УДК 532.51

ВОЛНЫ НА СТЕКАЮЩИХ ПЛЕНКАХ ЖИДКОСТИ. РАСЧЕТ УСТОЙЧИВОСТИ К ПРОИЗВОЛЬНЫМ ДВУМЕРНЫМ ВОЗМУЩЕНИЯМ И “ОПТИМАЛЬНЫЕ” РЕЖИМЫ СТЕКАНИЯ

Ю. Я. Трифонов

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск 630090
E-mail: trifonov@itp.nsc.ru

Исследовано волновое стекание вязких пленок жидкости. С использованием полных уравнений Навье — Стокса вычислены гидродинамические характеристики течения. В рамках теории Флоке рассмотрена устойчивость рассчитанных нелинейных волн к произвольным двумерным возмущениям. Показано, что при малых значениях числа Капицы волны устойчивы в широком диапазоне значений длины волны и числа Рейнольдса. Установлено, что с увеличением значения числа Капицы область параметров, в которой рассчитаны нелинейные волны, разбивается на ряд чередующихся зон устойчивых и неустойчивых решений. При больших значениях числа Капицы на плоскости параметров длина волны — число Рейнольдса выявлено большое количество узких зон, в которых решения устойчивы. Определены “оптимальные” режимы стекания пленок, которым соответствует минимальное значение средней толщины пленки для нелинейных волн с различной длиной волны. В широком диапазоне значений чисел Рейнольдса и Капицы вычислены основные характеристики этих волн.

Ключевые слова: вязкое течение пленок, нелинейные волны, устойчивость.

1. Введение и постановка задачи. Теоретические исследования пленочных течений начаты в работе [1], в которой получено точное решение уравнений Навье — Стокса в случае свободного стекания тонкого слоя вязкой жидкости по гладкой вертикальной стенке, и в работах [2, 3], где экспериментально и теоретически изучены различные волновые режимы стекания пленки. Большое количество работ посвящено как линейному, так и нелинейному анализу процесса волнообразования при свободном стекании пленки. Например, в [4–6] обнаружены различные волновые явления, возникающие при таком течении: пространственно-временная эволюция пленочных течений, переход двумерных волн в трехмерные, существование различных режимов стекания и т. д. Подробные обзоры работ, посвященных исследованию волн, возникающих на тонких пленках жидкости, представлены, например, в [7, 8]. Теоретические работы можно разделить на три группы: 1) исследования волновых явлений на основе одного эволюционного уравнения, полученного с использованием разложения по малому параметру длины волны ε; 2) исследования на основе интегрального подхода, начатые в работах [2, 9] и получившие развитие в последнее время (см. [8]); 3) расчеты с использованием полных уравнений Навье — Стокса (см. [10–16]). В работе [10] расчеты стационарно бегущих волн проводились с помощью метода конечных элементов. В работах [11, 12] данный метод применялся для исследования пространственно-временной эволюции различных начальных возмущений с использованием уравнений Навье — Стокса. В работах [13, 14] основное внимание уделяется изучению возвратных течений и течений с замкнутыми линиями тока при волновом стекании. В работах [15, 16] впервые для модели Навье — Стокса поставлена задача об устойчивости нелинейных волн. Расчеты проводились для периодических возмущений с той же длиной волны L, что и в исследуемом на устойчивость нелинейном решении (параметр Флоке $Q = 0$). В [16] показано, что на плоскости параметров $(\lambda_{neut}/L, \mathrm{Re}\,/\,\mathrm{Ka})$ (λ_{neut} — длина волны нейтрального возмущения; Re, Ka — числа Рейнольдса и Капицы) нелинейные решения уравнений Навье — Стокса в виде стационарно бегущих волн образуют сложную многоскладчатую и многолистную поверхность, структура которой существенно зависит от значения числа Капицы. При малых значениях λ_{neut}/L, $\mathrm{Ka} > 3$ существует несколько типов различных нелинейных волн для одного и того же набора параметров. Большинство этих решений являются неустойчивыми. Существует "верхний" лист поверхности, где волновые решения устойчивы относительно возмущений с таким же периодом ($Q = 0$), как и у самих решений.

Целью настоящей работы является исследование устойчивости нелинейных волн относительно произвольных двумерных возмущений $0 \leqslant Q < 1{,}0$ с использованием полных уравнений Навье — Стокса.

2. Основные уравнения. Стекание жидкой волновой пленки вдоль гладкой вертикальной плоскости описывается системой уравнений Навье — Стокса с соответствующими граничными условиями:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon\,\mathrm{Re}}\Big(3 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \varepsilon^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big); \tag{1}$$

$$\varepsilon^2\Big(\frac{\partial v}{\partial t} + u\,\frac{\partial v}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial y}\Big) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\varepsilon}{\mathrm{Re}}\Big(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \varepsilon^2\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\Big); \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \tag{3}$$

$$u = v = 0, \qquad y = 0; \tag{4}$$

$$\Big(\frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon^2\,\frac{\partial v}{\partial x}\Big)\Big(1 - \varepsilon^2\Big(\frac{\partial H}{\partial x}\Big)^2\Big) + 4\varepsilon^2\,\frac{\partial v}{\partial y}\,\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \qquad y = H(x,t); \tag{5}$$

$$v = \frac{\partial H}{\partial t} + u\,\frac{\partial H}{\partial x}, \qquad y = H(x,t); \tag{6}$$

$$P - \frac{2\varepsilon}{\mathrm{Re}}\,\frac{\partial v}{\partial y}\,\frac{1 + \varepsilon^2(\partial H/\partial x)^2}{1 - \varepsilon^2(\partial H/\partial x)^2} + \mathrm{We}\,\frac{\varepsilon^2\,\partial^2 H/\partial x^2}{[1 + \varepsilon^2(\partial H/\partial x)^2]^{3/2}} = 0, \qquad y = H(x,t). \tag{7}$$

Здесь u, v — компоненты вектора скорости жидкости в направлении силы тяжести и вдоль оси y соответственно; P — давление в жидкости; $H(x,t)$ — толщина пленки; $\varepsilon = H_0/L$; H_0 — толщина пленки; We — число Вебера.

Уравнения (1)–(7) записаны в безразмерном виде. Безразмерные величины связаны с соответствующими размерными величинами (с верхним индексом "$*$") следующим образом:

$$x = \frac{x^*}{L}, \quad t = \frac{u_0 t^*}{L}, \quad y = \frac{y^*}{H_0}, \quad u = \frac{u^*}{u_0}, \quad v = \frac{v^*}{\varepsilon u_0}, \quad P = \frac{P^*}{\rho u_0^2}, \quad H = \frac{H^*}{H_0},$$

$$H_0 \equiv \Big(\frac{3\nu^2\,\mathrm{Re}}{g}\Big)^{1/3}, \quad u_0 \equiv \Big(\frac{g\nu\,\mathrm{Re}^2}{3}\Big)^{1/3}, \quad \varepsilon = \frac{H_0}{L}, \quad \mathrm{We} = \frac{(3\,\mathrm{Fi})^{1/3}}{\mathrm{Re}^{5/3}}, \quad \mathrm{Fi} = \frac{(\sigma/\rho)^3}{g\nu^4}.$$

Здесь ν — кинематическая вязкость жидкости; ρ — плотность жидкости; σ — поверхностное натяжение; L — период волны; Fi — пленочное число; u_0 — скорость пленки; Re — число Рейнольдса в жидкости.

Уравнения (1)–(3) представляют собой законы сохранения импульса и массы для жидкости соответственно, уравнение (4) — условие прилипания на стенке, уравнения (5), (7) — условия равенства касательных и нормальных сил на поверхности раздела соответственно, уравнение (6) — кинематическое условие.

В данной работе рассматриваются стационарно бегущие волны ($H(\xi)$, $u(\xi, y)$, $v(\xi, y)$, $P(\xi, y)$). Здесь $\xi \equiv x - ct$; c — фазовая скорость. Форма свободной поверхности заранее неизвестна, поэтому используем преобразование координат $\eta = y/H$, определяющее область течения $\xi \in [0, 1]$, $\eta \in [0, 1]$. Для построения стационарных решений уравнений (1)–(7) применим спектральный метод:

$$u(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\,U_1(\xi) + \sum_{m=2}^{M} U_m(\xi) T_{m-1}(\eta_1), \qquad \eta_1 = 2\eta - 1,$$

$$U_m(\xi) = U_m^0 + \sum_{\substack{k=-N/2+1\\ k\neq 0}}^{N/2-1} U_m^k \exp{(2\pi i k\xi)}, \qquad (U_m^{-k})^* = U_m^k, \qquad m = 1,\dots,M,$$

$$H(\xi) = H^0 + \sum_{\substack{k=-N/2+1\\ k\neq 0}}^{N/2-1} H^k \exp{(2\pi i k\xi)}, \qquad (H^{-k})^* = H^k.$$

Здесь $T_m(\eta_1)$ — полиномы Чебышева; верхний индекс “$*$” означает комплексное сопряжение. Для реализации численного алгоритма задаются начальные приближения для гармоник U_m^k, H^k и для значения фазовой скорости c. В исходных уравнениях существует симметрия относительно сдвига продольной координаты: $\xi \to \xi + \mathrm{const}$. Вследствие этого фазу одной из гармоник в разложении толщины пленки можно считать известной (например, $\mathrm{Real}\,(H^1) = 0$). Вместо нее при решении системы алгебраических уравнений рассчитывается величина фазовой скорости c. Для улучшения начального приближения для неизвестных U_m^k, H^k, c используется итерационный метод Ньютона. В ходе расчетов, варьируя общее количество гармоник N и M, необходимо выполнить следующие условия аппроксимации функции $u(x,\eta)$: $|U_m^{N/2-1}|/\sup|U_m^k| < 10^{-3}$ для всех m и $|U_M^k|/\sup|U_m^k| < 10^{-3}$ для всех k.

Подставляя в уравнения (1)–(7) выражения

$$u(\xi,\eta,t) = u(\xi,\eta) + \hat{u}(\xi,\eta)\exp{(-\lambda t)} + \text{к.с.},$$

$$v(\xi,\eta,t) = v(\xi,\eta) + \hat{v}(\xi,\eta)\exp{(-\lambda t)} + \text{к.с.},$$

$$P(\xi,\eta,t) = P(\xi,\eta) + \hat{P}(\xi,\eta)\exp{(-\lambda t)} + \text{к.с.},$$

$$H(\xi,t) = u(\xi) + \hat{H}(\xi)\exp{(-\lambda t)} + \text{к.с.},$$

(к.с. — комплексно-сопряженная к возмущению величина) и линеаризуя эти уравнения, получаем систему уравнений на собственные значения с периодическими по координате ξ коэффициентами. Эти коэффициенты являются вещественными и выражаются через найденные решения в виде стационарно бегущих волн [15]. В соответствии с общей теорией Флоке решения указанной линейной системы уравнений представляются в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} \hat{H} \\ \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{n=-N/2+1}^{n=N/2-1} \hat{H}_n \exp(2\pi i n\xi) \\ \frac{1}{2}\sum\limits_{n=-N/2+1}^{n=N/2-1} \hat{u}_{1n} \exp(2\pi i n\xi) + \sum\limits_{m=2}^{M} T_{m-1}(2\eta-1) \sum\limits_{n=-N/2+1}^{n=N/2-1} \hat{u}_{mn} \exp(2\pi i n\xi) \\ \frac{1}{2}\sum\limits_{n=-N/2+1}^{n=N/2-1} \hat{v}_{1n} \exp(2\pi i n\xi) + \sum\limits_{m=2}^{M} T_{m-1}(2\eta-1) \sum\limits_{n=-N/2+1}^{n=N/2-1} \hat{v}_{mn} \exp(2\pi i n\xi) \\ \frac{1}{2}\sum\limits_{n=-N/2+1}^{n=N/2-1} \hat{P}_{1n} \exp(2\pi i n\xi) + \sum\limits_{m=2}^{M} T_{m-1}(2\eta-1) \sum\limits_{n=-N/2+1}^{n=N/2-1} \hat{P}_{mn} \exp(2\pi i n\xi) \end{pmatrix} \exp(2\pi i Q\xi).$$

Здесь $Q \in [0,1]$ — вещественный параметр. Вследствие вещественности коэффициентов этих уравнений достаточно рассмотреть спектр собственных значений в интервале $Q \in [0, 0{,}5]$. В результате задача сводится к обобщенной задаче на собственные значения для комплексных матриц общего вида $A\hat{x} = \lambda B\hat{x}$, $\hat{x} = (\hat{H}_n, \hat{u}_{mn}, \hat{v}_{mn}, \hat{P}_{mn})^{\text{т}}$. Матрицы A и B имеют размерность $[(3M+1)(N-1), (3M+1)(N-1)]$, и их элементы определяются численно путем перебора единичных векторов возмущений. Для каждого вектора рассчитывалась невязка линеаризованных уравнений (подробнее об этом см. [15]) и определялись элементы соответствующих столбцов матриц A и B. Для получения ответа на вопрос об устойчивости стационарного решения необходимо проанализировать $(3M+1)(N-1)$ собственных чисел для каждого значения параметра Q. Решение устойчиво, если вещественные части всех собственных значений больше или равны нулю. Следует выделить возмущения с нулевым значением параметра Q. Такие возмущения имеют тот же период, что и исходное решение. Неустойчивость по отношению к данному классу возмущений означает невозможность реализации такого режима в эксперименте. Решения, неустойчивые по отношению к возмущениям с $Q \neq 0$, могут наблюдаться в эксперименте на определенных участках течения, когда возмущения не успели развиться или искусственно подавлены.

В уравнениях (1)–(7) имеется три параметра: ε, We (или Fi), Re. В дальнейших расчетах в качестве независимых параметров будем использовать величины λ_{neut}/L, Ka, Re / Ka (λ_{neut} — длина волны нейтрального возмущения; $\mathrm{Ka} \equiv \mathrm{Fi}^{1/11}$ — число Капицы). Длина волны нейтрального возмущения $\lambda_{neut} = H_0 f(\mathrm{Ka}, \mathrm{Re}/\mathrm{Ka})$ определяется при решении задачи линейной устойчивости течения с плоской поверхностью раздела [15, 16]. Безразмерный критерий ε в исходных уравнениях выражается через используемые в данной работе безразмерные параметры: $\varepsilon = H_0/L = (H_0/\lambda_{neut})(\lambda_{neut}/L)$.

В [10–12] при решении полных уравнений Навье — Стокса использовались другие наборы безразмерных критериев: в [10] — $(\mathrm{Re}_s, \mathrm{We}_s, \mu) \equiv (1{,}5\,\mathrm{Re}, \mathrm{Fi}^{1/3}/(3\,\mathrm{Re})^{2/3}, 2\pi H_0/L)$; в [11] — $(G, T, k) \equiv (3\,\mathrm{Re}, \mathrm{Fi}^{1/3}, 2\pi H_0/L)$; в [12] — Re, We, f (f — частота периодических колебаний, заданных на начальном участке). Выбор независимых параметров, осуществленный в данной работе, имеет ряд преимуществ. Выбор параметра λ_{neut}/L в качестве независимого позволяет корректно сравнить результаты расчетов с использованием различных интегральных и асимптотических моделей с результатами расчетов по уравнениям Навье — Стокса. Число Капицы Ka зависит только от физических свойств жидкости. В интегральных уравнениях Шкадова [9] при аналогичном выборе безразмерных величин

Значения числа Капицы, использованные в расчетах

$\mathrm{Ka} \equiv \mathrm{Fi}^{1/11}$	$\mathrm{Ka}_1 \equiv \mathrm{Fi}^{1/3}$
2,00	12,70
2,75	40,82
3,50	98,84
5,00	365,50
10,00	4642,00

остаются только два безразмерных критерия: $\lambda_{neut}^{\mathrm{Shk}}/L$ и $\mathrm{Re}\,/\,\mathrm{Ka}$ ($\lambda_{neut}^{\mathrm{Shk}}$ — длина волны нейтрального возмущения в модели Шкадова). При использовании модели Шкадова зависимости всех безразмерных величин (например, максимальной и минимальной толщин пленки, фазовой скорости волны и т. д.) от указанных двух критериев имеют один и тот же вид для всех жидкостей. В этом заключается преимущество выбора комплекса $\mathrm{Re}\,/\,\mathrm{Ka}$ в качестве безразмерного критерия при решении полных уравнений Навье — Стокса.

Следует отметить, что для получения решений в виде стационарно бегущих волн используется условие постоянства среднего расхода $\langle q\rangle = 1$. С учетом кинематического условия (6) и условия прилипания (4) в результате интегрирования уравнения неразрывности (3) получаем

$$q(\xi) - cH(\xi) = \mathrm{const} = \langle q\rangle - c\langle H\rangle = 1 - c\langle H\rangle, \qquad q(\xi) \equiv H(\xi)\int\limits_0^1 u\,d\eta.$$

Здесь $\langle\cdot\rangle$ — среднее по длине волны. В отличие от условия $\langle H\rangle = 1$ условие постоянства расхода $\langle q\rangle = 1$ лучше соответствует эксперименту, в котором в процессе пространственно-временной эволюции масса жидкости, втекающей в некоторый объем и вытекающей из него, сохраняется.

3. Результаты расчетов. Нелинейные решения в виде стационарно бегущих волн с длиной волны L ответвляются от решения Нуссельта вдоль нейтральной кривой $\lambda_{neut}/L = 1$. Эти решения и их устойчивость были исследованы в диапазоне параметров $0{,}15 < \lambda_{neut}/L < 1{,}00$, $\mathrm{Re}\,/\,\mathrm{Ka} \leqslant 10$ при пяти значениях числа Капицы. При решении использовался метод непрерывности, в котором значения параметров λ_{neut}/L, $\mathrm{Re}\,/\,\mathrm{Ka}$ менялись с небольшим шагом, и относительное изменение любого из этих параметров не превышало 5 %. Расчеты начинались в окрестности нейтральной кривой, где имеется начальное приближение — слабовозмущенное решение Нуссельта. В качестве параметра задавалась величина амплитуды первой фурье-гармоники в разложении толщины пленки. Длина волны была неизвестна, поэтому λ_{neut}/L рассчитывалась наряду с другими гармониками. Увеличение амплитуды первой фурье-гармоники соответствует продвижению вглубь области линейной неустойчивости. На достаточно большом расстоянии от нейтральной кривой длина волны вновь считалась параметром. В таблице приведены значения числа Капицы Ka, использованные в расчетах, и соответствующие им значения числа Капицы Ka_1, которые используются в ряде экспериментальных и теоретических работ. Значение $\mathrm{Ka} = 10$ близко к числу Капицы для воды. Остальные значения Ka в таблице соответствуют водоглицериновым растворам, которые использовались в экспериментах [5]. Для каждого нелинейного решения с длиной волны L рассчитан спектр собственных значений $\lambda(Q)$ при 12 значениях параметра Флоке $Q = 0;\ 0{,}01;\ 0{,}05;\ 0{,}10;\ \ldots;\ 0{,}50$. Расчет был проведен для значений параметра $\mathrm{Re}\,/\,\mathrm{Ka}$ в интервале $0{,}1 < \mathrm{Re}\,/\,\mathrm{Ka} < 10{,}0$, шаг относительного изменения параметра λ_{neut}/L составлял $0{,}5 \div 5{,}0$ %.

На рис. 1,*а*,*б* и рис. 2,*а* представлены результаты исследования устойчивости решения при малом значении числа Капицы $\mathrm{Ka} = 2$. На рис. 1 при смене устойчивости зна-

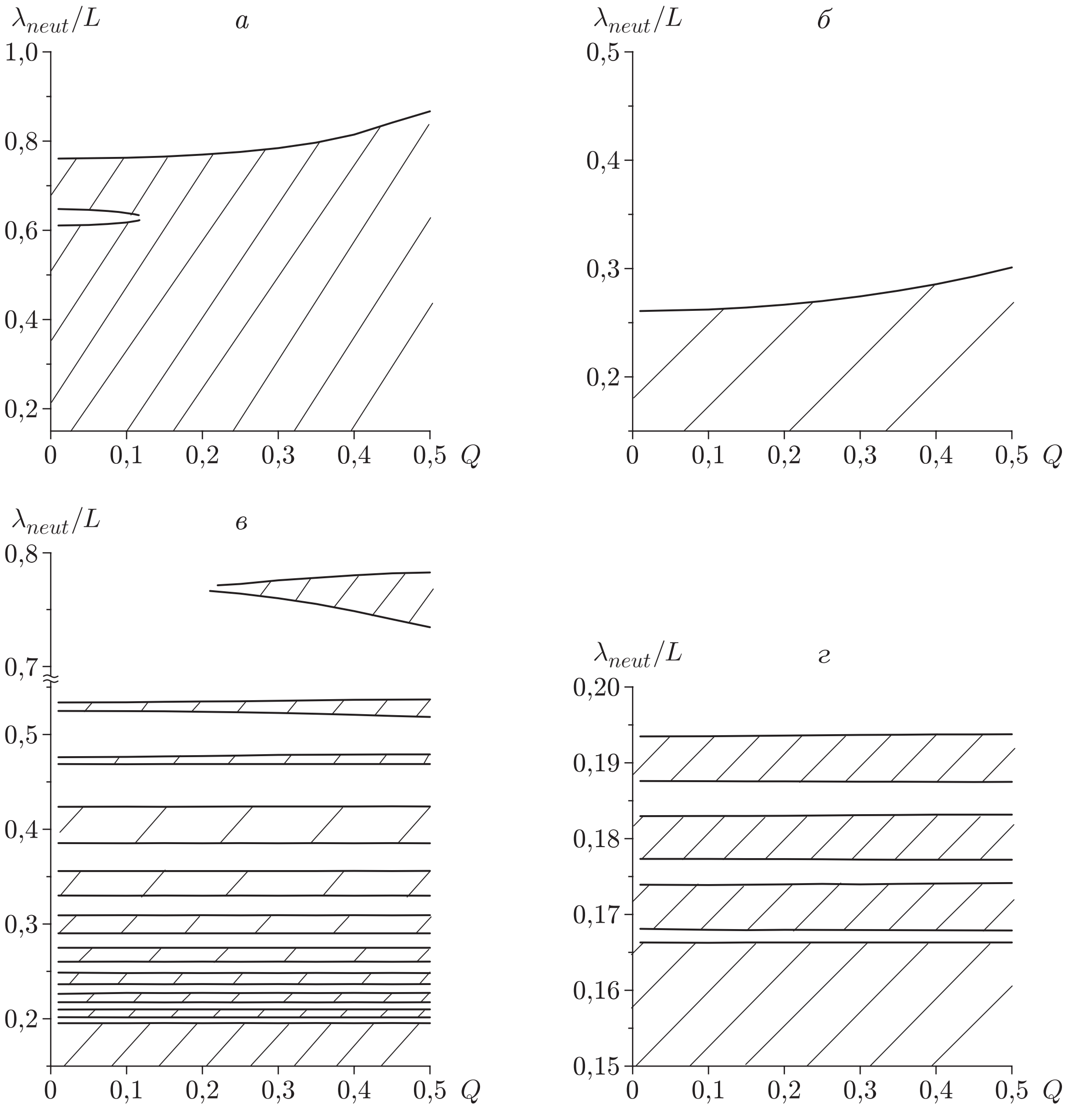


Рис. 1. Области устойчивости (заштрихованные) нелинейных решений с длиной волны L относительно двумерных возмущений при различных значениях Ka, Re / Ka:

а, б — $\mathrm{Ka} = 2$ (*а* — $\mathrm{Re/Ka} = 0{,}4$, *б* — $\mathrm{Re/Ka} = 10$); *в, г* — $\mathrm{Ka} = 3{,}5$ (*в* — $\mathrm{Re/Ka} = 0{,}8$, *г* — $\mathrm{Re/Ka} = 10$)

чение вещественной части пары комплексно-сопряженных собственных значений меняет знак. Из рис. 1 следует, что наиболее узким является диапазон значений λ_{neut}/L, в котором решение устойчиво относительно возмущений с малыми значениями Q (например, $Q = 0{,}01$). Если нелинейное решение устойчиво относительно возмущений с $Q = 0{,}01$, то оно устойчиво относительно всех двумерных возмущений с различными значениями параметра Флоке Q. Проведенные расчеты показали, что этот вывод справедлив при всех значениях параметров Ka, L, Re / Ka, рассмотренных в данной работе. Это позволило построить зоны устойчивости (см. рис. 2). При малом значении числа Капицы $\mathrm{Ka} = 2$ (см. рис. 2,*а*) имеется одна зона параметров, в которой решения устойчивы относительно всех двумерных возмущений (ниже линии *1*). На линии *1*$''$ ($Q = 0$) вещественная часть одного из комплексных собственных значений меняет знак, при этом нелинейные решения с дли-

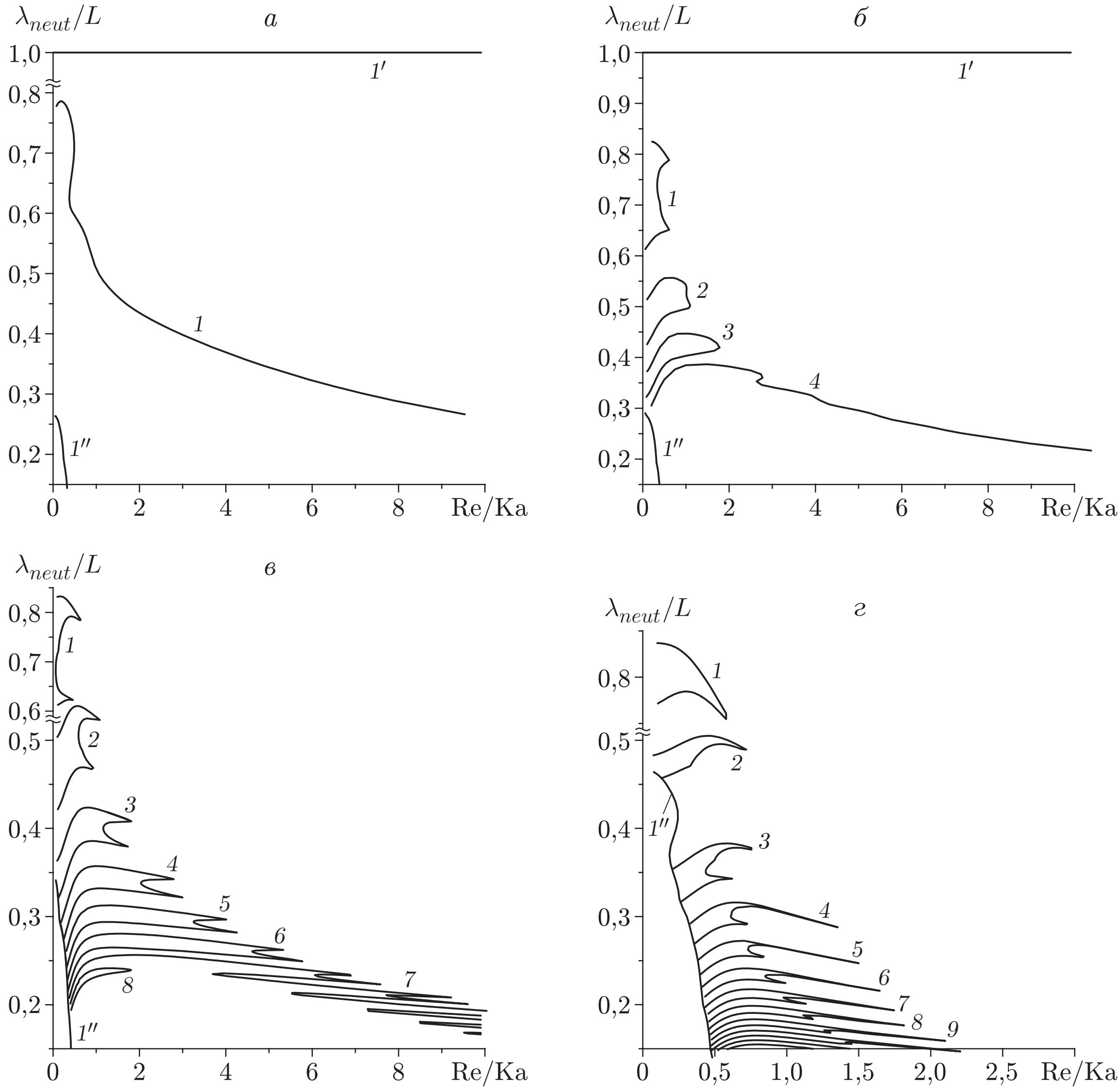


Рис. 2. Области устойчивости и неустойчивости решений при различных значениях Ka:

а — Ka = 2, *б* — Ka = 2,75, *в* — Ka = 3,5 (в области, ограниченной линиями *8* и $1''$, решения неустойчивы), *г* — Ka = 10; области, ограниченные линиями *1*–*9* и $1''$, — области устойчивости нелинейных решений относительно произвольных двумерных возмущений; $1'$ — нейтральная кривая $\lambda_{neut}/L = 1$ для решения Нуссельта

ной волны L становятся неустойчивыми относительно периодических возмущений с тем же периодом L. Заметим, что при $Q = 0$ вследствие периодичности решения в спектре собственных значений всегда имеется одно нулевое собственное значение, поэтому диапазон параметров, в котором решения устойчивы относительно возмущений с $Q = 0$ (выше линии $1''$ и ниже линии $1'$ на рис. 2), значительно шире диапазона параметров, в котором решения устойчивы относительно произвольных двумерных возмущений.

С увеличением значения числа Капицы область устойчивости решений относительно произвольных двумерных возмущений (единственная при Ka = 2) распадается на несколько зон. При значениях числа Капицы Ka $\leqslant$ 3,5 все длинные волны лежат в одной из зон устойчивости, форма границы которой становится более сложной с увеличением значе-

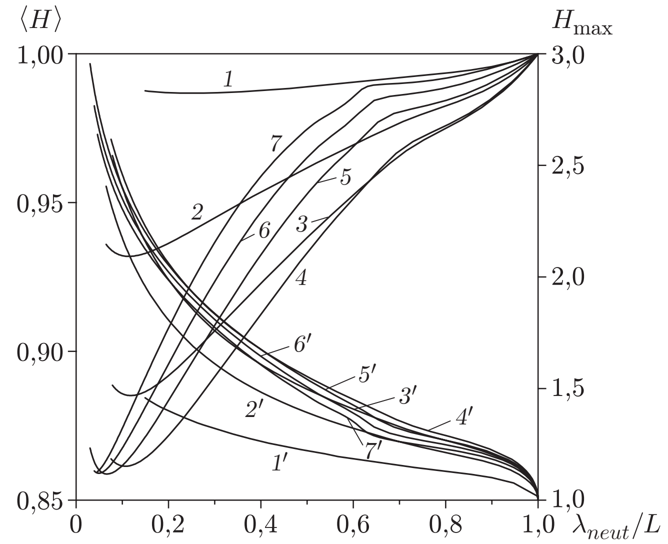


Рис. 3. Зависимости средней (*1–7*) и максимальной (*1′–7′*) толщин волновой пленки от длины волны при Ka = 2:
1, *1′* — Re / Ka = 0,4; *2*, *2′* — Re / Ka = 0,8; *3*, *3′* — Re / Ka = 1,5; *4*, *4′* — Re / Ka = 3; *5*, *5′* — Re / Ka = 6; *6*, *6′* — Re / Ka = 8; *7*, *7′* — Re / Ka = 10

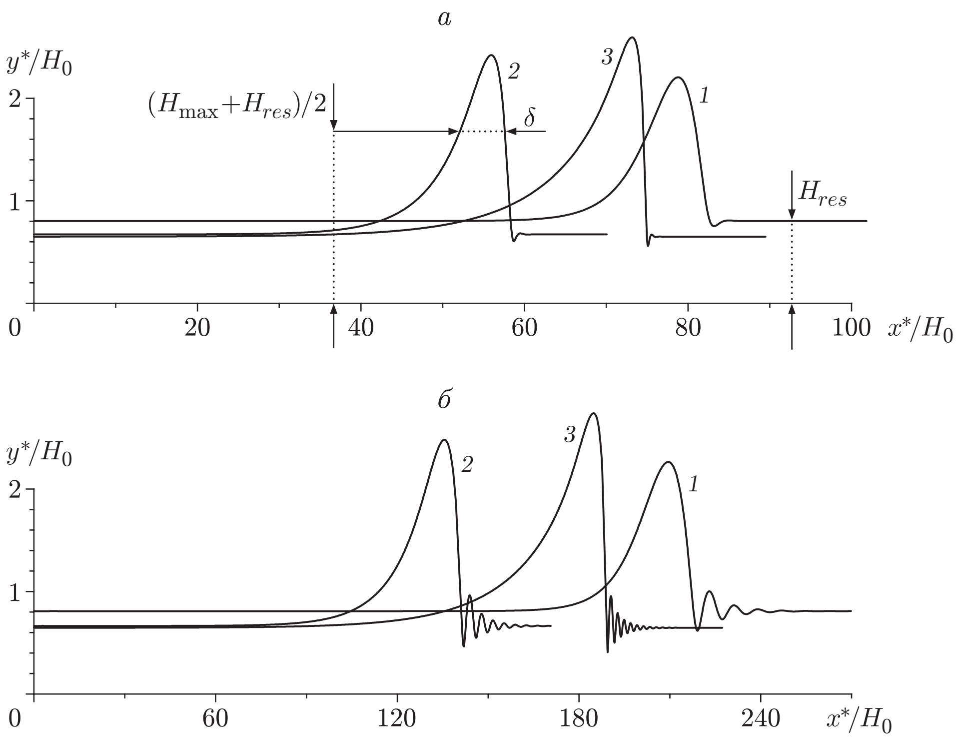
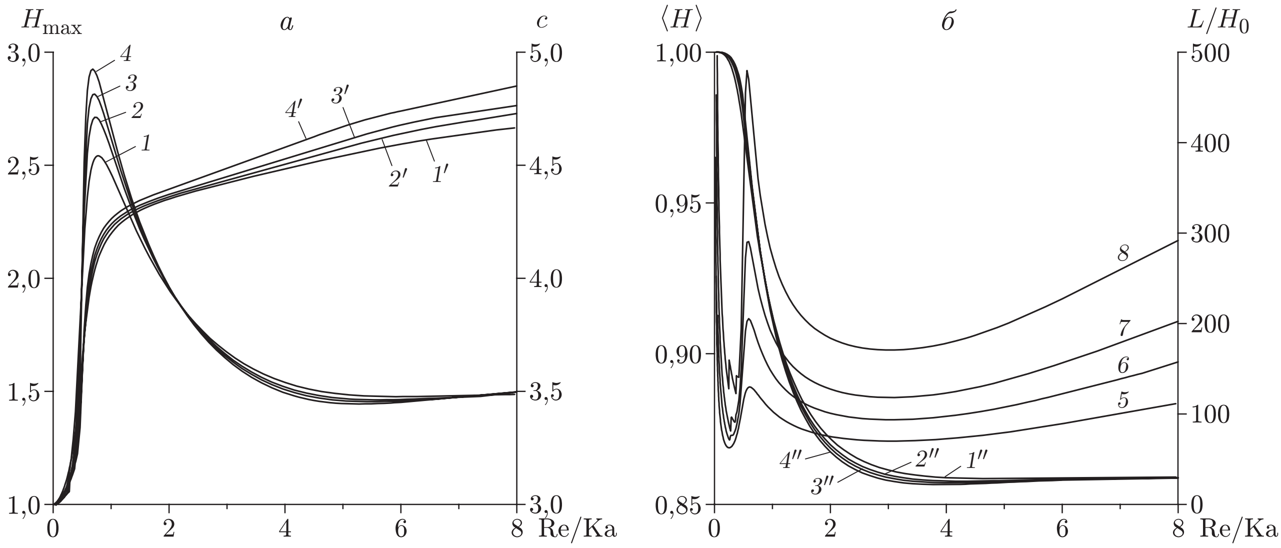


Рис. 4. Профили толщины для оптимальных волн:
а — Ka = 2, *б* — Ka = 5; *1* — Re / Ka = 1, *2* — Re / Ka = 3, *3* — Re / Ka = 6



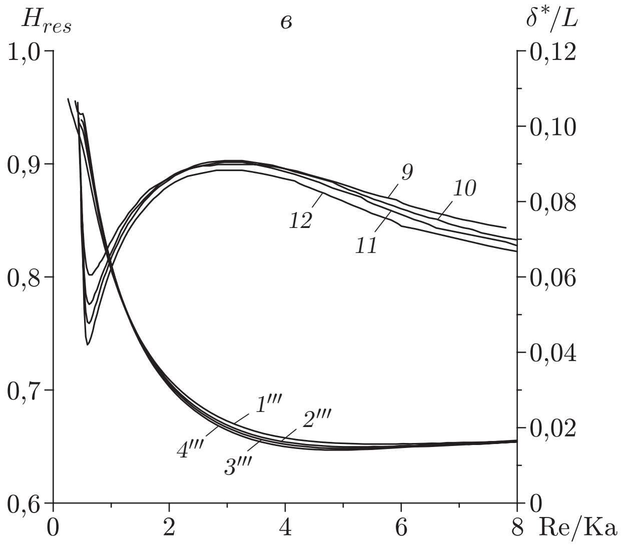


Рис. 5. Зависимости максимальной толщины оптимальной волны (*1′–4′*), средней толщины оптимальной волны (*1″–4″*), толщины остаточного слоя (*1‴–4‴*), фазовой скорости оптимальной волны (*1–4*), отношения L/H_0 (*5–8*) и отношения δ^*/L (*9–12*) от значений комплекса Re / Ka:
1′, 1″, 1‴, 1, 5, 9 — Ka = 2; *2′, 2″, 2‴, 2, 6, 10* — Ka = 2,75; *3′, 3″, 3‴, 3, 7, 11* — Ka = 3,5; *4′, 4″, 4‴, 4, 8, 12* — Ka = 5

ния Ka. При больших значениях числа Капицы (см. рис. 2,*г*) имеется большое количество узких зон устойчивости. При Ka = 3,5 (см. рис. 1,*в*) одно из собственных значений λ_i в спектре $\lambda(Q)$ “колеблется” в окрестности нуля при уменьшении λ_{neut}/L. Это приводит к возникновению чередующихся зон устойчивости и неустойчивости нелинейных решений. Амплитуда “колебаний” уменьшается. (При $|\,\mathrm{Real}\,(\lambda_i)| < 10^{-8}$ границы зон устойчивости и неустойчивости на рис. 1,*в* не показаны.)

На рис. 3 приведены зависимости основных характеристик нелинейных волн от волнового числа при малом значении числа Капицы. При Ka = 2 волны, ответвляющиеся от решения Нуссельта, представляют собой последовательность “волн-возвышений” (рис. 4,*а*) при всех рассмотренных значениях Re / Ka. На рис. 3 зависимость средней толщины $\langle H\rangle$ от параметра λ_{neut}/L имеет четко выраженный минимум в области длинных волн. Нелинейное решение, соответствующее этому минимуму, далее будем называть оптимальным. Следует отметить, что при уменьшении волнового числа максимальное значение толщины пленки увеличивается при всех рассмотренных значениях Re / Ka. Аналогичные зависимости построены при других значениях числа Капицы в широком диапазоне значений Re / Ka

($0{,}1 < \mathrm{Re}\,/\,\mathrm{Ka} < 10{,}0$). При всех рассмотренных значениях Ka и Re / Ka в области длинных волн имеется четко выраженный минимум зависимости $\langle H\rangle(\lambda_{neut}/L)$. На рис. 4 приведены профили толщины оптимальных волн для двух значений числа Капицы (H_{res} — толщина остаточного слоя, δ — характерная ширина "горба").

На рис. 5 приведены зависимости основных характеристик оптимальных волн от параметра Re / Ka при различных значениях числа Капицы (c — фазовая скорость волны, L — размерная длина волны для оптимального решения или размерное расстояние между "горбами"; δ^* — размерная ширина "горба"). Следует отметить, что зависимости $L/H_0(\mathrm{Re}\,/\,\mathrm{Ka})$ (линии *5–8* на рис. 5,*б*) имеют сложный характер и значительно различаются, особенно при больших значениях Re / Ka. Значения средней толщины пленки (линии *1″–4″* на рис. 5,*б*) и остаточной толщины (линии *1‴–4‴* на рис. 5,*в*) существенно зависят от параметра Re / Ka и достаточно слабо — от числа Капицы. Этот вывод справедлив и для зависимостей фазовой скорости волны $c(\mathrm{Re}\,/\,\mathrm{Ka})$ на рис. 5,*а*. Максимальная толщина пленки (линии *1′–4′* на рис. 5,*а*) и ширина "горба" $\delta^*(\mathrm{Re}\,/\,\mathrm{Ka})$ более чувствительны к изменению числа Капицы по сравнению с фазовой скоростью.

Заключение. При малых значениях числа Капицы ($\mathrm{Ka} = 2$) определен широкий диапазон параметров λ_{neut}/L, Re / Ka, для которых нелинейные решения устойчивы относительно произвольных двумерных возмущений. С увеличением значения числа Капицы в диапазоне малых длин волн область устойчивости решений относительно произвольных возмущений распадается на несколько зон, а в диапазоне "длинных" волн граница такой области устойчивости принимает сложную форму. При больших значениях числа Капицы ($\mathrm{Ka} > 5$) область рассмотренных длин волн $\lambda_{neut}/L > 0{,}15$ распадается на узкие зоны, в которых нелинейные решения устойчивы и неустойчивы относительно произвольных двумерных возмущений.

Установлено, что при всех значениях параметров Ka и Re / Ka, рассмотренных в работе, среди нелинейных решений при различных длинах волн существует оптимальное решение, при котором средняя толщина пленки имеет минимальное значение. В отличие от оптимальных волн Шкадова [9] и волн, рассмотренных в [16], найденные оптимальные решения представляют собой последовательность уединенных "волн-возвышений", движущихся по остаточному слою. Амплитуда этих волн значительно больше амплитуды волн в решениях, полученных в [16]. В широком диапазоне значений чисел Рейнольдса и Капицы вычислены основные характеристики оптимальных волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Nusselt W.** Die Oberflächenkondensation des Wasserdampfes // Z. VDI. 1916. Bd 60. S. 541–546.
2. **Капица П. Л.** Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости. 1. Свободное течение // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1948. Т. 18, вып. 1. С. 3–28.
3. **Капица П. Л., Капица С. П.** Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости. 3. Опытное изучение волнового режима течения // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1949. Т. 19, вып. 2. С. 105–120.
4. **Chu K. I., Dukler A. E.** Statistical characteristics of thin, wavy films. 2. Studies of the substrate and its wave structure // AIChE J. 1974. V. 20. P. 695–706.
5. **Alekseenko S. V., Nakoryakov V. E., Pokusaev B. G.** Wave formation on a vertical falling liquid film // AIChE J. 1985. V. 31. P. 1446–1460.
6. **Liu J., Paul J. D., Gollub J. P.** Measurements of the primary instabilities of film flow // J. Fluid Mech. 1993. V. 250. P. 69–101.
7. **Chang H.-C.** Complex wave dynamics on thin films / H.-C. Chang, E. A. Demekhin. N. Y.: Elsevier, 2002.

8. **Kalliadasis S.** Falling liquid films / S. Kalliadasis, C. Ruyer-Quil, B. Scheid, M. G. Velarde. L.: Springer, 2012. (Appl. Math. Sci.; V. 176).
9. **Шкадов В. Я.** Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1967. № 1. С. 43–51.
10. **Salamon T. R., Armstrong R. C., Brown R. A.** Traveling waves on inclined films: numerical analysis by the finite-element method // Phys. Fluids. 1994. V. 6. P. 2202–2220.
11. **Ramaswamy B., Chippada S., Joo S. W.** A full-scale numerical study of interfacial instabilities in thin-film flows // J. Fluid Mech. 1996. V. 325. P. 163–194.
12. **Malamataris N. T., Vlachogiannis M., Bontozoglou V.** Solitary waves on inclined films: Flow structure and binary interactions // Phys. Fluids. 2002. V. 14. P. 1143–1154.
13. **Malamataris N. T., Balakotaiah V.** Flow structure underneath the large amplitude waves of a vertically falling film // AIChE J. 2008. V. 54. P. 1725–1740.
14. **Dietze G. F., Leefken A., Kneer R.** Investigation of the backflow phenomenon in falling liquid films // J. Fluid Mech. 2008. V. 595. P. 435–459.
15. **Трифонов Ю. Я.** Расчет устойчивости волнового стекания пленок с использованием уравнений Навье — Стокса // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 2. С. 98–112.
16. **Trifonov Y.** Stability and bifurcations of the wavy film flow down a vertical plate: the results of integral approaches and full-scale computations // Fluid Dynam. Res. 2012. V. 44. 031418.

Поступила в редакцию 14/VIII 2013 г.,
в окончательном варианте — 19/IX 2013 г.