

лю с $m_0 = 1\%$, 2 и 3 — сухому и водонасыщенному андезиту с пористостью $m_0 = 7\%$. Производные упругих модулей по давлению вычислялись с помощью стандартной программы, использующей интерполяционную формулу Лагранжа четвертого порядка. При нахождении зависимости параметра нелинейности водонасыщенного андезита от эффективного давления на основании соотношения (1.8) были использованы следующие данные: $K_2 = 2,62$ ГПа, $K_1 = 48,8$ ГПа, $\rho_2/\rho_1 = 0,4$, $\epsilon_2 = 4$. Поскольку в рассматриваемом диапазоне давлений уравнение состояния (1.5) для твердой фазы можно линеаризовать, при расчетах полагалось $\epsilon_1 = 1$.

Как следует из рис. 5, значение ϵ при малых p_{eff} для сильноцементированных пород может достигать порядка 10^2 . В отличие от слабоцементированных пород параметр нелинейности сред с $K/K_1 \sim 1$ слабо зависит от водонасыщенности. Из расчетов видно, что затухание, обусловленное межфазным трением, для сильноцементированных пород существенно меньше экспериментально наблюдаемого.

ЛИТЕРАТУРА

1. Николаевский В. Н., Басниев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А. Механика насыщенных пористых сред. — М.: Недра, 1970.
2. Гуцин В. В., Шалашов Г. М. О возможности использования нелинейных сейсмических эффектов в задачах вибрационного просвечивания Земли // Исследование Земли невзрывными сейсмическими источниками. — М.: Наука, 1981.
3. Алешин А. С., Гуцин В. В. и др. Экспериментальные исследования нелинейных взаимодействий сейсмических поверхностных волн // ДАН СССР. — 1980. — Т. 260, № 3.
4. Дунин С. З., Нагорнов О. В. Волны конечной амплитуды в мягких грунтах // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1984. — № 6.
5. Николаевский В. Н. Механика пористых и трещиноватых сред. — М.: Недра, 1984.
6. Vesic A. S., Clough G. W. Behaviour of granular materials under high stresses // Proc. Amer. Soc. Civ. Engng. J. Soil Mech. and Found. Div. — 1968. — V. 94, N 3.
7. Schock R. N. Dynamic elastic moduli of rock under pressure // Engineering with nuclear explosives. — Las Vegas, 1970. — V. 1, N 1.
8. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. — М.: Наука, 1975.
9. Ионов А. М., Нагорнов О. В., Сироткин В. К. Распространение нелинейных сферических волн в диссипативных средах. — М., 1986. — (Препринт/МИФИ; № 25).
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. — М.: Наука, 1965.

Поступила 19/VIII 1987 г.

УДК 539.3

К РЕШЕНИЮ ОДНОЙ НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Г. В. Ткачев
(Ростов-на-Дону)

В работе предлагается новый подход к решению краевых неустановившихся антиплоских задач линейной теории упругости для полуграниченных областей типа полупространства или слоя со смешанными граничными условиями как на их поверхности (системы штампов), так и внутри (трещины, включения). Применение дополнительного интегрального преобразования Лапласа по времени при сведении вышеназванных краевых задач к решению интегрального уравнения вызывает определенные трудности в его решении по сравнению с задачами об установившихся колебаниях, методы решения которых в настоящее время хорошо разработаны. Большинство процессов, однако, носят существенно не установившийся характер и не могут быть сведены к задачам гармонического анализа. Поэтому решение неустановившихся задач — актуальная проблема.

По предлагаемому методу, используя свойства обращения Лапласа и Фурье свертки двух функций, исходную краевую задачу удается свести к решению интегрального уравнения типа Вольтерра первого рода относительно самой искомой функции, а не ее интегрального преобразования. При этом преобразования Лапласа и Фурье переобразуются с неизвестной функции на ядро, которое задано аналитическим выражением в явном виде. Методом Каньяра в модификации де Хуппа [1] находится оригинал этого ядра. Решение полученного интегрального уравнения производится численными

методами, основанными на дискретизации временного интервала и разложении на каждом таком элементарном промежутке искомой функции в ряд по пространственному базису из финитных функций. Применение метода проиллюстрировано на решении антиплоской нестационарной задачи о штампе, находящемся на поверхности упругого полупространства. Приведены численные результаты.

В отличие от численных методов решения краевых задач предложенный подход позволяет кроме количественных исследовать и качественные характеристики решения. С другой стороны, в отличие от распространенных в настоящее время асимптотических методов решения интегральных уравнений относительно преобразованной по Лапласу неизвестной функции с последующим ее численным обращением здесь обращения Лапласа и Фурье находятся от известной функции (стоящей в ядре интегрального уравнения) с помощью метода Каньяра точно, а не приближенно, что, несомненно, повышает точность решения и упрощает его вычислительные аспекты.

Рассматриваются колебания поверхности упругого полупространства $z_0 \leq 0$, $|x_0, y_0| < \infty$, вызванные кратковременными сдвиговыми смещениями штампа $V_0(x_0, t_0)$, $|x_0| \leq a$, $0 \leq t_0 \leq T$, находящегося на поверхности этого полупространства. Перемещения $v_0(x_0, y_0, t_0)$ самого полупространства вдоль оси OY удовлетворяют волновому уравнению

$$(1) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_0^2} \right) v_0(x_0, z_0, t_0) = \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2}{\partial t_0^2} v_0(x_0, z_0, t_0)$$

(b — скорость поперечных волн). На поверхности полупространства заданы смешанные граничные условия

$$(2) \quad v_0(x_0, 0, t_0) = V_0(x_0, t_0), \quad z_0 = 0, \quad |x_0| \leq a, \\ \tau_{zy}^0(x_0, 0, t_0) = 0, \quad z_0 = 0, \quad |x_0| > a,$$

а на бесконечности выполняются условия убывания амплитуды смещений. Для простоты взяты нулевые начальные условия.

Применение интегральных преобразований Лапласа и Фурье к (1), (2) с последующим использованием свойств свертки двух функций позволяет свести исходную краевую задачу к решению в безразмерных переменных интегрального уравнения

$$(3) \quad \int_0^t dT \int_{-1}^1 \tau(\xi, T) k(x - \xi, t - T) d\xi = V(x, t), \quad |x| \leq 1, t \geq 0$$

относительно неизвестных контактных напряжений $\tau(\xi, T)$ под штампом. Здесь $V(x, t) = \pi V_0(x, t)/a$; $x = x_0/a$; $t = t_0 b/a$; $\tau(\xi, T) = \tau_{zy}^0(\xi, T)/\mu$; μ — модуль сдвига материала полупространства.

Ядро интегрального уравнения (3)

$$(4) \quad k(x - \xi, t - T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha(x-\xi)} d\alpha \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{V\alpha^2 + s^2} e^{s(t-T)} ds$$

в данном случае вычисляется с помощью таблиц интегральных преобразований [2]. Для более сложных функций необходимо применять метод Каньяра [3], суть которого заключается в том, что деформацией контура интегрирования обратное преобразование Фурье приводится к виду прямого преобразования Лапласа, что позволяет из выражения (4) непосредственно получить сам оригинал ядра. В итоге от (3) переходим к уравнению

$$(5) \quad \int_0^t dT \int_{-1}^1 \tau(\xi, T) \frac{H(t - T - |x - \xi|)}{V(t - T)^2 - (x - \xi)^2} d\xi = V(x, t), \quad |x| \leq 1, t \geq 0$$

($H(y)$ — функция Хевисайда).

Безразмерные перемещения внутренних точек полупространства аналогичным образом выражаются через контактные напряжения

$$v(x, z, t) = \int_0^t dT \int_{-1}^1 \tau(\xi, T) \frac{H(t-T+z)H(\sqrt{(t-T)^2 - z^2} - |x - \xi|)}{\sqrt{(t-T)^2 - z^2 - (x - \xi)^2}} d\xi, \\ |x| < \infty, z \leq 0, t \geq 0.$$

Продолжение правой части интегрального уравнения (5) за границы области, занятой штампом, определяет собой на поверхности полупространства волновое поле, порожденное подвижками штампа. Исследуя картину волнового фронта в области $|x| \geq 1, z = 0$, по аналитическому представлению ядра (5) заключаем, что в точках с координатами $x > 1$ свободная поверхность полупространства находится в покое до момента времени (безразмерного) $t = x - 1$, после чего туда приходит волна от штампа. Координаты $x = t + 1$ и $x = -t - 1$ определяют передний фронт волны справа и слева от штампа соответственно. Аналогичные выводы можно сделать о волновом поле внутри полупространства.

Для решения уравнения (5) используется метод дискретизации его по времени и разложения искомой функции $\tau(x, t)$ по базису из финитных функций. Такая схема применяется при решении краевых задач методом граничного элемента [4]. При этом временной промежуток интегрирования $[0, t]$ точками t_m ($m = 0, 1, \dots, M$) разбивается на M частей с шагом Δt ($t_0 = 0, \dots, t_M = t$), а пространственный отрезок интегрирования $[-1, 1]$ точками x_n ($n = 0, 1, \dots, N$) на N частей с шагом h ($x_0 = -1, \dots, x_N = 1$). С учетом наличия корневой особенности у напряжений $\tau(x, t)$ на краях штампа [5] искомые контактные напряжения на каждом временном промежутке $[t_{m-1}, t_m]$ разлагаются в ряд

$$(6) \quad \tau_m(x) = \sum_{n=0}^N C_{m,n} \psi_n(x), \quad m = 1, 2, \dots, M$$

по следующему базису:

$$\psi_0(\xi) = \frac{x_1 - \xi}{h \sqrt{\xi + 1}}, \quad -1 \leq \xi \leq x_1, \quad \psi_N(\xi) = \frac{\xi - x_{N-1}}{h \sqrt{1 - \xi}}, \quad x_{N-1} \leq \xi \leq 1, \\ \psi_n(\xi) = \begin{cases} \frac{\xi - x_{n-1}}{h}, & x_{n-1} \leq \xi \leq x_n, \\ \frac{x_{n+1} - \xi}{h}, & x_n < \xi \leq x_{n+1}, \\ 0, & \xi < x_{n-1}, \xi > x_{n+1}, \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots, N-1.$$

Коэффициенты $C_{m,n}$ в (6) разные на каждом указанном временном промежутке, а сами значения $\tau_m(x)$ — постоянные по времени значения контактных напряжений на этом же отрезке времени.

В результате (5) принимает вид

$$(7) \quad \sum_{n=0}^N C_{M,n} \int_{t_{M-1}}^t dT \int_{-1}^1 \frac{H(t-T-|x-\xi|)}{\sqrt{(t-T)^2 - (x-\xi)^2}} \psi_n(\xi) d\xi = V(x, t) - \\ - \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=0}^N C_{m,n} \int_{t_{m-1}}^{t_m} dT \int_{-1}^1 \frac{H(t-T-|x-\xi|)}{\sqrt{(t-T)^2 - (x-\xi)^2}} \psi_n(\xi) d\xi, \quad |x| \leq 1, t \geq 0,$$

где $C_{m,n}$ — коэффициенты разложения искомого контактного напряжения в заданное время t по базису $\psi_n(x)$, которые могут быть найдены из алгебраической системы, получающейся из (7), если последовательно полагать $x = x_n$ ($n = 0, 1, \dots, N$). Очевидно, для этого необходимо знать коэффициенты $C_{m,n}$ разложения контактных напряжений в ряд (6) на предшествующих временных промежутках $m = 1, 2, \dots, M-1$. В полу-

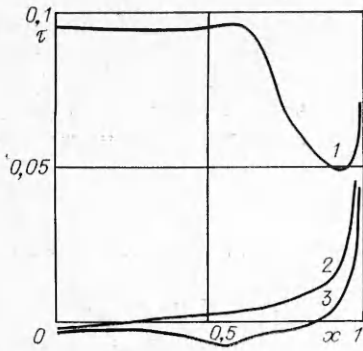


Рис. 1

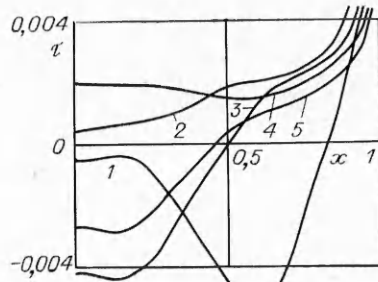


Рис. 2

ченной рекуррентной формуле на первом шаге имеем совсем простую алгебраическую систему

$$\sum_{n=0}^N C_{1,n} \int_0^{t_1} dT \int_{-1}^1 \frac{H(t_1 - T - |x_k - \xi|)}{\sqrt{(t_1 - T)^2 - (x_k - \xi)^2}} \psi_n(\xi) d\xi = V(x_k, t_1), \quad k = 0, 1, \dots, N$$

относительно неизвестных $C_{1,n}$.

Коэффициентами этой, а также всех последующих систем являются двойные интегралы от известных функций. Интегралы от $\psi_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots, N - 1$) вычисляются аналитически, а от $\psi_0(x)$ и $\psi_N(x)$ сводятся к эллиптическим и считаются численно. Матрицы всех систем хорошо обусловлены и имеют элементы только на главной и на двух ближайших к ней диагоналях. Согласно оценкам, приведенным в [4], сходимость этого метода гарантируется при соотношении $\Delta t/h^2 \leq 0,5$.

На ЭВМ составлены программы и проведен численный анализ волновых полей на поверхности полупространства и контактных напряжений под штампом. Рассматривалось два случая: 1) штамп совершает подвижку по закону $V(x, t) = 0,3t$ в течение безразмерного промежутка времени $0 \leq t \leq 0,04$, а затем фиксируется в этом смещенном положении, 2) при тех же условиях после $t = 0,04$ штамп освобождает поверхность полупространства, и она остается свободной все дальнейшее время.

На рис. 1 и 2 приведены графики безразмерных контактных напряжений для случая 1 при $t_1 = 0,04$, $t_2 = 0,08$, $t_3 = 0,4$ и $t_1 = 0,4$, $t_2 = 0,6$, $t_3 = 0,8$, $t_4 = 1$, $t_5 = 1,2$ соответственно. Номера кривых отмечают графики напряжений в момент времени t_n . В силу симметрии графики даны только для одной половины штампа $0 \leq x \leq 1$.

На рис. 3 для случаев 1 и 2 показаны графики зависимости от времени безразмерного смещения точки свободной поверхности полупространства, отстоящей от края штампа на расстоянии 0,2. Для $t < 0,2$ передний фронт волны еще не дошел до рассматриваемой точки. При $t = 0,2$ в данную точку приходит волна от смещения ближайшей точки штампа, а при $t = 2,2$ — самой дальней точки штампа. При достаточно больших временах t смещение исследуемой точки поверхности стремится в случае 1 к смещению ее при статическом нагружении, а в случае 2 — к нулю.

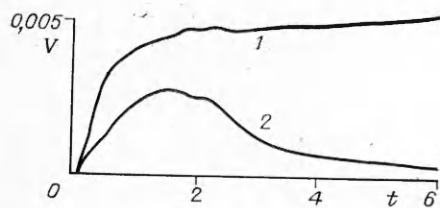


Рис. 3

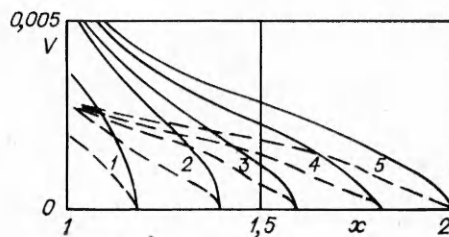


Рис. 4

На рис. 4 представлены графики безразмерных смещений точек свободной поверхности полупространства в зависимости от расстояния x от края штампа ($x = 1$) при $t_1 = 0,4$, $t_2 = 0,8$, $t_3 = 1,2$, $t_4 = 1,6$, $t_5 = 2$ для случаев 1 (сплошная линия) и 2 (штриховая). Кривые 1—5 — графики смещений точек поверхности полупространства в моменты времени t_n .

ЛИТЕРАТУРА

1. Паргон В. З., Перлин П. И. Методы математической теории упругости. — М.: Наука, 1981.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. — М.: Наука, 1969.
3. De Hoop A. T. A modification of Cagniard's method for solving seismic pulse problems // Appl. Sci. Res. Ser. B. — 1960. — V. 8.
4. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. — М.: Мир, 1984.
5. Бабешко В. А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. — М.: Наука, 1984.

Поступила 28/X 1987 г.

УДК 532.526

СОПРЯЖЕННАЯ ЗАДАЧА АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО ВЫТЯГИВАНИЯ СТРУЙ НАГРЕТОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

В. И. Елисейев, Л. А. Флегер

(Днепропетровск)

Аэродинамическое вытягивание струй вязких жидкостей имеет свое практическое применение в вопросах формирования синтетических нитей из расплавов полимеров с помощью скоростных газовых потоков. Задача о формировании волокон относится к сопряженным задачам, в которых необходимо учитывать взаимное влияние формуемого волокна с окружающей средой. Впервые она была математически сформулирована в работах [1, 2], где предложена модель течения, выведены основные уравнения и граничные условия. В [3, 4] выведены наиболее общие уравнения динамики тонких струй вязкой жидкости с учетом пространственного изгиба и кручения, в [4—6] дан подробный анализ современного состояния теории гидродинамики, теплообмена и устойчивости процессов формирования волокон. В случае формирования волокон с помощью тянущих устройств при небольших (до 5 м/с) конечных скоростях струи внешним силовым воздействием потока можно пренебречь [7]. С увеличением скорости движения нити влияние силы трения на параметры волокна становится существенным. Для аэродинамического вытягивания силы взаимодействия потока и волокна являются определяющими. Некоторым физическим и технологическим аспектам этой задачи посвящен ряд работ (например, [8, 9]), в которых рассмотрены особенности аэродинамического формирования. В данной работе построена полная сопряженная математическая модель течения и проведен численный анализ на основе итерационного метода [10, 11].

1. Основные уравнения и граничные условия. На рис. 1 показана схема течения струи жидкости, вытягиваемой воздушным потоком, параллельным оси струи (1 — фильера, 2 — струя, 3 — эжектор). Вследствие наличия вязкостных и теплопроводных эффектов струя расплава и внешняя среда взаимодействуют друг с другом посредством пограничного слоя. Взаимное влияние вытягиваемой струи и среды делает поставленную задачу сопряженной. Предположим, что течение струи расплава происходит устойчиво, струя не изгибается и не колеблется, профили скоростей и температур в струе однородны. Такие предположения дают возможность использовать простые уравнения движения жидкой струи и теплообмена, выведенные, например, в [1—3]:

$$(1.1) \quad \frac{dA_c}{dx} = \frac{\rho_c A_c F}{G\beta}, \quad \frac{dT_c}{dx} = \frac{2\pi r_c q}{\rho_c u_c c_c A_c},$$

$$G = \rho_c u_c A_c, \quad F = F_{\text{тр}} + F_{\text{ин}} + F_g, \quad q = q_T + q_{\text{пл}}, \\ \beta = D \exp(B/T_c + C), \quad A_c|_{x=0} = A_{c0}, \quad T_c|_{x=0} = T_{c0}.$$