

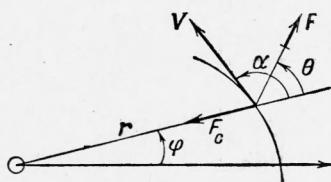
## КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПОЛЕТА ПРИ ПОМОЩИ СОЛНЕЧНОГО ПАРУСА

*К. Г. Валеев*

*(Ленинград)*

В ряде работ [1-4] рассматривается полет под действием солнечного паруса. В настоящей статье указано на неточности некоторых выводов. Решения, которые используются при расчете этими авторами, оказываются неустойчивыми или даже несуществующими. Следует подчеркнуть, что это не умаляет возможностей использования солнечного паруса при космических полетах. Особое внимание уделяется случаям, когда сила тяги составляет постоянный угол с направлением лучей Солнца или направлена вдоль скорости движения. Решаются некоторые задачи о выборе оптимального угла наклона паруса.

**1. Вывод уравнений движения.** Рассмотрим плоское движение, определяемое полярными координатами  $r, \varphi$ . Введем обозначения:  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор (фиг. 1) материальной точки с единичной массой;  $\mathbf{F}_c$  — сила притяжения Солнца;  $\mathbf{F}$  — сила тяги солнечного паруса с проекциями  $F_r, F_\varphi$  на направления  $r$  и  $\varphi$ ; угол между вектором  $\mathbf{r}$  и вектором скорости  $\mathbf{v}$  обозначим через  $\alpha$ , угол между векторами  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{r}$  — через  $\theta$



Фиг. 1

$$\mathbf{F} = -\frac{k\mathbf{r}}{r^3} \quad (k = \text{const}), \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

Солнце расположено в начале координат. Уравнения движения имеют вид [4]

$$\begin{aligned} r'' - r\varphi'^2 + kr^{-2} &= F_r \\ r\varphi'' + 2r'\varphi' &= F_\varphi \quad (r' \equiv dr/dt) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Известно [2, 3], что

$$\begin{aligned} F_r &= \delta r^{-2} \cos^3 \theta = akr^{-2} \\ F_\varphi &= \delta r^{-2} \sin \theta \cos^2 \theta = bkr^{-2} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь  $\delta$  — постоянная, паруса. Безразмерные величины — перегрузки  $a, b$  выражаются формулами

$$a = \frac{F_r}{F} = \frac{\delta \cos^3 \theta}{k} = \frac{r^2 F_r}{k}, \quad b = \frac{F_\varphi}{F} = \frac{\delta \cos^2 \theta \sin \theta}{k} = \frac{r^2 F_\varphi}{k} \quad (1.3)$$

Они зависят от размера паруса и его угла наклона  $\theta$  к лучам Солнца. Эти величины обозначают отношения  $F_r, F_\varphi$  к силе солнечного притяжения  $F$ , обычно это малые числа:  $0 < a, b \ll 1$ .

Для исследования уравнений (1.1) введем новые, удобные при силах вида (1.2), зависимые переменные  $x, y$

$$x = \frac{k}{r^{3\varphi^2}}, \quad y = \frac{r'}{r\varphi} \quad (y = \operatorname{ctg} \alpha) \quad (1.4)$$

В качестве независимой переменной возьмем полярный угол  $\varphi$ . Дифференцируя (1.4) по  $\varphi$ , получим

$$\frac{dx}{d\varphi} = -\frac{1}{\varphi} \left[ \frac{3kr'}{r^4\varphi^2} + \frac{2k\varphi''}{r^3\varphi^3} \right], \quad \frac{dy}{d\varphi} = \frac{1}{\varphi} \left[ \frac{r''}{r\varphi} - \frac{r'^2}{r^2\varphi} - \frac{r'\varphi''}{r\varphi^2} \right] \quad (1.5)$$

Заменив в (1.5)  $r'', \varphi''$  при помощи уравнений (1.1) и использовав обозначения (1.4), получим из (1.5) систему уравнений

$$dx/d\varphi = xy - 2bx^2, \quad dy/d\varphi = 1 - x(1-a) - bxy + y^2 \quad (1.6)$$

Окончательно при  $a, b$ , зависящих только от  $x$  и  $y$ , интегрирование системы (1.1) сводится к интегрированию уравнения первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - x(1-a) - bxy + y^2}{xy - 2bx^2} \quad (1.7)$$

Если будет найдено решение (1.7), то интегрирование (1.1) сводится к квадратуре. Из (1.6) получим

$$\varphi = \int \frac{dx}{xy(x) - 2bx^2} \quad (1.8)$$

Из (1.4) найдем выражение для  $r$

$$y d\varphi = r^{-1} dr, \quad \ln r = \int \frac{y(x) dx}{xy(x) - 2bx^2} \quad (1.9)$$

Окончательно из (1.4), (1.9) найдем время  $t$

$$\varphi^2 = \frac{k}{r^3 x}, \quad t = \frac{1}{V k} \int \frac{r(x) V r(x) x}{xy(x) - 2bx^2} dx \quad (1.10)$$

Если сила  $F$  не лежит в плоскости движения, то этот случай можно свести к плоскому движению [5].

**2. Невозмущенное кеплеровское движение.** Рассмотрим поведение интегральных кривых уравнения (1.7) на плоскости  $xy$  в случае  $a = b = 0$ , т. е. без паруса. Этот случай соответствует невозмущенному кеплеровскому движению [6]. Уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - x + y^2}{xy} \quad (2.1)$$

интегрируется заменой  $y = xz$ . Имеем

$$z dz = (x^{-3} - x^{-2}) dx, \quad z^2 + x^{-2} - 2x^{-1} + 1 = \varepsilon^2 \quad (2.2)$$

Произвольная постоянная  $\varepsilon^2$  будет неотрицательной. Из (1.6), (2.2) получим при  $a = b = 0$

$$d\varphi = \frac{dx}{xy} = \frac{dx}{x^2 z} = - \frac{d(x^{-1})}{V \varepsilon^2 - (x^{-1} - 1)^2} = d \arccos \frac{x^{-1} - 1}{\varepsilon} \quad (2.3)$$

Проинтегрируем и разрешим (2.3) относительно  $x$ , а затем из (2.3) дифференцированием найдем  $y$

$$x = \frac{1}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad y = \frac{dx}{xd\varphi} = \frac{\varepsilon \sin(\varphi - \varphi_0)}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)} \quad (\varphi_0 = \text{const}) \quad (2.4)$$

Интегрируя (1.9)

$$d \ln r = r^{-1} dr = y d\varphi = - d \ln(1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)) \quad (2.5)$$

найдем известные [6] выражения для  $r(\varphi)$

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad p = \text{const} \quad (2.6)$$

Уравнение (2.6) является уравнением конического сечения с эксцентриситетом  $\varepsilon$  и фокусом в начале координат.

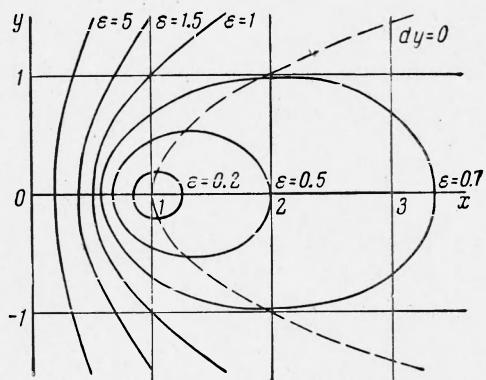
На плоскости  $x, y$  интегральные кривые (2.2) образуют семейство кривых второго порядка

$$x^2(1 - \varepsilon^2) - 2x + 1 + y^2 = 0 \quad (2.7)$$

Эти кривые пересекают ось  $x$  в точках  $x = (1 \pm \varepsilon)^{-1}$ .

При определенном  $\varepsilon$  кривая с уравнением (2.7) имеет эксцентриситет  $\varepsilon$ , фокус кривой лежит в точке  $(1, 0)$ . Касательные к кривой, выходящие из начала координат, касаются в точках  $x = 1, y = \pm \varepsilon$ . Все кривые не пересекаются, так как являются интегральными кривыми уравнения (2.1).

Сформулируем окончательный вывод. При невозмущенном кеплеровском движении, когда материальная точка описывает кривую второго порядка с фокусом в Солнце, соответствующая точка с координатами  $x, y$  (1.4) описывает подобную кривую второго порядка с тем же эксцентриситетом  $\varepsilon$  и фокусом в точке  $(1, 0)$ . Всем различным круговым орбитам соответствует точка  $(1, 0)$ . Всем различным эллиптическим орбитам с эксцентриситетом  $\varepsilon$  соответствует один эллипс с эксцентриситетом  $\varepsilon$ , с большой полуосью  $\varepsilon(1 - \varepsilon^2)^{-1}$ , с малой полуосью  $\varepsilon(1 - \varepsilon^2)^{-1/2}$ , с центром в точке  $x = (1 - \varepsilon^2)^{-1}, y = 0$ , с фокусом в точке  $(1, 0)$ . Концы малых осей эллипсов лежат на параболе  $x = 1 + y^2$  ( $dy/dx = 0$ , (2.1)). Всем различным параболическим орбитам соответствует одна парабола



Фиг. 2

бала  $x = 0.5(1 + y^2)$ . Всем различным гиперболическим траекториям с одинаковым эксцентриситетом  $\varepsilon > 1$  соответствует одна правая ветвь гиперболы с тем же эксцентриситетом  $\varepsilon$ , с центром в точке  $x = (1 - \varepsilon^2)^{-1}$ ,  $y = 0$ , с действительной полуосью  $\varepsilon(-1 + \varepsilon^2)^{-1}$  и фокусом в точке  $(1, 0)$ . Гиперболы сгущаются к оси  $y$  (фиг. 2).

Точка  $(1, 0)$  для дифференциального уравнения (2.1) является особой — центром [7]. Для системы (1.6) она будет точкой покоя.

3. Траектории движения — логарифмические спирали. Наибольшее внимание в работах [2—4] уделяется траекториям космического корабля, являющимся логарифмическими спиралами. Пусть

$$r = e^{q\varphi}, \quad q = \text{const} \quad (3.1)$$

Из (1.4) следует, что величина  $y$  будет постоянной

$$y = \frac{dr}{r d\varphi} = q, \quad \operatorname{ctg} \alpha = q \quad (3.2)$$

Соответствующая точка  $\{x, y\}$  (1.4) будет лежать на прямой  $y = q$ . Пусть в (1.3) угол  $\theta$  между силой тяги и радиусом-вектором  $r$  зависит только от угла  $\alpha$  (п. 1) и величины  $x$  (1.4). Из (1.6) найдем уравнения для отыскания  $x$

$$y = q, \quad 1 - x(1 - a(x, y)) + b(x, y)xy + y^2 = 0 \quad (3.3)$$

Получим, что в этом случае  $x = \text{const}$ , т. е.  $dx = 0$ . Окончательно, при наших предположениях об угле  $\theta$ , траекториям в виде логарифмических спиралей соответствуют точки покоя системы дифференциальных уравнений (1.6). Обратно. Пусть  $x_0, y_0$  ( $x_0 > 0$ ) точка покоя системы (1.6), т. е. решение системы уравнений

$$xy - 2bx^2 = 0, \quad 1 - x(1 - a) - bxy + y^2 = 0 \quad (x > 0) \quad (3.4)$$

Из (1.4), интегрируя, найдем

$$y_0 = \frac{dr}{rd\varphi}, \quad r = ce^{\frac{y_0\varphi}{b}}, \quad c = \text{const} \quad (3.5)$$

Точкам покоя системы (1.6) соответствуют траектории в виде логарифмических спиралей. Рассмотрим два простых случая.

а) Пусть угол  $\theta$  наклона паруса постоянен, т. е.  $a = b = \text{const}$  (1.3). Из (3.4) получим

$$x_{1,2} = \frac{1 - a \pm \sqrt{(1 - a)^2 - 8b^2}}{4b^2}, \quad y_{1,2} = 2bx_{1,2} \quad (3.6)$$

Не исследуя пока устойчивости этих решений, можно установить, что существуют две различные логарифмические траектории при выполнении неравенства

$$(1 - a)^2 - 8b^2 > 0, \quad |1 - a + 2\sqrt{2}|b| < 1 \quad (3.7)$$

Условие (3.7) обычно выполняется на практике. Если  $(1 - a)^2 = 8b^2$ , то существует одна логарифмическая траектория. Если сила  $F$  настолько велика, что  $(1 - a)^2 < 8b^2$ , то логарифмических траекторий существовать не может.

б) Пусть тяга паруса направлена по касательной к траектории, т. е.  $\theta = \alpha$ . Имеем

$$\sin \theta = \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}, \quad \cos \theta = \cos \alpha = \frac{y}{\sqrt{1 + y^2}} \quad (3.8)$$

Обозначим через  $f$  отношение наибольшей возможной силы тяги паруса ( $\theta = 0$ ) к силе притяжения Солнца

$$f = \frac{F_{\max}}{F_c} = \frac{\delta}{k}, \quad f \ll 1 \quad (3.9)$$

Из (1.3) находим

$$a = f \cos^3 \theta = \frac{fy^3}{(1 + y^2)^{3/2}}, \quad b = f \cos^3 \theta \sin \theta = \frac{fy^2}{(1 + y^2)^{3/2}} \quad (3.10)$$

Уравнения (3.4) с учетом (3.10) примут вид

$$xy - \frac{2fx^2y^2}{(1 + y^2)^{3/2}} = 0, \quad 1 - x + y^2 = 0 \quad (x > 0) \quad (3.11)$$

Решение  $x = 1$ ,  $y = 0$  дает круговую траекторию — вырожденный случай логарифмической спирали.

В качестве второго решения получим

$$x = \frac{4f^2}{4f^2 - 1}, \quad y = \frac{1}{\sqrt{4f^2 - 1}} \quad (3.12)$$

Это решение существует при  $2f > 1$ , т. е. при  $f > 0.5$ . При подстановке в (2.2) получим, что при этом  $\varepsilon = 0.5f^{-1}$ . Такая сила тяги в настоящее время практически неосуществима. Заметим, что в работе [4] предполагается осуществимость таких траекторий.

**4. Движение при постоянном угле наклона солнечного паруса.** В рассматриваемом случае  $\theta = \text{const}$ , следовательно,  $a, b = \text{const}$  (1.3). Система уравнений (1.6) имеет две точки покоя  $x_{1,2}, y_{1,2}$  (3.6). Определим поведение интегральных характеристик (1.6) в окрестности этих точек. Обозначим правые части (1.6)

$$P(x, y) = xy - 2bx^2, \quad Q(x, y) = 1 - x(1 - a) - bxy + y^2 \quad (4.1)$$

Характеристическое уравнение для линеаризованной системы (4.1) имеет вид [7] (стр. 60)

$$\lambda^2 - (A + D)\lambda + AD - BC = 0 \quad (4.2)$$

Здесь введены обозначения [7]

$$\frac{\partial P}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = B, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = C, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = D \quad (4.3)$$

где производные вычисляются в точке покоя.

Для точки  $x_1, y_1$  (в (3.6) взят знак минус) уравнение (4.2) принимает вид

$$\lambda^2 - bx_1\lambda + x_1\sqrt{(1-a)^2 - 8b^2} = 0, \quad x_1 > 0 \quad (4.4)$$

Это уравнение имеет два комплексных корня  $\lambda_{1,2}$  при условии

$$1 > a + \frac{17}{6}|b| \quad (4.5)$$

Последнее условие почти совпадает с условием (3.7). Точка  $x_1, y_1$  (3.6) будет для (1.6) неустойчивым фокусом. Для точки  $x_2, y_2$  (в (3.6) взят знак плюс) получим характеристическое уравнение (4.2) в виде

$$\lambda^2 - bx_2\lambda - x_2\sqrt{(1-a)^2 - 8b^2} = 0 \quad (4.6)$$

Так как  $a > 0$  в  $x_2$  (3.6), то при выполнении (3.7) уравнение (4.6) имеет всегда два вещественных различных по знаку корня  $\lambda_{3,4}$ . Точка  $x_2, y_2$  (3.6) будет для (1.6) седлом. Угловые коэффициенты  $\mu$  исключительных направлений удовлетворяют уравнению [7] (стр. 67)

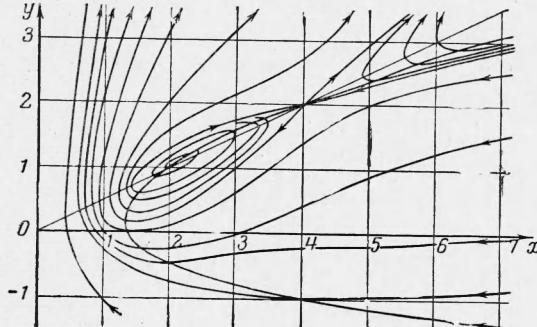
$$\mu^2 - 5b\mu + (2b^2 + (1-a)(x_2)^{-1}) = 0 \quad (4.7)$$

На прямых  $y = 2bx$ ,  $x = 0$  характеристики имеют вертикальные касательные. На гиперболе

$$1 - x(1 - a) - bxy + y^2 = 0 \quad (4.8)$$

касательные к характеристикам горизонтальны. Чтобы более резко выделить особенности и отличие от фиг. 2, на фиг. 3 изображен ход интегральных кривых системы (1.6) при больших значениях  $a = b = 1/4$ .

Основной вывод пункта: решения  $x_1, x_2, y_1, y_2$  (3.6) системы (1.6) при  $a = b = \text{const}$  являются неустойчивыми. При постоянном угле наклона паруса  $\theta$  нельзя удержать угол  $\alpha$  постоянным. Поэтому и траектории в виде логарифмических спиралей, на которые ссылаются авторы [2-4], будут неустойчивыми. Из приближенного подобия траектории полета и интегральных кривых системы (1.6) на плоскости  $xy$  (при  $a = b = 0$  имеет место точное подобие (п. 2)) вытекает следующий характер движения. Если на космический корабль, находящийся на круговой орбите, поставить солнечный парус с постоянным углом наклона  $\theta$ , то корабль будет двигаться по оскулирующему эллипсу с увеличивающимся эксцентриситетом, пока не достигнет параболической скорости. Интересно отметить, что в некоторых случаях корабль с гиперболической скоростью можно вернуть на эллиптическую орбиту при помощи солнечного паруса.



Фиг. 3

**5. Первое приближение движения при помощи паруса при постоянном угле наклона паруса.** Произведем в (1.6) замену переменных  $x, y$

$$x = \frac{1}{1 + \varepsilon \cos \varphi} + \frac{u}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2}, \quad y = \frac{\varepsilon \sin \varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi} + \frac{v}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2} \quad (5.1)$$

Будем отсчитывать угол от перигелия, т. е. в (2.4) положим  $\varphi_0 = 0$ . Получим систему дифференциальных уравнений для  $u, v$

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\varphi} &= -\frac{\varepsilon \sin \varphi u}{1 + \varepsilon \cos \varphi} + \frac{v}{1 + \varepsilon \cos \varphi} - 2b + \frac{uv}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \\ \frac{dv}{d\varphi} &= -u + a(1 + \varepsilon \cos \varphi) - \varepsilon b \sin \varphi + \frac{v^2}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Однородная линеаризованная система уравнений

$$\frac{du}{d\varphi} = -\frac{u\varepsilon \sin \varphi - v}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad \frac{dv}{d\varphi} = -u \quad (5.3)$$

имеет фундаментальную матрицу решений  $N(\varphi)$

$$N(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi + \varepsilon \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

При  $a = b = 0$  система (5.2) имеет решение  $u = v = 0$ , которое соответствует кеплеровскому движению (п. 2). При  $a, b \neq 0$  и начальных условиях

$$u = v = \varphi = 0 \quad (5.5)$$

получим в первом приближении из (5.2)

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = N(\varphi) \int_0^\varphi N^{-1}(\varphi) \begin{pmatrix} -2b \\ a(1 + \varepsilon \cos \varphi) - \varepsilon b \sin \varphi \end{pmatrix} d\varphi + O(a^2 + b^2) \quad (5.6)$$

Интегрируя (5.6), находим выражения для  $u, v$

$$\begin{aligned} u &= a(1 - \cos \varphi) - bR \cos \varphi + bS \sin \varphi + O(a^2 + b^2) \\ v &= a(1 + \varepsilon) \sin \varphi + bR \sin \varphi + bS(\cos \varphi + \varepsilon) + O(a^2 + b^2) \\ R &\equiv \frac{\varphi}{\varepsilon} - \frac{2\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon} \arctg \left[ \left( \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \right)^{1/2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right] + \sin \varphi \\ S &\equiv 1 - \cos \varphi + \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon \cos \varphi} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Из (5.1), (5.7) следует, что характеристика (1.6), выходящая из точки  $x_0 = (1 + \varepsilon)^{-1}$ ,  $y_0 = 0$  ( $\varepsilon < 1$ ), после целого обхода  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  приходит в точку

$$x_1 = \frac{1}{1 + \varepsilon_1} = \frac{1}{1 + \varepsilon} - \frac{2\pi b}{(1 + \varepsilon)^2} \frac{1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon} + O(a^2 + b^2), \quad y_1 = 0 \quad (5.8)$$

Это значит, что при выключении паруса ( $\theta = 90^\circ$ ) корабль будет двигаться по эллипсу с новым эксцентриситетом  $\varepsilon_1$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon + \frac{2\pi b}{1 + \sqrt{1 + \varepsilon^2}} + O(a^2 + b^2) \quad (5.9)$$

В первом приближении величина  $a$  (1.3) не влияет на изменение эксцентриситета  $\varepsilon$  (5.9). Поэтому в некотором отношении выгодно сделать  $b$  наибольшим. Отсюда найдем (1.3)

$$\cos^2 \theta \sin \theta = \max_\theta, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \theta \approx 35^\circ 15' \quad (5.10)$$

Исходя из (5.9), можно приближенно оценить число витков, необходимых для достижения параболической скорости ( $\varepsilon = 1$ ). Выведем уравнение для изменения величины  $\varepsilon$ , определяемой равенством (2.2). Дифференцируя второе уравнение (2.2) по  $\varphi$  и подставляя (1.6), получим

$$\varepsilon \frac{d\varepsilon}{d\varphi} = a \frac{y}{x} + \frac{b}{x}(y^2 - 2x + 2) \quad (5.11)$$

Подставляя (5.1) в (5.11) и сокращая на  $\varepsilon$ , найдем

$$\frac{d\varepsilon}{d\varphi} = a \sin \varphi + b \cos \varphi + b \frac{\cos \varphi + \varepsilon}{1 + \varepsilon \cos \varphi} + O(a^2 + b^2) \quad (5.12)$$

Осредняя правую часть (5.12) по углу  $\varphi$ , получим

$$\frac{d\varepsilon}{d\varphi} \approx b \frac{\varepsilon}{1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}} \quad (5.13)$$

Пусть корабль двигался по эллиптической орбите с эксцентрицитом  $\varepsilon_1$ . При угле  $\varphi_1$  был включен парус под постоянным углом к лучам Солнца и при угле  $\varphi_2$  выключен. Корабль стал двигаться по орбите с эксцентрицитом  $\varepsilon_2$ . Интегрируя уравнение (6.13), находим приближенную формулу

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \psi(\varepsilon_2) - \psi(\varepsilon_1), \quad \psi(\varepsilon) = -\frac{1}{b} [\ln(1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}) + \sqrt{1 - \varepsilon^2}] \quad (5.14)$$

**6. Угол наклона паруса  $\theta$  зависит от угла  $\alpha$ .** В рассматриваемом случае уравнения движения (1.1) допускают траекторию в виде логарифмической спирали. Соответствующие постоянные значения  $x^*$ ,  $y^*$  можно найти из неявных уравнений (3.4). Если в (3.6) возьмем знак «—», то получим приближенные выражения

$$x^* = 1 + a + 2b^2 + O(a^2 + b^4), \quad y^* = 2bx^* \quad (6.1)$$

Условия устойчивости точки  $x^*$ ,  $y^*$ , как решения системы дифференциальных уравнений (1.6), имеют вид

$$-(A + D) > 0, \quad AD - BC > 0, \quad x = x^*, y = y^* \quad (6.2)$$

где использованы обозначения (4.3). Подставляя (4.1), получим условия (6.2) более конкретно

$$\frac{da}{dy} < 2bx \frac{db}{dy} - b, \quad 2b \frac{da}{dy} + 2 \frac{db}{dy} (1 - a) < x \sqrt{(1 - a)^2 - 8b^2} \quad (6.3)$$

Они должны выполняться при  $x = x^*$ ,  $y = y^*$ . Приближенно (6.3) можно переписать в виде

$$\frac{da}{dy} < -b + O(a^2 + b^2), \quad \frac{db}{dy} < \frac{1}{2} + O(|a| + |b|) \quad (6.4)$$

Неравенства (6.3), (6.4) могут выполняться за счет изменения площади паруса или за счет изменения угла  $\theta$ . Пусть меняется только угол  $\theta$ . Подставляя в (6.4) выражения (1.3) с учетом (3.10), получим неравенства

$$\frac{d\theta}{d\alpha} < -\frac{1}{3} + O(f), \quad \frac{d\theta}{d\alpha} f \cos \theta (2 \sin^2 \theta - \cos^2 \theta) < \frac{1}{2} + O(f) \quad (6.5)$$

Если  $\tan \theta > 1/\sqrt{2}$  ( $\theta > 35^\circ 15'$ ), то достаточно выполнения первого неравенства (6.5). Если  $\tan \theta < 1/\sqrt{2}$  ( $0 < \theta < 35^\circ 15'$ ), то для выполнения (6.5) достаточно выполнения условия

$$-0.5f^{-1} < d\theta/d\alpha + O(f) < -1/3 \quad (6.6)$$

Отметим, что при рассматриваемом движении нельзя достичь параболической скорости.

После выключения паруса корабль движется по эллипсу с эксцентрицитом

$$\varepsilon = \sqrt{a^2 + 8b^2} + O(a^3 + b^4) \quad (6.7)$$

**7. Сила тяги паруса направлена вдоль скорости движения.** В изучаемом случае нетривиальным будет вопрос об устойчивости формы круговой орбиты. Точнее, неизвестен характер особой точки  $x = 1$ ,  $y = 0$  для системы уравнений (1.6), если  $a$ ,  $b$  определяются формулами (3.10).

Уравнения (1.6) для  $x$ ,  $y$  принимают вид

$$\frac{dx}{d\varphi} = xy - \frac{2fx^2y^2}{(1 + y^2)^{3/2}}, \quad \frac{dy}{d\varphi} = 1 - x + y^2 \quad (7.1)$$

Линеаризация (7.1) в точке  $x = 1$ ,  $y = 0$  приводит к сомнительному случаю центра — фокуса.

Пользуясь критерием Дюлака [8] (стр. 346), можно показать, что при  $f \neq 0$  система уравнений (7.1) не может иметь замкнутых характеристик. Обозначим

$$P(x, y) = xy - \frac{2fx^2y^2}{(1 + y^2)^{3/2}}, \quad Q(x, y) = 1 - x + y^2, \quad B(x, y) = \frac{1}{x^3} \quad (7.2)$$

Тогда выражение

$$\frac{\partial}{\partial x}(BP) + \frac{\partial}{\partial y}(BQ) = \frac{2fy^2}{x^2(1+y^2)^{3/2}} \quad (7.3)$$

будет знакопостоянным, что и показывает отсутствие замкнутых характеристик.

Рассмотрим характеристику, выходящую из точки  $M_1$ :  $x_1 = (1 + \varepsilon_1)^{-1}$ ,  $y_1 = 0$ . После обхода точки  $\{1, 0\}$  эта характеристика при возрастании  $\varphi$  приходит в точку  $M_2$ :  $x_2 = (1 + \varepsilon_2)^{-1}$ ,  $y_2 = 0$ . Применяя формулу Грина к области  $S$ , ограниченной этой характеристикой и отрезком  $M_2M_1$ , найдем

$$\iint_S \left[ \frac{\partial}{\partial x}(BP) + \frac{\partial}{\partial y}(BQ) \right] dx dy = \int_{M_2}^{M_1} BQ dx \quad (7.4)$$

так как криволинейный интеграл вдоль характеристики равен нулю. Из (7.3), (7.4) получаем

$$\varepsilon_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) = 2f \iint_S \frac{y^2 dx dy}{x^2(1+y^2)^{3/2}} + O(f^2) \quad (7.5)$$

Заменим в двойном интеграле  $x, y$  на переменные  $\varepsilon, \varphi$  по формулам

$$x = \frac{1}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad y = \frac{\varepsilon \sin \varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad (7.6)$$

и получим из (7.5), (7.6) выражение для приращения эксцентриситета за один оборот

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \frac{2f}{\varepsilon_1} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon^3 \sin^2 \varphi d\varepsilon}{(1 + 2\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2)^{3/2}} + O(f^2) \quad (7.7)$$

С другой стороны, из (5.12) и (3.10) найдем

$$\frac{d\varepsilon}{d\varphi} = \frac{2f\varepsilon^2 \sin^2 \varphi (\cos \varphi + \varepsilon)}{(1 + 2\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2)^{3/2}} + O(f^2) \quad (7.8)$$

При орбите, близкой к круговой ( $\varepsilon \approx 0$ ), из (7.7) или (7.8) следует формула для приращения эксцентриситета  $\varepsilon$  за один оборот траектории

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = 0.5\varepsilon_1^3 \pi f + O(f^2 + \varepsilon_1^4) \quad (7.9)$$

**8. Решение вспомогательного трансцендентного уравнения.** В дальнейшем неоднократно потребуется знание явного решения трансцендентного уравнения

$$2 \operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg} s \quad (8.1)$$

Решение  $\vartheta(s)$  должно быть непрерывным,  $\vartheta(0) = 0$ . Продифференцируем (8.1) по  $s$  и исключим  $\vartheta$

$$\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{\cos^2 \vartheta}{2 \cos^2 s} = \frac{4}{5 + 3 \cos 2s} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left( -\frac{1}{3} \right)^k \cos 2ks \quad (8.2)$$

Интегрируя (8.2), находим искомое решение

$$\vartheta(s) = s + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin 2ks}{k 3^k} \equiv \Psi(s) \quad (8.3)$$

Отметим некоторые свойства функции  $\Psi(s)$

$$\begin{aligned} \Psi(-s) &= -\Psi(s), & \Psi(s \pm \pi) &= \Psi(s) \pm \pi, & \vartheta &= \Psi(s) \\ s &= 1/2\pi + \Psi(\vartheta - 1/2\pi) \end{aligned} \quad (8.4)$$

**9. Оптимальное направление силы, постоянной по абсолютной величине.** Пусть сила тяги  $P$  осуществляется двигателем и не зависит по абсолютной величине от направления силы. Поставим задачу: найти оптимальный угол  $\gamma$  между направлением  $r$  и  $P$ , чтобы за наименьшее число оборотов корабль достиг параболической скорости

$$P_r = P \cos \gamma, \quad P_\varphi = P \sin \gamma \quad (9.1)$$

Уравнение (5.12) для изменения эксцентриситета  $\varepsilon$  примет вид при малом  $P > 0$

$$\frac{d\varepsilon}{d\varphi} = \frac{Pr^2}{k} \left( \sin \varphi \cos \gamma + \frac{\varepsilon \cos^2 \varphi + 2 \cos \varphi + \varepsilon}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \sin \gamma \right) + O\left(\frac{P^2 r^4}{k^2}\right) \quad (9.2)$$

Правая часть в (9.2) принимает свое наибольшее значение при угле  $\gamma$ , удовлетворяющем условиям

$$q \cos \gamma = \sin \varphi, \quad q \sin \gamma = \frac{\varepsilon \cos^2 \varphi + 2 \cos \varphi + \varepsilon}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad (q > 0) \quad (9.3)$$

Из (9.3) следует, что

$$\gamma(\varphi) + \gamma(-\varphi) = \pi \quad (9.4)$$

Используя (9.4), достаточно вычислить  $\gamma$  при  $0 \leq \varphi \leq \pi$ . Отметим, что  $\varphi$  является угловым расстоянием корабля от перигелия. Отбрасывая в (9.2) малую величину  $O(P^{2/3}k^{-2})$ , рассмотрим частные случаи орбит.

а. Круговая орбита,  $\varepsilon = 0$ . Из (9.3) находим

$$2 \operatorname{ctg} \gamma = \operatorname{tg} \varphi, \quad 2 \operatorname{tg} (\frac{1}{2}\pi - \gamma) = \operatorname{tg} \varphi \quad (9.5)$$

Из п. 8 следует, что

$$\frac{\pi}{2} - \gamma = \Psi(\varphi), \quad \gamma = \frac{\pi}{2} - \varphi - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin 2k\varphi}{k 3^k} \quad (9.6)$$

Величина  $\gamma + \varphi$  колеблется с небольшой амплитудой, не превышающей  $23^\circ$  около значения  $0.5\pi$ .

Для наглядности можно сказать, что сила  $P$  действует пропорционально в постоянном направлении, при этом сдвигает всю орбиту в сторону, увеличивая эксцентриситет.

б. Параболическая орбита,  $\varepsilon = 1$ . Из (9.3) получим

$$\operatorname{ctg} \gamma = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi \\ \gamma = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\varphi \quad (9.7)$$

С другой стороны, из (2.4) ( $\varphi_0 = 0$ ) найдем

$$y = \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi = \operatorname{ctg} \gamma \\ \gamma = \alpha \quad (9.8)$$

При орбите, близкой к параболической, следует направлять силу по касательной к траектории движения. В общем случае пользуемся уравнениями (9.3).

Приводим значения  $\gamma$  в градусах, округленные с точностью до  $1^\circ$ , при трех значениях эксцентриситета. Значения углов даны в градусах.

$\varphi = 0$	20	40	60	80	100	120	140	160	180
$\gamma = 90$	80	67	49	19	-19	-49	-67	-80	-90
$\gamma = 90$	80	69	56	39	10	-30	-61	-79	-90
$\gamma = 90$	80	70	60	50	40	30	20	10	0

( $\varepsilon = 0.0$ )  
( $\varepsilon = 0.5$ )  
( $\varepsilon = 1.0$ )

На фиг. 4 пунктирными стрелками указано оптимальное направление силы при  $\varepsilon = 0.5$ , которая не зависит по абсолютной величине от направления.

10. Круговая орбита при оптимальном режиме. Пусть сила  $P$  действует так, как это указано в п. 9. Пусть корабль движется по круговой орбите с радиусом  $r_0$ . Из (9.5), (9.3) при  $\varepsilon = 0$  найдем

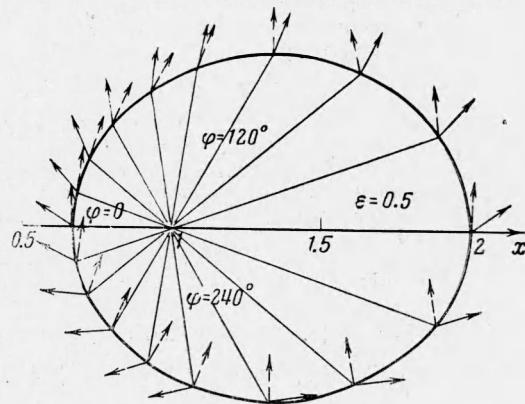
$$P_r = P \sin \varphi 0.5 (1 - 0.75 \sin^2 \varphi)^{-1/2}, \quad P_\varphi = P \cos \varphi (1 - 0.75 \sin^2 \varphi)^{-1/2} \quad (10.1)$$

Из (1.3), (5.2) получим уравнения для возмущений переменных  $x$ ,  $y$

$$\begin{aligned} du / d\varphi &= v - 2\chi \cos \varphi (1 - 0.75 \sin^2 \varphi)^{-1/2} + O(\chi^2), & \chi &\equiv P r_0^2 k^{-1} \\ dv / d\varphi &= -u + 0.5\chi \sin \varphi (1 - 0.75 \sin^2 \varphi)^{-1/2} + O(\chi^2) \end{aligned} \quad (10.2)$$

Из (10.2) получаем решение с начальными условиями (5.5)

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \int_0^\varphi \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \frac{\chi d\varphi}{(1 - 0.75 \sin^2 \varphi)^{1/2}} + O(\chi^2) \quad (10.3)$$



Фиг. 4

Интегрируя (10.3), находим

$$\begin{aligned} u &= 2\chi [-\cos \varphi E(1/2 \sqrt{3}, \varphi) + \sin \varphi (1 - 0.75 \sin^2 \varphi)^{1/2}] + O(\chi^2) \\ v &= 2\chi [\sin \varphi E(1/2 \sqrt{3}, \varphi) + \cos \varphi (1 - 0.75 \sin^2 \varphi)^{1/2}] + O(\chi^2) \end{aligned} \quad (10.4)$$

Здесь  $E(1/2 \sqrt{3}, \varphi)$  обозначает эллиптический интеграл второго рода [9]

$$E(1/2 \sqrt{3}, \varphi) = \int_0^\varphi (1 - 0.75 \sin^2 \varphi)^{1/2} d\varphi \quad (10.5)$$

Интегрируя (1.9), (5.1) за целый оборот  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ , после упрощений получим из [9] с точностью до  $O(\chi^2)$

$$\ln \frac{r_1}{r_0} = \int_0^{2\pi} v d\varphi = -2\chi \int_0^{2\pi} (1 - 0.75 \sin^2 \varphi)^{1/2} d\varphi = -9.6888\chi \quad (10.6)$$

Здесь  $r_1$  — новое значение радиуса после обхода вокруг Солнца.

Под действием постоянной по величине силы  $P$ , направление которой выбирается из условия наибольшего приращения эксцентриситета  $\varepsilon$  за один оборот, корабль приближается к Солнцу

$$r_1 = r_0 (1 - 9.6888 P r_0^2 k^{-1}) + O(P^2 r_0^4 k^{-2}) \quad (10.7)$$

**11. Выбор оптимального угла наклона паруса.** Будем искать закон изменения угла  $\theta$  наклона паруса (фиг. 1) к лучам Солнца такой, чтобы за наименьшее число оборотов корабль с эллиптической орбиты ( $0 < \varepsilon < 1$ ) перешел на параболическую.

Из дифференциального уравнения (5.12) и (1.3) следует, если отбросим малые высших порядков, что правая часть (5.12) должна принять наибольшее значение за счет выбора  $\theta$

$$\cos^3 \theta \sin \varphi + \cos^2 \theta \sin \theta \frac{\varepsilon \cos^2 \varphi + 2 \cos \varphi + \varepsilon}{1 + \varepsilon \cos \varphi} = \max_{\theta}, \quad |\theta| \leq \frac{\pi}{2} \quad (11.1)$$

Считая угол  $\gamma$  (п. 9) известным из (9.3), исключим угол  $\varphi$  и получим

$$\cos^2 \theta \cos(\gamma - \theta) = \max_{\theta}, \quad |\theta| \leq 1/2\pi, \quad |\gamma| \leq \pi \quad (11.2)$$

Дифференцированием по  $\theta$  находим уравнение

$$2 \operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg}(\gamma - \theta) \quad (11.3)$$

Чтобы использовать п. 8, преобразуем (11.3) к виду

$$2 \operatorname{tg}(1/2\pi - \gamma + \theta) = \operatorname{tg}(1/2\pi - \theta) \quad (11.4)$$

Используя (8.3), находим значение  $\gamma$  через  $\theta$

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} - \gamma + \theta &= \Psi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right), \quad \gamma = 2\theta + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2k\theta}{k 3^k} \\ |\theta| &\leq 1/2\pi, \quad |\gamma| \leq \pi \end{aligned} \quad (11.5)$$

Оптимальные углы  $\gamma$  и  $\theta$  связаны соотношением (11.5).  $\theta$  находится как решение неявного уравнения (11.5) при данном угле  $\gamma$ .

Приводим оптимальные значения угла  $\theta$  при трех значениях эксцентриситета  $\varepsilon$ ; значения углов даны в градусах и округлены с точностью до одного градуса.

$\varphi = 0$	20	40	60	80	100	120	140	160	180	
$\theta = 35$	30	24	17	6	-6	-17	-24	-30	-35	( $\varepsilon = 0.0$ )
$\theta = 35$	30	25	20	14	3	-10	-23	-30	-35	( $\varepsilon = 0.5$ )
$\theta = 35$	30	26	22	18	14	10	7	3	0	( $\varepsilon = 1.0$ )

На фиг. 4 сплошными стрелками указано действие силы тяги паруса при  $\varepsilon = 0.5$  такое, чтобы за один оборот получить наибольшее приращение эксцентриситета.

*Замечание.* Задача об оптимальном направлении силы, которое позволило бы за кратчайшее время достичь параболической скорости, значительно труднее задачи, решенной в работе. Однако, если рассматривать небольшой промежуток времени, когда

параметры орбиты меняются лишь на величины  $O(|a| + |b|)$ , то монотонная зависимость угла  $\varphi$  и времени  $t$  меняется мало. Поэтому рассмотренное выше оптимальное управление углом  $\theta$  дает приближенное решение задачи о достижении за кратчайшее время определенного порядка  $O(|a| + |b|)$  приращения эксцентрикитета оскулирующей орбиты.

12. Сравнение движений по параболической орбите и логарифмической спирали. Для параболической орбиты имеем [6] (стр. 290) выражение радиуса  $r_2(t)$  через время

$$r_1(t) = [r_0^{3/2} + 1.5 \sqrt{2k}(t - t_0)]^{2/3} \quad (12.1)$$

Интегрируя (1.9), (1.10) по  $\varphi$  и считая  $x^*, y^* = \text{const}$  (6.1), получим для траектории в виде логарифмической спирали

$$r_2(t) = [r_0^{3/2} + 1.5y^* \sqrt{k}(x^*)^{-1/2}(t - t_0)]^{2/3} \quad (12.2)$$

Если предположить  $a, b \ll 1$ , то отношение

$$1.5y^* \sqrt{k}(x^*)^{-1/2} : 1.5 \sqrt{2k} = b \sqrt{2x^*} = \sqrt{2}(b + 0.5ab + b^3) + O(a^2b + b^5) \quad (12.3)$$

показывает следующее. Для достижения больших значений  $r$  выгоднее предварительно достичнуть параболической скорости (не говоря уже о гиперболической скорости) и выключить парус, чем двигаться с невыключенными парусом по логарифмической спирали.

Поступила 12 XI 1963

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Garwin R. L. Solar sailing — a practical method of propulsion within the solar system. Jet Propulsion, 1958, 2, 188—190.
2. Цзю. Межпланетный полет с помощью солнечного паруса. Сб. пер. «Механика», 1961, № 1, 3—15.
3. Лондон Г. С. Некоторые точные решения уравнений движения космического корабля с солнечным парусом при постоянном угле установки паруса. Сб. пер. «Механика», 1961, № 1, 16—22.
4. Тагеев А. Р. Маневры в космосе. Библ. сб. «Механика», «Космические траектории», ИЛ, 1963, 150—153.
5. Валеев К. Г. О некоторых случаях интегрируемости уравнений движения материальной точки под действием ньютоновской силы и дополнительных возмущающих сил. ПММ, т. XXVII, вып. 2,
6. Дубшин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. Физматгиз, 1963.
7. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. ИЛ, 1962.
8. Андронов А. А., Витта А. А. и Хакин С. Э. Теория колебаний. Физматгиз, 1959.
9. Янке Е. и Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. Гостехтеориздат, М.—Л., 1949.

#### УПРОЩЕННЫЙ ВАРИАНТ ИНТЕГРАЛЬНОГО КИНЕТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

*P. Г. Баранцев, Б. В. Филиппов*

(Ленинград)

Постановка задач аэродинамики одноатомных разреженных газов была дана в работе [1] в виде интегрального уравнения

$$f = Vf \quad (1)$$

для функции распределения  $f(r, u, t)$ . В [2] был предложен другой вариант интегрального кинетического оператора  $V$ , содержащий конечный временной радиус завязки  $t - t_0$ , который может играть роль произвольного параметра, принимающего любые значения<sup>1</sup> в пределах от нуля до  $\tau_{\max} \ll \infty$ .

В настоящей работе указана упрощенная форма оператора  $V$  при малых  $t - t_0$  и отмечаются те возможности, которые открывает этот оператор для решения кинетических задач как на уровне самой функции распределения [3], так и в моментных приближениях [4].

<sup>1</sup> Б. В. Филиппов. Уравнения и постановка задач обтекания тел разреженным газом с учетом динамики адсорбционного слоя. Кандидатская диссертация, ЛГУ, 1963.