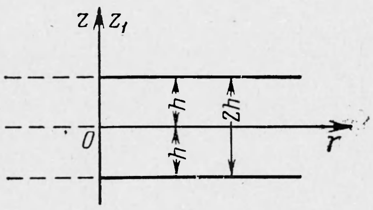
О ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ ПЛАСТА ПРИ НАГНЕТАНИИ В НЕГО ТЕПЛОНОСИТЕЛЯ

М. А. Пудовкин *(Казань)*

При длительной закачке воды в скважину может изменяться поле температур пласта в целом [1, 2]. Теоретическому и экспериментальному изучению этого вопроса посвящены работы [3–10].

Ниже рассматривается краевая задача о нахождении поля температур в бесконечном пласте по мощности и простиранию. Пласт делится на две части: в слой, куда закачивается вода (водный слой), и песчаник, содержащий нефть вне водного слоя. Пласт мыслится термически анизотропным именно: вне водного слоя теплопроводности по вертикали и горизонтали различны и конечны, в водном слое теплопроводность в вертикальном направлении бесконечна и исчезающе мала в горизонтальном направлении. Краевая задача решается при специфическом краевом условии.

Постановка задачи. Пусть имеется бесконечно глубоко залегающий пласт, в который через единичную скважину, совпадающую с осью z_1 цилиндрической системы координат $(r,\ z,\ \varphi)$, на отрезке $-h_1<z_1<h_1$ нагнетается несжимаемая жидкость с постоянным объемным дебитом Q° и произвольной температурой $T_B(t)$, отличной от постоянной начальной температуры пласта T_0 ($T_B>T_0$ в случае нагревания и $T_B<T_0$ в случае охлаждения) (фиг. 1). В слое пласта между горизонтальными плоскостями $z=\pm h$, куда закачивается вода, в областях, куда вода из скважины уже вторглась, физико-термические свойства отличны от свойств остальной части пласта. Это предположение оправдывается тем, что при внутриконтурном и законтурном заводнениях приемистость воды обеспечивается не по всей мощности пласта, а только в той части ее, где имеет место наибольшая проницаемость. Следовательно, здесь будут другие физико-термические параметры. Влиянием изменения пластовых давлений на изменение температуры пласта пренебрегаем. Далее, предположим, что теплофизические параметры пласта и водного слоя, где $-h_1<z_1<h_1$, не зависят от температуры. Жидкость поступает в слой пласта, где $|z_1|<h$, а границу между областью, занятой жидкостью, и остальной частью пласта, как предполагается, представляет собой расширяющаяся цилиндрическая поверхность $r=r(t)$ высотой $2h_1$ и с осью симметрии, совпадающей с осью z_1. Здесь, как бы имеет место аналогия с «поршневым» вытеснением нефти водой, где границей соприкосновения их (водонефтяной контакт) служит перемещающаяся со временем цилиндрическая поверхность.



Фиг. 1

Предполагаем, что теплопроводности пласта в направлении простирания и по вертикали различны между собой. При наличии радиальной симметрии температура T_2 $(r,\ z_1,\ t_1)$ пласта, где $|z_1|>h_1$, будет удовлетворять уравнению

$$\lambda_1 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial T_2}{\partial r} + \lambda_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial z_1^2} = c_2\gamma_2 \frac{\partial T_2}{\partial t_1} \qquad \left(\begin{matrix} r>0, & t_1>0 \\ |z_2|>h_1, & \lambda_2<\lambda_1 \end{matrix}\right) \tag{1}$$

Здесь λ_1 — теплопроводность в радиальном направлении, λ_2 — теплопроводность в вертикальном направлении (*ккал / м час·град*), $c_2\gamma_2$ — объемная теплоемкость нефтенасыщенной части пласта, c_2 — удельная теплоемкость *ккал / кг·град*, γ_2 — плотность тела *кг/м*^{3}.

Пласт в зоне воды — $h_1<z_1<h_1$ будем считать термически анизотропным [10, 11], имеющим бесконечную теплопроводность в вертикальном направлении и исчезающе малую по простиранию.

Предполагаем также, что плоскость $z_1=0$ является плоскостью симметрии температур пласта, и далее будем рассматривать только верхнюю часть, где $z_1>0$. Условие сопряжения температур пласта и водного слоя заменим уравнением теплового баланса элементарного слоя, заключенного между двумя цилиндрами с осью в источнике и толщиной $dr(r,\ r+dr)$ и плоскостями $z_1=\pm h$. Составим уравнение теплового баланса для упомянутого элементарного объема.

Изменение теплосодержания элемента объема за dt, dQ выразится

$$dQ = c_1\gamma_1 2\pi r 2h_1 \frac{\partial T_1}{\partial t_1}\, dr\, dt_1 \tag{2}$$

Здесь $c_1\gamma_1$ — объемная теплоемкость водного слоя; T_1 $(r,\ t_1)$ — температура водного слоя.

Количество тепла dQ_1, аккумулированное в элементе объема за счет конвективного переноса тепла за dt_1, будет равно

$$dQ_1 = -Q^\circ c_b \gamma_b \frac{\partial T_1}{\partial r} dr\, dt_1 \qquad (3)$$

Здесь $c_b\gamma_b$ — объемная теплоемкость инжектируемой жидкости, Q° — объемный расход жидкости.

Количество тепла dQ_2, полученное элементом объема из пласта $|z_1| > h_1$, за счет теплообмена, равно

$$dQ_2 = 2\cdot 2\pi r \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial z_1}\bigg|_{z_1=h_1} dr\, dt, \qquad (4)$$

Используя соотношения $dQ = dQ_1 + dQ_2$, получим

$$c_1\gamma_1 h_1 \frac{\partial T_1}{\partial t_1} + \frac{Q^\circ c_b \gamma_b}{4\pi r} \frac{\partial T_1}{\partial r} - \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial z_1}\bigg|_{z_1=h_1} \qquad (5)$$

Чтобы учесть количество тепла, поступившего внутрь элемента посредством теплопроводности, к правой части (5) нужно присоединить слагаемое

$$\frac{\lambda_1 h_1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial T_1}{\partial r}\right)$$

Здесь λ_1 — теплопроводность пласта, где $|z_1| < h$, т. е. количество тепла, аккумулированное в элементе объема за время dt_1, обусловленное теплопроводностью в направлении r. Как показано в работе [3], влияние этого слагаемого очень мало и им можно пренебречь.

Кроме (1), (5) также должны выполняться условия

$$T_1 = T_2 \qquad \text{при } z_1 = \pm h_1 \qquad (6)$$

$$T_1 = T_2 = T_0 = \text{const} \qquad \text{при } t_1 = 0, \ \sqrt{r^2 + z_1^2} \to \infty \qquad (7)$$

$$T_1 = f_1(t_1) \qquad \text{при } r = 0, \ z_1 = h_1 \qquad (8)$$

Здесь принимаем $z_1 = h_1$, так как температура T_1 для $|z_1| \leqslant h_1$ одинакова, по предположению не изменяется [10] с изменением z_1.

Преобразуем уравнение (1) и условия (5) — (8). Разделим уравнение (1) на λ_1 и положим

$$z_1 \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} = z, \qquad \frac{\lambda_1}{c_2\gamma_2} t_1 = t, \qquad h_1 \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} = h \qquad (9)$$

Тогда уравнение (1) и условие (5) принимают вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial T_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} = \frac{\partial T_2}{\partial t}, \qquad r > 0, \quad t > 0, \quad |z| > h \qquad (10)$$

$$a\frac{\partial T_1}{\partial t} + b\frac{1}{r}\frac{\partial T_1}{\partial r} = \frac{\partial T_2}{\partial z}\bigg|_{z=h} \qquad \left(a = \frac{c_1\gamma_1 h_1}{c_2\gamma_2}\frac{\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_2}}, \quad b = \frac{Q^\circ c_b\gamma_b}{4\pi\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\right) \qquad (11)$$

Условия (6), (7), (8) для новых независимых переменных не изменят своего вида. Положим

$$\theta_2 = T_0 - T_2, \qquad \theta_1 = T_0 - T_1 \qquad (12)$$

Равенства (10), (11), (6) сохранят свой вид для θ_1, θ_2, начальное условие (7) превратится в нулевое, а условие (8) примет вид

$$\theta_1 = T_0 - f(t) = \Psi(t) \qquad \text{при } r = 0, \ z = h \qquad (13)$$

Для решения сформулированной задачи над равенствами (10), (11), (13) осуществим преобразование Лапласа по переменному t.

Положим

$$L[\theta_{1,2}(r, z, t)] = U_{1,2}(r, z, s) = \int_0^\infty e^{-st}\theta_{1,2}\, dt \qquad (14)$$

$$L[\Psi(t)] = \int_0^\infty e^{-st}\Psi(t)\, dt = F(s) \left(L[1] = \frac{1}{s}\right) \qquad (15)$$

Тогда уравнения (10), (11) принимают вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial U_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2} = sU_2, \quad z > h, \quad r > 0 \tag{16}$$

$$asU_1 + b\,\frac{1}{r}\frac{\partial U_1}{\partial r} = \frac{\partial U_2}{\partial z}, \qquad z = h \tag{17}$$

а условие (6) и начальное нулевое условие (7) для U сохраняются.

Осуществим преобразование Ханкеля [12] нулевого порядка над $U(r, z, s)$ — результат преобразования обозначим через $V(p, z, s)$, т. е.

$$H(U) = V(p, z, s) = \int_0^\infty rU(r, z, s)\, J_0(rp)\, dr \tag{18}$$

где $J(rp)$ — функция Бесселя нулевого порядка первого рода действительного аргумента, p — параметр преобразования (индексы у U опущены).

Преобразованием Ханкеля (18) и последовательным интегрированием по частям имеем

$$\int_0^\infty r\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial U}{\partial r} J_0(r_p)\, dr = -\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{r\to 0} + p\int_0^\infty Urp\left[J_0''(rp) + \frac{1}{r_p}J_0'(r_p)\right]dr$$

и так как $J_0(rp) + (rp)^{-1}J_0'(rp) + J_0(rp) = 0$, то

$$\int_0^\infty J_0(rp)\frac{\partial}{\partial r} r\frac{\partial U}{\partial r}\, dr = -\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{r\to 0} - p^2\int_0^\infty rUJ_0(rp)\, dr =$$

$$= -\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{r\to 0} - p^2 V(p, r, s) \tag{19}$$

Будем предполагать, что первое слагаемое здесь обращается в нуль. С учетом (19) уравнение (16) примет вид

$$d^2V / dz^2 - (p^2 + s)V = 0 \tag{20}$$

Уравнение (20) имеет следующее, ограниченное на бесконечности, решение

$$V(p, z, s) = c_1(p, s)\, e^{-(z-h)\sqrt{p^2+s}} \qquad (z > h) \tag{21}$$

обратное преобразование Ханкеля дает

$$H^{-1}(V) = U(r, z, s) = \int_0^\infty pc_1(p, s)\, e^{-(z-h)\sqrt{p^2+s}} J_0(rp)\, dp \tag{22}$$

Условие (17) при учете равенства $J_0'(rp) = -J_1(rp)$ и умножении всего равенства на r дает

$$\int_0^\infty J_0(rp)\, c_1(p, s)\, rp\, [as + \sqrt{p^2 + s}]\, dp - b\int_0^\infty p^2 c_1(p, s)\, J_1(rp)\, dp = 0 \tag{23}$$

Умножая равенство (23) на $J_0(rx)$, интегрируя его по r от нуля до бесконечности и меняя порядок интегрирования, получим

$$\int_0^\infty pc_1(p, s)\, [as + \sqrt{p^2 + s}]\left\{\int_0^\infty rJ_0(rx)\, J_0(rp)\, dr\right\}dp -$$

$$- b\int_0^\infty p^2 c_1(p, s)\left\{\int_0^\infty J_0(rx)\, J_1(rp)\, dr\right\}dp = 0 \tag{24}$$

Но первый интеграл есть интеграл Бесселя — Фурье и, следовательно,

$$\int_0^\infty pc_1(p, s)\, [as + \sqrt{p^2 + s}]\left\{\int_0^\infty rJ_0(rp)\, J_0(rx)\, dr\right\}dp = c_1(x, s)\, [as + \sqrt{x^2 + s}] \tag{25}$$

Из второго слагаемого (24) внутренний интеграл представляет собой частный случай разрывного интеграла Вебера — Шафтейтлина [8,9] и равен

$$\int_0^\infty J_0(xr)\, J_1(rp)\, dr = \begin{cases} 1/p & (p > x) \\ 0 & (p < x) \end{cases} \tag{26}$$

Следовательно, условие (24) примет вид

$$c_1(x, s)\,[as + \sqrt{x^2 + s}] - b\int_0^\infty pc_1(p, s)\, dp = 0 \tag{27}$$

Но в последнем интеграле в силу (27) нижний предел надо заменить на x. Будем иметь

$$c_1(x, s)\,[as + \sqrt{x^2 + s}] - b\int_x^\infty pc_1(p, s)\, dp = 0 \tag{28}$$

Положим

$$\varphi(x, s) = \int_x^\infty pc_1(p, s)\, dp, \quad \text{или} \quad \frac{d\varphi}{dx} = -xc_1(x, s) \tag{29}$$

Тогда уравнение (28) примет вид

$$xc_1(x, s)\,\frac{as + \sqrt{x^2 + s}}{x} - b\int_x^\infty xc_1(x, s)\, dx = 0 \tag{30}$$

Учитывая (2.9), получим

$$-\frac{d\varphi}{\varphi} - \frac{bx}{as + \sqrt{x^2 + s}}\, dx = 0; \qquad \varphi(0, s) = 1/s \quad \text{при } x = 0 \tag{31}$$

$$\varphi(x, s) = \frac{1}{s}\, e^{b\sqrt{s}}\, \frac{e^{-b\sqrt{x^2+s}}\,(as + \sqrt{x^2 + s})^{abs}}{(as + \sqrt{s})^{abs}} \tag{32}$$

Дифференцируя (32) и учитывая (29), найдем

$$c_1(x, s) = \frac{b}{s}\, e^{b\sqrt{s}}\, \frac{(as + \sqrt{x^2 + s})^{abs-1} e^{-b\sqrt{x^2+s}}}{(a\sqrt{s} + 1)^{abs}\, s^{1/2 abs}} \tag{33}$$

меняя в (33) x на p, из (21) найдем

$$V(p, z, s) = \frac{b}{s}\, e^{b\sqrt{s}}\, \frac{(as + \sqrt{p^2 + s})^{abs-1}\, e^{-b\sqrt{p^2+s}}\, e^{-(z-h)\sqrt{p^2+s}}}{(a\sqrt{s} + 1)^{abs}\, s^{1/2 abs}} \tag{34}$$

На основании теоремы обращения [12] из (22) и (34) имеем

$$U(r, z, s) = \int_0^\infty pc_1(p, s)\, e^{-(z-h)\sqrt{p^2+s}}\, J_0(rp)\, dp =$$

$$= b\int_0^\infty p\left[\frac{1}{s}\, e^{b\sqrt{s}}\, \frac{(as + \sqrt{p^2 + s})^{abs-1}\, e^{-(b+z-h)\sqrt{p^2+s}}}{(a\sqrt{s} + 1)^{abs}\, s^{1/2 abs}}\right] J_0(rp)\, dp \tag{35}$$

Далее, осуществляя обратное преобразование Лапласа и меняя порядок интегрирования, что считаем законным, из (35) получаем (36)

$$\theta_2(r, z, t) = b\int_0^\infty p\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st} e^{b\sqrt{s}}\, \frac{(as + \sqrt{p^2 + s})^{abs-1}\, e^{-(b+z-h)\sqrt{p^2+s}}}{(a\sqrt{s} + 1)^{abs}\, s^{1/2 abs}}\, \frac{ds}{s}\right] J_0(rp)\, dp$$

или, что то же самое,

$$\theta_2 = b\int_0^\infty p\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \exp\left[st + b\sqrt{s} - (b + z - h)\sqrt{p^2 + s} - abs\ln(a\sqrt{s} + 1) - \right.\right.$$

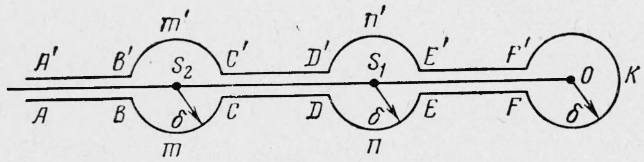
$$\left.\left. - \frac{abs}{2}\ln s + (abs - 1)\ln(as + \sqrt{p^2 + s})\right]\frac{ds}{s}\right] J_0(rp)\, dp \tag{37}$$

Для нахождения поля температур T_2 из (37) следует учесть обозначения (12) и использовать известный принцип Дюгамеля.

Итак, в дальнейшем надо вычислить внутренний интеграл в (37). Очевидно, что внутренний интеграл (37) вдоль бесконечной прямой, параллельной мнимой оси, может быть заменен интегралом по контуру $ABmCD$ и $EFkF'E'n'D'c'm'B'A'$ (фиг. 2), когда A и A' устремляются в $-\infty$. Здесь разрез произведен вдоль вещественной оси (фиг. 2). Особые точки подынтегральной функции будут точками ветвления. Эти особые точки следующие:

$$s_0 = 0, \qquad s_1 = {}^1/_2 a^{-2}\left(1 - \sqrt{1 + 4p^2p^2}\right), \qquad s_2 = -p^2$$

По смыслу задачи следует выбрать ту ветвь y, $\sqrt{p^2 + s}$, которая дает значение, равное $|p|$ при $s = 0$. Далее, если иметь в виду плоскость s, разрезанную так, как



Фиг. 2

указано на фиг. 2, то $a\sqrt{s} + 1$ не имеет корней. Величина s_1 есть корень уравнения

$$as + \sqrt{p^2 + s} = 0$$

Второй корень его исключается соглашением о выборе ветви у корня $\sqrt{p^2 + s}$.

Принимаем

$\arg s = -\pi$	в точке A,	$\arg s = \pi$	в точке A'
$\arg (p^2 + s) = -\pi$	в точке B,	$\arg (p^2 + s) = \pi$	в точке B'
$\arg (as + \sqrt{p^2 + s}) = -\pi$	в точке D,	$\arg (as + \sqrt{p^2 + s}) = \pi$	в точке D'

Здесь BmC, DnE, $B'm'C'$, $D'n'E'$ — полуокружности радиуса $\delta > 0$, FkF' — окружность радиуса δ.

Итак, в равенстве (37) нужно вычислить внутренний интеграл, который заменится на интеграл

$$J = \int\limits_{ABmCDnEFkF'E'n'D'c'm'B'A'} = \int\limits_{AB} + \int\limits_{CD} + \int\limits_{EF} +$$

$$+ \int\limits_{F'E'} + \int\limits_{D'C'} + \int\limits_{B'A'} + \int\limits_{BmC} + \int\limits_{DnE} + \int\limits_{FkF'} + \int\limits_{E'n'D'} + \int\limits_{C'm'B'} \tag{38}$$

Прежде чем осуществлять вычисление интеграла (35), примем следующие обозначения:

$s = Re^{-i\pi}$ вдоль отрезков AB, CD, EF

$s = Re^{+i\pi}$ вдоль отрезков $B'A'$, $D'C'$, $F'E'$

Объединяя интегралы по прямолинейным отрезкам AB и $B'A'$, CD и $D'C'$, EF и $F'E'$ и осуществляя нужные вычисления при стремлении δ к нулю, найдем

$$\int\limits_{AB} + \int\limits_{B'A'} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{p^2}^{\infty} e^{A} \sin B \, \frac{dR}{R} \tag{39}$$

$$\int\limits_{CD} + \int\limits_{D'C'} = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{|s_1|}^{|s_2|} e^{C} \sin D \, \frac{dR}{R} \tag{40}$$

$$\int\limits_{EF} + \int\limits_{F'E'} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{|s_1|} e^{E} \sin F \, \frac{dR}{R} \tag{41}$$

Фиг. 3

где

$$A = -Rt + abR \ln R_1 + {}^1/_2 abR \ln R - (abR + 1) \ln R_2$$

$$B = (b + z - h) - b\sqrt{R} + {}^1/_2 abR\pi - abR\varphi_1 - (abR + 1)\varphi_2$$

$$C = -Rt - (b + z - h)\sqrt{p^2 + R} + abR \ln R_1 + {}^1/_2 abR \ln R - (abR + 1) \ln R_3$$

$$D = b\sqrt{R} + abR\varphi_1 - {}^1/_2 abR\pi \tag{42}$$

$$E = -Rt - (b + z - h)\sqrt{p^2 - R} + abR \ln R + {}^1/_2 abR \ln R - (abR + 1) \ln R_3$$

$$F = b\sqrt{R} + abR\varphi_1 + {}^1/_2 abR$$

$$|s_1| = {}^1/_2 a^{-2}(\sqrt{1 + 4a^2p^2} - 1), \qquad |s_2| = p^2$$

$$\varphi_1 = \operatorname{arc\,tg} a\sqrt{R}, \qquad \varphi_2 = \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{R - p^2} / aR)$$

$$R_1 = \sqrt{1 + a^2R}, \qquad R_2 = \sqrt{a^2R^2 + R - p^2}, \qquad R_3 = |aR - \sqrt{p^2 - R}|$$

Интегралы по полуокружностям BmC, $B'm'C'$, DnE, $D'n'E'$ в пределе при $\delta \to 0$ равны нулю.

Интеграл около нуля при замене $s = \delta e^{i\varphi}$ примет вид

$$\lim_{\delta \to 0} \int\limits_{FkF'} = \frac{e^{-(b+z-h)|p|}}{|p|} \tag{43}$$

Итак, внутренний интеграл по контуру, изображенному на фиг. 2, в пределе, когда A и A' устремляются в $-\infty$, а радиусы окружностей $\delta \to 0$, выразятся суммой правых частей равенств (39) — (41), (43). Для вычисления внутреннего интеграла (37) можно поступить и иначе.

Воспользуемся тем, что все особые точки лежат в левой полуплоскости. Поэтому можно, пользуясь известной леммой Жордана, свести упомянутый интеграл к интегралу по мнимой оси с обходом нуля (начала координат) по полуокружности сколь угодно малого радиуса δ, лежащей в правой полуплоскости (фиг. 3). Имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{\substack{\delta \to 0 \\ A \to -i\infty \\ D \to +i\infty}} \left\{ \int\limits_A^B + \int\limits_{BmC} + \int\limits_C^D \right\} = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int\limits_{-i\infty}^0 + \int\limits_0^{i\infty} \right\} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\substack{BmC \\ (\delta \to 0)}} \tag{44}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \left\{ \int\limits_{-i\infty}^0 + \int\limits_0^{i\infty} \right\} = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty e^M \sin N \frac{dy}{y} \qquad (s = iy) \tag{45}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\substack{BmC \\ (\delta \to 0)}} = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-{}^1/_2\pi}^{{}^1/_2\pi} \exp\left[-(b + z - h)p - \ln|p|\right] \frac{i\delta e^{i\varphi}}{\delta e^{i\varphi}} d\varphi = \frac{e^{-(b+z-h)|p|}}{2|p|}$$

$$(s = \delta e^{i\varphi}) \tag{46}$$

где

$$M = b\sqrt{{}^1/_2 y} - (b + z - h)(p^4 + y^2)^{{}^1/_4} \cos {}^1/_2\varphi_1 + \theta_2 aby + {}^1/_4\pi\, aby^1/_4\pi - aby\theta_3 - \ln R_3$$

$$N = yt + b\sqrt{{}^1/_2 y} - (b + z - h) R_1 \sin {}^1/_2\varphi_1 - {}^1/_2 aby \ln y - aby \ln R_2 + aby \ln R_3 - \theta_3$$

$$R_1 = (p^4 + y^2)^{{}^1/_4}, \qquad \varphi_1 = \operatorname{arc\,tg}(y / p^2) \tag{47}$$

$$R_2 = \sqrt{(a\sqrt{{}^1/_2 y} + 1)^2 + (a\sqrt{{}^1/_2 y})^2}, \qquad \theta_1 = {}^1/_2\varphi_1 = {}^1/_2 \operatorname{arc\,tg}(y / p^2)$$

$$R_3 = \sqrt{R_1^2 \cos^2 {}^1/_2\varphi_1 + (ay + R_1 \sin {}^1/_2\varphi_1)^2}$$

$$\theta_2 = \operatorname{arc\,tg} \frac{a\sqrt{{}^1/_2 y}}{1 + a\sqrt{{}^1/_2 y}}, \qquad \theta_3 = \operatorname{arc\,tg}[(ay + R_1 \sin\theta_1) / (R_1 \cos\theta_1)]$$

Итак, по второму методу внутренний интеграл (37) равен сумме правых частей равенств (45) и (46).

Окончательное выражение для действительного поля температур пласта для условия (13) при учете (12) имеет вид

$$T_2 = T_0 - \frac{b}{\pi} \int_0^\infty p \left\{ \int_{p^2}^\infty e^A \sin B \frac{dR}{R} - \int_{|s_1|}^{p^2} e^C \sin D \frac{dR}{R} + \right. \tag{48}$$

$$\left. + \int_0^{|s_1|} e^E \sin F \frac{dR}{R} + \frac{\pi}{|p|} \exp\left[-(b + z - h)\right] \right\} J_0(rp)\, dp \tag{49}$$

Если в (49) положить $z = h$, найдем поле температур в слое воды ($-h \leqslant z \leqslant h$). Если вместо условия (14) взять условие (1.3), то можно применить принцип Дюгамеля [13]. Именно, если T_2 — температура, найденная для случая, когда краевая температура равна единице, т. е. определенная формулой (49), то при краевой температуре $\psi(t)$ температура T_2^* запишется в виде

$$T_2^* = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \psi(t - \tau)\, T_2(\tau)\, d\tau = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \psi(\tau)\, T_2(t - \tau)\, d\tau \tag{50}$$

Может оказаться необходимым закачивать в скважину сначала жидкость одной температуры

$$T_1 = T_1^* = \text{const} \quad \text{при} = 0,\ z = h, \qquad 0 < t < t_0$$

а затем при $t \geqslant t_0$ закачивать жидкость другой температуры [4,9]

$$T_1 = T_1^{**} \quad \text{при } r = 0, \qquad z = h$$

Тогда для $0 \leqslant t < t_0$ температура $T_2(r, z, t)$ будет представлена формулами (49), (50), а температура $T_2^*(r, z, t)$ представится формулой [9]

$$T_2^* = T_2(r, z, t) - T_2(r, z, t - t_0) \tag{51}$$

Полагая здесь $z = h$, найдем поле температур в зоне воды.

Поступила 5 I 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Беляков М. Ф. Влияние искусственного заводнения на термальный режим нефтяного месторождения. Докл. АН СССР, 1949, т. 66, № 3.
2. Тагиев Ш. М. Влияние закачиваемой воды на температуру пласта. Азерб. нефтяное хозяйство, 1960, № 9.
3. Чарный И. А. Нагревание призабойной зоны при закачке горячей жидкости в скважину. Нефтяное хозяйство, 1953, № 2—3.
4. Чекалюк Э. Б., Степанчиков К. А., Оганов К. А., Снарский А. Н. Тепловая обработка истощенного нефтяного пласта. Нефтяное хозяйство, 1954, № 1—2.
5. Чекалюк Э. Б. Температурное поле пласта при инъекции теплоносителя в скважине. Нефтяное хозяйство, 1955, № 4.
6. Рубинштейн Л. И. О температурном поле пласта при нагнетании в пласт горячего теплоносителя. Сб. Тр. Уфимск. нефт. ин-та, 1958, вып. II.
7. Дахнов В. Н., Дьяконов Д. И. Термические исследования скважин. Гостоптехиздат, 1952.
8. Рубинштейн Л. И. Об одной контактной термоконвективной задаче. Докл. АН СССР, 1960, т. 135, № 4.
9. Рубинштейн Л. И. О температурном поле пласта при тепловой инъекции. Тр. по теории фильтрации и гидродинамики нефтяного пласта. Изд. Казанск. ун-та, 1961.
10. Малофеев Г. Е. Экспериментальное изучение нагрева пласта при закачке горячей воды. Нефть и газ, 1958, № 12; 1959, № 5, 9; 1960, № 7.
11. Lauverier H. A. The Transport of Heat in an Oil Layer Caused by the Injection of Hot Fluid. Appl. Sci. Res. Sec. A., 1955, vol. 5, No 2 — 3.
12. Снеддон И. Преобразования Фурье. ИЛ, 1955.
13. Лыков А. В. Теория теплопроводности. Гостехтеоретиздат, 1952.
14. Рыжик И. М., Градштейн И. С. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. Гостехтеоретиздат, М. – Л., 1951.