

УДК 532.72

Динамика роста газового пузырька в высоковязкой газонасыщенной жидкости при ее декомпрессии с конечной скоростью*

А.А. Чернов^{1,2}, М.Н. Давыдов^{1,3}, А.А. Пильник^{1,2}

¹Новосибирский государственный университет

²Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

³Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

E-mail: chernov@itp.nsc.ru

В работе исследуется динамика роста газового пузырька в высоковязкой газонасыщенной жидкости (магматическом расплаве), подвергшейся декомпрессии. Предложена математическая модель процесса, представляющая собой совместную динамическую и диффузионную задачу. Найдено приближенное полуаналитическое решение, основанное на существовании квазистационарного состояния для процесса роста пузырька. Показано влияние тех или иных факторов на рассматриваемый процесс на всех его стадиях. В частности, проиллюстрирована существенная зависимость скорости роста пузырька от скорости декомпрессии. Показано, что на больших временах рост пузырька имеет автомодельный характер и происходит только в результате десорбции газа из окружающей его жидкости.

Ключевые слова: газонасыщенная жидкость, газовый пузырек, декомпрессия, дегазация, краевая задача с подвижной границей, численное моделирование, магматический расплав.

Введение

Уже несколько десятилетий внимание исследователей направлено на изучение проблемы вулканических извержений. Это, прежде всего, связано с необходимостью прогноза и определения степени потенциальной опасности конкретных вулканов. Очевидно, что даже непрерывное наблюдение за активным вулканом не может дать достаточно полной информации о том, что происходит в канале вулкана при извержении, в силу отсутствия прямых методов наблюдения за процессами, происходящими в земной коре. Кроме того, начало самого извержения современными методами диагностики может быть предсказано только по косвенным признакам. Можно лишь с уверенностью констатировать факты фазовых переходов по конечным образцам затвердевшей магмы и наличие разрушений изначально сплошного магматического потока по структуре выброса. Поэтому последовательное и как можно более строгое построение моделей течения

* Работа поддержана Российским научным фондом (проект No 22–19–00092).

магмы в канале вулкана, исследование динамики различных режимов вулканических извержений методами механики многофазных сред с целью понимания механизмов, определяющих тип и характер извержения, а также интерпретации данных полевых наблюдений представляются актуальными. В теоретических и экспериментальных постановках по моделированию вулканических извержений прежде всего следует обратить внимание на следующие проблемы: особенность формирования трехфазного состояния магмы при ее декомпрессии; эволюцию структуры магмы при ее подъеме по каналу вулкана; динамику разрушения вспененной и частично закристаллизованной магмы (процесс фрагментации с образованием газовзвеси); влияние реологии магмы на структуру потока и общую динамику извержения в целом. Надо отметить, что все эти задачи чрезвычайно сложны для теоретического и экспериментального исследований и каждая из них представляет отдельную проблему.

На данный момент существует множество работ, посвященных экспериментальному и математическому моделированию вулканических извержений как в общей постановке, так и отдельно некоторых сопутствующих им явлений. Ключевым из них является процесс кавитации магмы, во многом предопределяющий структуру формирующегося двухфазного потока [1]. Надо отметить, что исследование кавитационных процессов в жидкостях имеет более чем столетнюю историю. Достаточно полное описание моделей роста паровых и газовых пузырьков в различного рода метастабильных средах можно найти в классической монографии [2]. Несмотря на то, что данные вопросы довольно хорошо проработаны, описание роста газовых пузырьков в магматических расплавах все же имеет свою специфику. Это прежде всего связано с уникальными физико-химическими свойствами магм и в первую очередь с их высокой вязкостью, которая в процессе дегазации может меняться на порядки, что накладывает определенные ограничения на применимость тех или иных (как правило, равновесных) моделей и требует дальнейшего изучения.

С некоторого времени процессами нуклеации и роста газовых пузырьков в магматических расплавах вплотную заинтересовались геофизики, начало их исследованиям положила работа [3]. Не претендуя на какую-либо полноту обзора, отметим лишь некоторые публикации, в которых, на наш взгляд, были представлены новые интересные результаты. К ним относятся работы [4–6]. В основном они связаны с численным моделированием. Аналитическое решение, найденное в работе [6], справедливо лишь для небольших пересыщений, что не свойственно реальным вулканическим процессам. В более ранних работах авторов [1, 7] было представлено моделирование нуклеации и роста пузырьков в широком диапазоне пересыщений для случая мгновенной декомпрессии. Настоящая работа посвящена исследованию роста газового пузырька при постепенном создании пересыщенного состояния.

1. Модель процесса

Рассмотрим объем газонасыщенного магматического расплава, который в начальный момент времени подвергается быстрой декомпрессии. Конечное давление при этом будем считать фиксированным. Пусть в объеме расплава в результате декомпрессии начинает расти газовый пузырек. Его рост обусловлен как динамическими, так и десорбционными процессами и может быть условно разделен на три стадии [7]. Первой из них, достаточно скоротечной, является динамическая инерционная. На данной стадии давление в пузырьке практически равно начальному, а зависимость радиуса пузырька от времени имеет экспоненциальный характер. Следующая стадия — переходная. Она

характеризуется выравниванием давления в пузырьке с давлением окружающей жидкости, в результате чего вокруг пузырька в жидкости формируется градиент массовой доли растворенного газа, что приводит к диффузии газа в жидкости и, соответственно, к десорбции газа на межфазной поверхности. После того, как давление газа в пузырьке практически выравнивается с давлением окружающей жидкости, начинается асимптотическая диффузионная стадия, на которой рост пузырька обусловлен исключительно диффузией. На этой стадии, в случае если давление в жидкости постоянно, радиус пузырька пропорционален квадратному корню из времени. Аналогичным образом происходит рост парового пузырька, только вместо диффузии определяющим здесь является процесс теплопередачи [8, 9].

Процесс декомпрессии характеризуется не только начальным и конечным давлениями, но и скоростью декомпрессии. И если декомпрессия осуществляется на временах, много меньших характерного времени роста пузырька, может иметь место мгновенное возникновение пересыщенного состояния. В этом случае рост пузырька может быть описан моделью, разработанной в работе [7]. Если же декомпрессия осуществляется на временах, сопоставимых или много больших характерного времени роста пузырька, то имеет место постепенное создание пересыщенного состояния. Здесь сразу же возникает вопрос: что следует понимать под характерным временем роста пузырька, ведь его рост в большом объеме жидкости ничем не ограничен? Представляется наиболее логичным за это время принять характерное время «выхода» на асимптотическую (диффузионную) стадию роста (см. ниже).

Известную сложность представляет описание процесса дегазации магматических расплавов, что связано с некоторыми их уникальными физико-химическими свойствами. Среди них прежде всего следует отметить наличие в магме большой массы растворенных летучих компонентов, преимущественно воды, массовая доля которой в зависимости от глубины залегания очага вулкана может достигать 5–7 %. Массовая доля других газов, таких как двуокись углерода, сера и прочих, гораздо меньше массовой доли воды и в совокупности составляет менее 1 %. Еще одним свойством магмы, которое существенно отличает ее от других жидкостей, является высокая вязкость, которая к тому же в зависимости от массовой доли растворенных летучих компонентов изменяется в очень широком диапазоне значений: от 10^2 до 10^{12} Па·с. Последнюю аппроксимируют зависимостью аррениусовского типа [5]:

$$\eta(C) = \eta^* \exp \left\{ E_\eta^* (1 - k_\eta C) / (R_g T) \right\}, \quad (1)$$

где η — динамическая вязкость магматического расплава, C — массовая доля растворенного в расплаве газа, T — температура, R_g — универсальная газовая постоянная, η^* , E_η^* и k_η — эмпирические постоянные.

Следуя [1], запишем уравнение импульсов, описывающее эволюцию пузырька во времени:

$$\rho_l \left(R \ddot{R} + \frac{3}{2} \dot{R}^2 \right) = p_g - p_l - \frac{2\sigma}{R} - 4\hat{\eta} \frac{\dot{R}}{R}, \quad \hat{\eta} = 3R^3 \int_R^\infty \frac{\eta(r)}{r^4} dr, \quad (2)$$

где R — радиус пузырька; $\dot{R} = dR/dt$, $\ddot{R} = d^2R/dt^2$; t — время, r — радиальная координата с началом в центре пузырька, p — давление, ρ — плотность, σ — поверхностное

натяжение. Здесь и далее индексы *l* и *g* обозначают жидкую и газовую фазы соответственно (применимо к величинам, которые встречаются как для жидкой, так и для газовой фаз).

Уравнение (2) является аналогом уравнения Рэлея–Плессета с единственной лишь разницей: вместо вязкости в правой его части фигурирует интегральная вязкость $\hat{\eta}$. Нетрудно показать, что в случае однородной вязкости уравнение (2) сводится к его классическому виду. Однако в рассматриваемой задаче градиент вязкости жидкости вокруг пузырька в процессе его роста существенен и определяется градиентом массовой доли растворенного в жидкости газа, что, безусловно, следует учесть: $(\partial\eta/\partial r) = \eta'_C \cdot (\partial C/\partial r)$. Отметим, что ввиду большой вязкости магматических расплавов инерционными членами (левой частью) в уравнении (2) можно пренебречь. Если рассматривать рост пузырьков, размеры которых много больше критического, то в уравнении (2) также можно пренебречь лапласовским давлением. Однако при необходимости все эти члены могут быть учтены.

Для определения динамики распределения массовой доли растворенного в жидкости газа $C(t, r)$ требуется решить уравнение диффузии, которое с учетом сферической симметрии задачи имеет вид:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v_r \frac{\partial C}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(D r^2 \frac{\partial C}{\partial r} \right), \quad (3)$$

где D — коэффициент диффузии. Отметим, что присутствующий в уравнении (3) конвективный член обусловлен радиальным движением жидкости, возникающим в процессе роста пузырька. Скорость жидкости v_r находится из уравнения неразрывности (жидкость считается несжимаемой) $v_r = \dot{R} R^2 / r^2$. Полагается, что в начальный момент времени жидкость находится в насыщенном состоянии: $(C)_{t=0} = C_i$, где $C_i = C_s(p_i)$, C_s — равновесная массовая доля растворенного в жидкости газа, которая, согласно закону Генри, является функцией давления p (для воды, растворенной в магме, эта зависимость имеет корневой вид: $C_s(p) = \sqrt{K_H p}$); здесь и далее нижние индексы *i* и *f* соответствуют начальному и конечному состояниям. Процесс будем считать изотермическим. На границе пузырька выполняется условие локального термодинамического равновесия: $(C)_{r=R} = C_s$; вдали от пузырька массовая доля растворенного газа равна начальной: $(C)_{r \rightarrow \infty} = C_i$. Газ в пузырьке будем считать идеальным: $p_g = \rho_g \bar{R}_g T$, где $\bar{R}_g = R_g / \mu_g$ — приведенная газовая постоянная; μ_g — молярная масса газа.

Сформулированная краевая задача должна быть дополнена уравнением материального баланса:

$$\frac{dm_g}{dt} = 4\pi R^2 \rho_l D \left(\frac{\partial C}{\partial r} \right)_{r=R}, \quad (4)$$

где $m_g = 4\pi R^3 \rho_g / 3$ — масса газа в пузырьке.

2. Полуаналитическое решение задачи

Задача решалась с использованием следующих безразмерных переменных: $\tau = t/t_0$, $\bar{r} = r/R_0$, $\bar{R} = R/R_0$, $\bar{p} = (p - p_f)/\Delta p_i$, $\bar{C} = (C - C_f)/\Delta C_i$, где t_0 — характерное время процесса, R_0 — характерный размер; $\Delta p_i = (p_i - p_f)$, $\Delta C_i = (C_i - C_f)$, $C_f = C_s(p_f)$.

Характерный размер R_0 выбирался таким образом, чтобы характерные времена диффузионных ($t_0^D = R_0^2 / D$) и динамических ($t_0^\eta = \eta_i / \Delta p_i$) процессов были равны: $t_0^D = t_0^\eta \equiv t_0$.

Тогда $R_0 = \sqrt{D\eta_i / \Delta p_i}$, где $\eta_i = \eta(C_i) / \Delta p_i$. Такой выбор характерного размера представляется наиболее логичным и уменьшает количество свободных параметров задачи. В случае, когда декомпрессия осуществляется с конечной скоростью, в задаче возникает еще одно характерное время — время декомпрессии t_d (в безразмерном виде: $\tau_d = t_d / t_0$).

Для нахождения решения сформулированной задачи (2)–(4) воспользуемся подходом, который хорошо зарекомендовал себя при моделировании роста зародышей новой фазы в различных метастабильных системах [8, 10]. Для этого сделаем переход от переменных $(\tau, \bar{r})$ к переменным $(\tau, \chi = \bar{r} / \bar{R})$, привлекательность которых заключается в том, что межфазная граница в них становится неподвижной. В данных переменных диффузионная задача принимает вид:

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial \tau} + \frac{\bar{R}'}{\bar{R}} \left(\frac{1}{\chi^2} - \chi \right) \frac{\partial \bar{C}}{\partial \chi} = \frac{1}{\bar{R}^2} \frac{1}{\chi^2} \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\chi^2 \frac{\partial \bar{C}}{\partial \chi} \right), \quad (5)$$

$$(\bar{C})_{\tau=0} = 1, \quad (\bar{C})_{\chi=1} = \bar{C}_\Gamma = \frac{\sqrt{\psi \bar{p}_g + 1} - 1}{\sqrt{\psi + 1} - 1}, \quad (\bar{C})_{\chi \rightarrow \infty} = 1, \quad (6)$$

где $\bar{C}_\Gamma$ — массовая доля растворенного газа на границе пузырька, $\psi = \Delta p_i / p_f$. В работах [1, 7] было показано, что в переменных $(\tau, \chi = \bar{r} / \bar{R})$ достаточно быстро устанавливается квазистационарное состояние, при котором можно пренебречь производной по времени $\partial \bar{C} / \partial \tau$ в уравнении (5). В рамках этого допущения, интегрируя (5) с учетом (6), можно найти простое аналитическое решение, которое хорошо согласуется с расчетами на основе прямого численного моделирования:

$$\bar{C}(\tau, \chi) = 1 - (1 - \bar{C}_\Gamma) \frac{I(\chi, \beta)}{I(1, \beta)}, \quad I(\chi, \beta) = \int_0^{1/\chi} \exp \left\{ -\beta \left(\zeta + \zeta^{-2} / 2 \right) \right\} d\zeta, \quad (7)$$

где $\beta(\tau) = \bar{R} \bar{R}'$, $\bar{R}' = d\bar{R} / d\tau$. Зависимость радиуса пузырька от времени при этом находится из уравнения материального баланса, которое теперь представляет собой следующее интегро-дифференциальное уравнение:

$$I^*(\beta) \frac{d}{d\tau} \left\{ (1 + \psi \bar{p}_g) \bar{R}^3 \right\} = 3\varepsilon \bar{R} (1 - \bar{C}_\Gamma), \quad I^*(\beta) = \int_0^1 \exp \left\{ -\beta \left(\zeta + \zeta^{-2} / 2 - 3/2 \right) \right\} d\zeta, \quad (8)$$

где $\varepsilon = \rho_l \Delta C_i / \rho_g (p_f)$ — безразмерный критерий фазового превращения.

При больших пересыщениях ($\varepsilon \gg 1$), что соответствует $\beta \gg 1$, которые характерны для реальных вулканических процессов, интегральное выражение $I^*(\beta)$ имеет простое асимптотическое разложение (по малому параметру $1/\beta$): $I^*(\beta) \approx \sqrt{\pi / (6\beta)} - 4/(9\beta)$ [7]. Отметим, что присутствующий в уравнении (8) безразмерный критерий ε характеризует степень метастабильности среды (пересыщение жидкости) и по сути является аналогом критерия Якоба в теории роста парового пузырька в перегретой жидкости.

Уравнение (8) необходимо решать совместно с уравнением импульсов, которое при пренебрежении инерционными членами и лапласовским давлением в безразмерном виде записывается следующим образом:

$$\bar{p}_g = \bar{p}_l(\tau) + 4\hat{\eta} \frac{\bar{R}'}{\bar{R}}, \quad \hat{\eta} = 3 \int_1^{\infty} \frac{\bar{\eta}(\chi)}{\chi^4} d\chi, \quad (9)$$

где $\bar{\eta} = \eta / \eta_i = \exp(\kappa(1 - \bar{C}))$, $\kappa = E_{\eta}^* k_{\eta} \Delta C_i / (\bar{R}_g T)$ — коэффициент, зависящий от свойств жидкости и начального пересыщения. Отметим, что подынтегральная функция в выражении для интегральной вязкости $\hat{\eta}$ (для больших κ) экспоненциально быстро убывает с координатой χ . Поэтому нахождение $\hat{\eta}$ может быть значительно упрощено. Проведя несложные преобразования, с учетом (7) получим: $\hat{\eta} \approx \bar{\eta}(\bar{C}_T) 3I^*(\beta) / \{\kappa(1 - \bar{C}_T)\}$. Следует указать, что полученное полуаналитическое решение (8), (9) может быть использовано при нестационарных внешних условиях (давление $\bar{p}_l$, присутствующее в правой части уравнения (9), в общем случае зависит от времени), в случае, когда декомпрессия осуществляется с постоянной скоростью, имеем $\bar{p}_l = 1 - \tau / \tau_d$ при $\tau < \tau_d$ и $\bar{p}_l = 0$ при $\tau \geq \tau_d$.

Рассмотрим некоторые предельные случаи. На временах, превышающих время декомпрессии ($\tau > \tau_d$) и значительно больших характерного времени и t_0 ($\tau \gg 1$), давление газа в пузырьке асимптотически стремится к давлению жидкости вдали от пузырька ($\bar{p}_g \rightarrow 0$), коэффициент β — к константе β_0 , зависящей только от степени метастабильности ε , а распределение массовой доли растворенного в жидкости газа — к стационарному, что свидетельствует об автомодельности данной стадии процесса (автомодельной переменной здесь является χ). На этой стадии (которую называют диффузионной) рост пузырька происходит исключительно в результате десорбции газа из окружающей жидкости, скорость которой определяется диффузионными процессами. В таком случае распределение массовой доли растворенного газа и закон роста пузырька могут быть найдены в явном виде:

$$\bar{C}(\chi) = I(\chi, \beta_0) / I(1, \beta_0), \quad \bar{R}(\tau) = \sqrt{\bar{R}_*^2 + 2\beta_0(\tau - \tau_*)}, \quad (10)$$

где τ_* и $\bar{R}_* = \bar{R}(\tau_*)$ — характерное время установления диффузионной стадии роста и радиус пузырька к этому моменту времени соответственно; коэффициент β_0 находится из следующего интегрального уравнения: $\beta_0 I^*(\beta_0) = \varepsilon$. При больших пересыщениях ($\varepsilon \gg 1$) для β_0 существует хорошее асимптотическое разложение: $\beta_0 \approx (6/\pi)(\varepsilon + 4/9)^2$. Аналогичное решение получено в работах [11, 12]. Следует отметить, что диффузионная стадия роста может быть недостижима на обозримых временах (все зависит от конкретных условий, при которых протекает рассматриваемый процесс).

Как было указано выше, в зависимости от скорости декомпрессии можно выделить три случая. Первый — когда время декомпрессии много меньше характерного времени «выхода» на диффузионную стадию роста ($\tau_d \ll 1$). В этом случае декомпрессию можно считать мгновенной, а в уравнении (9) положить $\bar{p}_l = 0$. Переход к диффузионной стадии

роста при этом обуславливается вязкими эффектами. Такой вариант рассматривался в более ранней работе авторов [7].

Второй случай — когда декомпрессия осуществляется относительно медленно ($\tau_d \gg 1$). Здесь давление газа в пузырьке успевает быстро выравниваться с давлением окружающей жидкости и фактически «отслеживает» последнее: $\bar{p}_g = \bar{p}_l(\tau)$ (т. е. эффекты, связанные с вязкостью, нивелируются). Уравнение (8) при этом сводится к неявному уравнению по β :

$$\beta I^*(\beta) = \varepsilon \frac{1 - \bar{C}_\Gamma}{1 + \psi \bar{p}_l}, \quad \bar{R}(\tau) = \sqrt{2 \int_0^\tau \beta(\tau') d\tau'}, \quad (11)$$

где $\bar{C}_\Gamma = \bar{C}_s(\bar{p}_l)$. Отметим, что правая часть первого из уравнений (11) является функцией времени, определяемой характером декомпрессии. При $\varepsilon \gg 1$ функция $\beta(\tau)$ с использованием первого члена асимптотического разложения $I^*(\beta)$ (см. выше) может быть найдена в явном виде:

$$\beta = \beta_0 \left(\frac{1 - \bar{C}_\Gamma}{1 + \psi \bar{p}_l} \right)^2. \quad (12)$$

На временах $\tau > \tau_d$ решение (11) в пределе переходит в решение (10) (в данном случае $\tau_* = \tau_d$).

И, наконец, третий случай, когда время декомпрессии сравнимо со временем «выхода» на диффузионную стадию роста. Здесь надо отметить, что последнее, определяемое только условно (по факту решение (10) является асимптотическим), на один–два порядка больше введенного характерного времени диффузионных процессов t_0 [7]. Случай является наиболее сложным для анализа, так как ключевую роль в процессе одновременно играют как динамические и диффузионные эффекты, так и характер внешнего воздействия (характер декомпрессии). В нашем случае необходимо совместно решать уравнения (8), (9), что, в принципе, не составляет большой трудности.

3. Результаты расчета

Ниже представлены результаты расчета на примере реолитового магматического расплава, подвергнутого декомпрессии с $p_i = 100$ атм до $p_f = 1$ атм (расплав изначально полагался насыщенным), которая осуществлялась с постоянной скоростью за время $t_d = 10$ с. Это соответствует следующим значениям характерных величин и определяющих безразмерных параметров: $\Delta C_i = 1,37\%$, $\eta_i = 1,6 \cdot 10^6$ Па·с, $t_0 = 0,16$ с, $R_0 = 0,54$ мкм, $\varepsilon = 160$, $\psi = 99$, $\kappa = 3,94$, $\tau_d = 60$. В рассматриваемом случае время декомпрессии соизмеримо с характерным временем установления диффузионной стадии (см. выше). Все свойства расплава, необходимые для расчета, взяты из работы [5], в которой представлена достаточно подробная подборка имеющихся в литературе данных по физико-химическим свойствам магм.

На рисунке *a* представлены зависимости массовой доли растворенного в расплаве газа $\bar{C}$ и вязкости расплава $\bar{\eta}$ от радиальной координаты χ (а также значения интегральной вязкости $\hat{\eta}$) в различные моменты времени. Из рисунка видно, что вокруг пузырька формируется диффузионный пограничный слой, характерная относительная толщина которого

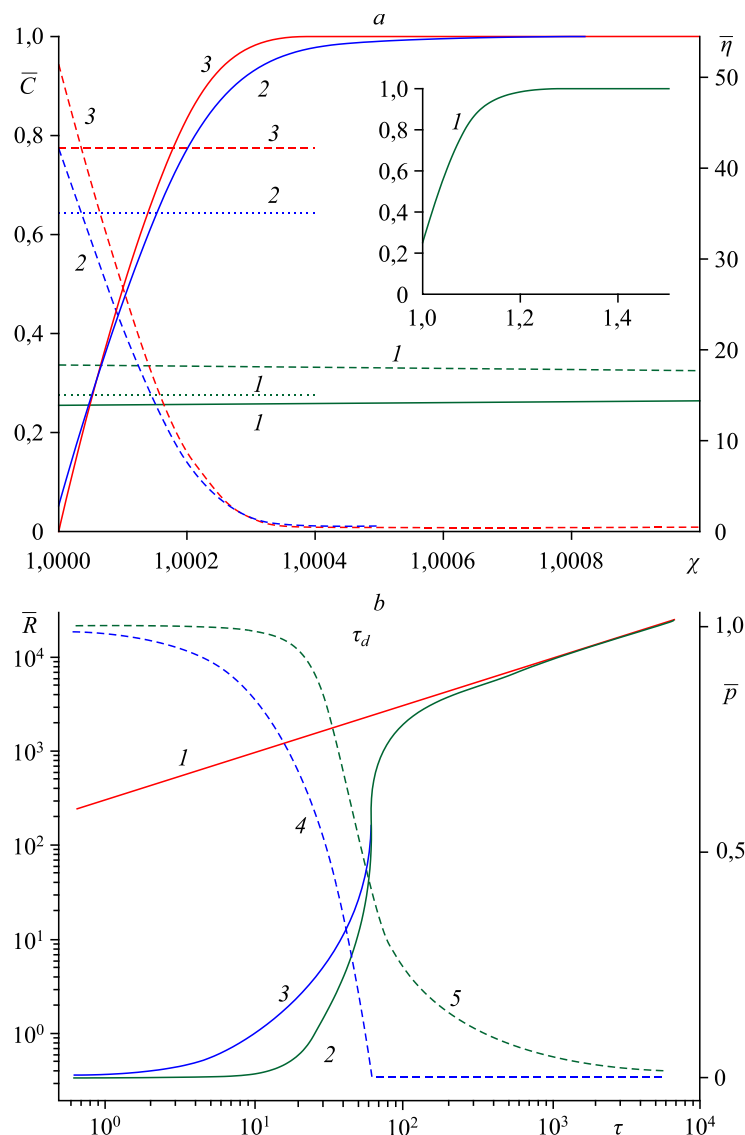


Рисунок. Распределение массовой доли растворенного в расплаве газа $\bar{C}$ (сплошные линии) и вязкости расплава $\bar{\eta}$ (штриховые линии) вокруг пузырька в моменты времени $\tau = 55$ (1), 60 (2), 500 (3) (a) и зависимости радиуса пузырька $\bar{R}$ (сплошные линии 1–3), давления в жидкости вдали от пузырька $\bar{p}_l$ (штриховая линия 4) и в пузырьке $\bar{p}_g$ (штриховая линия 5) от времени τ (b).

а: точечными линиями показано значение интегральной вязкости $\hat{\eta}$;
 а, b: кривые соответствуют: 1 — асимптотическому решению (10),
 2 — полуаналитическому решению (8), (9), 3 — приближенному решению (11).

стремительно уменьшается со временем и на диффузионной стадии становится много меньше размера самого пузырька. Снижается и массовая доля растворенного газа вблизи межфазной границы, что связано с падением давления газа в пузырьке. На больших временах она стремится к равновесной (когда давление в жидкости уже постоянно), а распределение массовой доли растворенного газа стремится к стационарному

(в переменных (τ, χ)), что свидетельствует об автомодельности данной стадии процесса. Динамика распределения вязкости расплава «отслеживает» динамику распределения массовой доли растворенного газа, так как они неразрывно связаны. Можно заметить, что интегральная вязкость $\hat{\eta}$ со временем возрастает. Это обусловлено уменьшением массовой доли растворенного в расплаве газа вокруг пузырька.

Рисунок *b* иллюстрирует зависимости радиуса пузырька и давления газа в пузырьке от времени, построенные в рамках полуаналитического решения (8), (9) и приближенного решения (11). Зависимости приведены с использованием логарифмической шкалы, так как характерные масштабы времени различных стадий процесса имеют разные порядки. Прежде всего отметим, что падение давления в пузырьке происходит с некоторым запаздыванием по отношению к давлению в жидкости. Это, очевидно, обусловлено вязкими эффектами. Данное различие со временем растет, что объясняется ростом интегральной вязкости, которая присутствует в уравнении импульсов (9). Зависимость радиуса пузырька от времени, построенная в рамках полученного полуаналитического решения (8), (9), показана кривой 2. Хорошо видны инерционная, переходная и диффузионная стадии процесса. Последняя, как было указано ранее, является асимптотической и характеризуется корневой зависимостью радиуса пузырька от времени (10) (кривая 1). Видно, что время «выхода» на диффузионную стадию роста много больше времени декомпрессии, что согласуется с приведенными выше рассуждениями. На рисунке также представлен расчет по приближенному решению (11) (кривая 3). Следует отметить, что характер полученной зависимости повторяет более точное решение (8), (9). Различие проявляется лишь на переходной стадии, на которой вязкие эффекты существенны (в решении (11) релаксация давления в пузырьке предполагается мгновенной). Как показывают расчеты, это различие уменьшается с уменьшением скорости декомпрессии (так как давление газа в пузырьке успевает быстрее выравняться с давлением окружающей жидкости).

Для верификации полученного полуаналитического решения сформулированная задача также решалась численно в полной постановке для различных начальных условий и скоростей декомпрессии. Уравнение (9) интегрировалось по схеме Рунге–Кутты–Мерсона 4-го порядка с коррекцией шага по времени, а уравнения (5) и (8) (с учетом (6)) — с использованием явной схемы по времени и схемы второго порядка по пространственной переменной. Результаты расчета не показали видимых отклонений от полученного полуаналитического решения (7)–(9) и его предельных случаев (10)–(12), различие не превышает 2 %.

В заключение отметим, что полученное в настоящей работе решение указывает на то, что неучет тех или иных факторов, которые преобладают на определенной стадии процесса, может привести к существенной ошибке в описании эволюции пузырька в целом и, как следствие, в описании процесса дегазации магматических расплавов.

Выводы

Представлена математическая модель роста газового пузырька в пересыщенной в результате быстрой декомпрессии жидкости (магматическом расплаве), учитывающая как динамические, так и диффузионные эффекты и включающая в себя известные классические уравнения — уравнение импульсов и уравнение диффузии, записываемые с учетом десорбции газа на межфазной границе. Найдено приближенное полуаналитическое решение задачи, построение которого основано на существовании квазистационарного состояния для процесса роста пузырька. Это позволило свести исходную краевую

задачу с подвижной границей к обыкновенному дифференциальному уравнению. Полученное полуаналитическое решение справедливо в широком диапазоне достигаемых пересыщений и на всех стадиях процесса, включая переходную (от инерционной к диффузионной), в том числе для изменяющихся внешних условий. Установлено, что длительность переходной стадии существенно зависит от скорости декомпрессии, так как на определенной стадии процесса превалирующими могут являться различные факторы, влияющие на процесс. Показано, что на больших временах решение становится точным автомодельным, а рост пузырька определяется исключительно диффузией.

Список литературы

1. Chernov A.A., Kedrinsky V.K., Pil'nik A.A. Kinetics of gas bubble nucleation and growth in magmatic melt at its rapid decompression // *Physics of Fluids*. 2014. Vol. 26, No. 11. P. 116602-1–116602-19.
2. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. М: Наука, 1987. 464 с.
3. Sparks R.S.J. The dynamics of bubble formation and growth in magmas: A review and analysis // *J. Volcanology and Geothermal Research*. 1978. Vol. 3, No. 1. P. 1–37.
4. Toramaru A. Numerical study of nucleation and growth of bubbles in viscous magmas // *J. Geophysical Research: Solid Earth*. 1995. Vol. 100, No. B2. P. 1913–1931.
5. Proussevitch A.A., Sahagian D.L. Dynamics and energetics of bubble growth in magmas: Analytical formulation and numerical modeling // *J. Geophysical Research: Solid Earth*. 1998. Vol. 103, No. B8. P. 18223–18251.
6. Lensky N.G., Navon O., Lyakhovsky V. Bubble growth during decompression of magma: experimental and theoretical investigation // *J. Volcanology and Geothermal Research*. 2004. Vol. 129, No. 1–3. P. 7–22.
7. Chernov A.A., Pil'nik A.A., Davydov M.N., Ermanyuk E.V., Pakhomov M.A. Gas nucleus growth in highviscosity liquid under strongly non-equilibrium conditions // *Intern. J. Heat and Mass Transfer*. 2018. Vol. 123. P. 1101–1108.
8. Chernov A.A., Pil'nik A.A., Vladyko I.V., Lezhnin S.I. New semi-analytical solution of the problem of vapor bubble growth in superheated liquid // *Sci. Reports*. 2020. Vol. 10, No. 1. P. 16526-1–16526-8.
9. Актершев С.П., Мезенцева Н.Н., Мезенцев И.В. Численное моделирование роста парового пузырька в однородно перегретой жидкости (тепловая энергетическая схема) // *Теплофизика и аэромеханика*. 2020. Т. 27, № 1. С. 127–133.
10. Чернов А.А., Пильник А.А. Механизм роста кристаллического зародыша в переохлажденном расплаве при больших отклонениях от равновесия // *Письма в ЖЭТФ*. 2015. Т. 102, № 8. С. 591–595.
11. Scriven L.E. On the dynamics of phase growth // *Chemical Engng Sci*. 1959. Vol. 10, No. 1. P. 1–13.
12. Kuchma A.E., Shchekin A.K., Bulgakov M.Yu. The theory of degassing and swelling of a supersaturated-bygas solution // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2017. Vol. 468. P. 228–237.

*Статья поступила в редакцию 23 июня 2022 г.,
после доработки — 23 сентября 2022 г.,
принята к публикации 8 декабря 2022 г.*