, незначительно отличающейся от нее, резко меняются перемещения, а при переходе через резонанс меняется их знак.

В таблице приведены значения частоты возбуждения  $\lambda_{3,2}$  колебаний второго класса, вычисленные для цилиндра с размерами  $r_1 = 0,3$ ,  $z_0 = 1$  при  $n_0 = 5$ , и соответствующие значения перемещения  $u_\varphi$  в точке с координатами  $r = 0,533$ ,  $z = 0,25$ . Во второй и третьей строках частоты возбуждения отличаются от собственной частоты в 14-м знаке после запятой соответственно в большую и меньшую стороны, а в первой и четвертой строках — в четвертом знаке после запятой. При приближении частоты возбуждения к собственной частоте значение перемещений меняется на 12 порядков. Таким образом, значения  $\lambda_{3,2}$ , приведенные в таблице, являются частотами.

Изменение знака перемещения при переходе через резонанс позволяет использовать альтернативный описанному выше метод вычисления собственных частот. Поскольку каждый из этих методов имеет преимущества и недостатки, при вычислении частот применялись оба метода, а трансцендентные уравнения решались методом бисекции.

На рис. 1 приведена зависимость частоты  $\lambda_{1,0}$  осесимметричных колебаний первого и второго классов от длины  $z_0$  цилиндра при  $r_1 = 0,3$ .

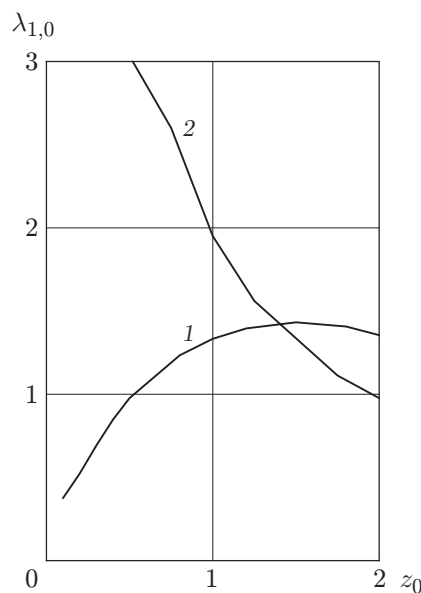


Рис. 1. Зависимость первой частоты  $\lambda_{1,0}$  осесимметричных колебаний от длины  $z_0$  цилиндра:

1 — продольно-поперечные колебания; 2 — крутильные колебания

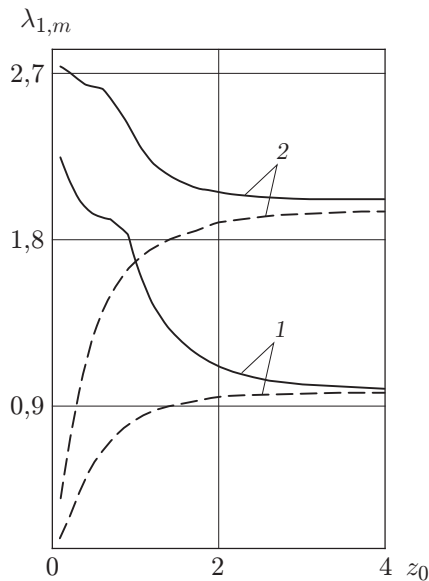


Рис. 2

Рис. 2. Зависимость первой частоты  $\lambda_{1,m}$  неосесимметричных колебаний от длины  $z_0$  цилиндра:

штриховые линии — колебания первого класса, сплошные — колебания второго класса;  
1 —  $m = 2$ , 2 —  $m = 3$

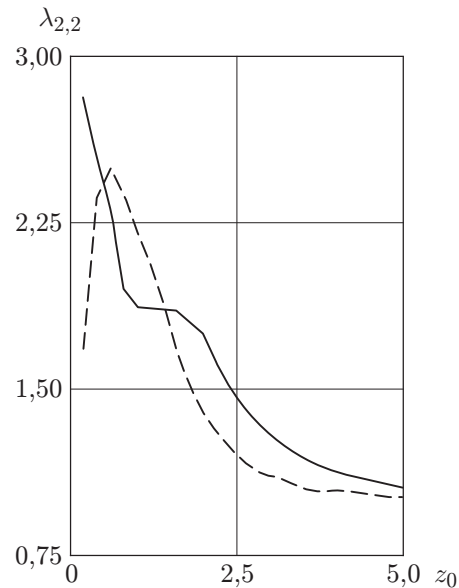


Рис. 3

Рис. 3. Зависимость второй частоты  $\lambda_{2,2}$  неосесимметричных колебаний от длины  $z_0$  цилиндра:

штриховая линия — колебания первого класса, сплошная — колебания второго класса

Частотный спектр осесимметричных колебаний второго класса, вычисляемый на основе теории упругости, включает также частоты, получаемые с помощью стержневой теории крутильных колебаний круглых валов [9]. При  $z_0 = 2$ ,  $r_1 = 0,3$  первые шесть частот равны 0,974; 1,948; 2,701; 2,922; 3,392; 3,668. Первая, вторая и четвертая частоты совпадают с частотами стержневой теории. В стержневой теории каждой форме колебаний соответствует определенное число узловых сечений, перпендикулярных оси стержня. Теория упругости помимо форм колебаний с узловыми сечениями описывает более сложные формы колебаний с узловыми цилиндрами (цилиндрическими поверхностями, все точки которых при данной форме колебаний неподвижны) [10].

На рис. 2 приведена зависимость собственных частот  $\lambda_{1,m}$  ( $m = 2, 3$ ) колебаний первого и второго классов от длины  $z_0$  цилиндра при  $r_1 = 0,3$ . Для цилиндров малой длины (высоты) частоты неосесимметричных колебаний первого класса существенно ниже частот колебаний второго класса. Как и в случае осесимметричных колебаний, с увеличением  $z_0$  собственные частоты  $\lambda_{1,m}$  колебаний первого класса возрастают, а собственные частоты колебаний второго класса убывают. В отличие от кривых зависимости  $\lambda_{1,m}(z_0)$  в случае осевой симметрии кривые зависимости  $\lambda_{1,m}(z_0)$  колебаний двух классов сближаются, не пересекаясь. На рис. 3 для  $m = 2$  приведены вторые частоты колебаний первого и второго классов (для колебаний первого класса приведенная частота является второй, если исключить из сопоставления двух классов радиальные колебания, не зависящие от  $z_0$  [8]). По мере увеличения длины цилиндра влияние граничных условий на торцах, в зависимости от которых колебания делятся на два класса, ослабевает, поэтому кривые зависимости частоты от длины цилиндра сближаются, а затем совпадают.

Результаты проведенных вычислений подтверждают существование двух классов неосесимметричных ( $m \neq 0$ ) колебаний короткого кругового цилиндра, на торцах которого влияние граничных условий является существенным. В частном случае осевой симметрии ( $m = 0$ ) решение задачи о колебаниях рассмотренных двух классов описывает соответственно продольно-поперечные и крутильные осесимметричные колебания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Кузнецов Н. Д., Фридман Л. И., Колотников М. Е.** Расчетные методы определения собственных частот элементов конструкций в форме тел вращения и близких к ним // Пробл. машиностроения и надежности машин. 1993. № 3. С. 98–106.
2. **Ляв А.** Математическая теория упругости. М.; Л: ОНТИ, 1935.
3. **Фридман Л. И.** Динамическая задача теории упругости для цилиндра конечных размеров // Прикл. механика. 1981. Т. 17, № 3. С. 37–43.
4. **Кузнецов Н. Д., Фридман Л. И., Шапошников Ю. Н.** Особенности низкочастотного спектра собственных колебаний цилиндрических тел // Докл. АН СССР. 1990. Т. 312, № 1. С. 55–58.
5. **Фридман Л. И.** О рациональной форме граничных условий в задачах теории упругости // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1999. № 2. С. 46–52.
6. **Морс Ф.** Методы теоретической физики. Т. 2 / Ф. Морс, Г. Фешбах. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
7. **Гузь А. Н.** Дифракция упругих волн в многосвязных телах / А. Н. Гузь, В. Т. Головчан. Киев: Наук. думка, 1972.
8. **Демочкин Н. И., Моргачев К. С., Фридман Л. И.** Область достоверности модели Тимошенко в динамике стержней и пластин // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2008. № 6. С. 137–145.
9. **Тимошенко С. П.** Колебания в инженерном деле. М.: Физматгиз, 1959.
10. **Кольский Г.** Волны напряжений в твердых телах. М.: Изд-во иностр. лит., 1955.

*Поступила в редакцию 14/VII 2011 г.,  
в окончательном варианте — 7/XII 2011 г.*

---