

УДК 539.375

## ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА О ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНЕ, ДВИЖУЩЕЙСЯ В УПРУГОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А. И. Жорник, В. А. Киричек

Таганрогский институт им. А. П. Чехова (филиал) Ростовского государственного экономического университета, 347926 Таганрог, Россия  
E-mails: Zhornik@land.ru, Zhornik\_Victoria@mail.ru

Рассматривается динамическая задача о полубесконечной трещине в упругом пространстве, которая внезапно начинает расти с постоянной скоростью. На берегах трещины на некотором расстоянии от ее вершины в начальный момент времени прикладываются нормальные растягивающие трещину сосредоточенные силы, которые затем перемещаются вдоль берегов трещины со скоростью, отличной от скорости движения ее вершины. Проведен расчет коэффициента интенсивности напряжений. Рассмотрены различные частные случаи задачи.

Ключевые слова: динамическое разрушение, напряжения, перемещения, смешанные граничные условия, факторизация, коэффициент интенсивности напряжений.

DOI: 10.15372/PMTF20180221

**Введение.** При динамическом разрушении разрыв материала происходит в течение относительно небольших промежутков времени, сравнимых со временем действия внешних ударных импульсов. Для того чтобы применять различные критерии разрушения хрупких сред с учетом упругого сопротивления материала, а также его инерции, необходимо знать коэффициент интенсивности напряжений (КИН).

Целью настоящей работы является расчет КИН для упругого пространства с полубесконечной трещиной, к берегам которой симметрично приложены нормальные нагрузки.

**1. Постановка задачи.** Изотропная упругая среда занимает пространство с полубесконечной трещиной, которая начинает внезапно расти с постоянной скоростью  $v_T$ , меньшей скорости волны Рэлея. На берегах трещины, на расстоянии  $l$  от ее вершины, в тот же момент внезапно прикладываются нормальные растягивающие трещину сосредоточенные силы  $F$  (силы на единицу длины отрезка, параллельного фронту трещины), перемещающиеся затем со скоростью  $v_0 - v_T$  в направлении от вершины трещины. Начало неподвижной относительно тела системы координат  $(x', y')$  лежит в точке, в которой в начальный момент времени  $t$  находится вершина трещины. Подвижная система координат  $(x, y)$  выбрана таким образом, что ее начало в любой момент времени остается в вершине трещины, т. е.  $x = x' - v_T t$ ,  $y = y'$ . Поэтому в подвижной системе координат сосредоточенные нагрузки перемещаются со скоростью  $v_0 > 0$  в направлении от вершины трещины и со скоростью  $v_0 < 0$  в направлении ее вершины.

Вследствие симметрии задачи относительно оси  $x$  она рассматривается для полупространства  $y \geq 0$  с граничными условиями, заданными в подвижной системе координат:

$$\sigma_{yy} = -F \delta(x + l + v_0 t) H(t), \quad x < 0, \quad y = 0, \quad t > 0; \quad (1)$$

$$u_y = 0, \quad x > 0, \quad y = 0, \quad t > 0; \quad (2)$$

$$\sigma_{xy} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad y = 0, \quad t > 0. \quad (3)$$

Здесь  $\delta$  — дельта-функция Дирака;  $H$  — функция Хевисайда.

Для решения задачи применяется метод суперпозиции двух решений  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}$ ,  $u_i = u_i^{(1)} + u_i^{(2)}$ . Первое решение задачи (задачи Лэмба) для полупространства удовлетворяет граничным условиям (1), (3), второе решение — смешанным граничным условиям, которые с учетом (1)–(3) представляются в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}^{(2)} &= 0, & x < 0, & \quad y = 0, & \quad t > 0, \\ u_y^{(2)} &= -u_y^{(1)}, & x > 0, & \quad y = 0, & \quad t > 0; \\ \sigma_{xy}^{(2)} &= 0, & -\infty < x < \infty, & \quad y = 0, & \quad t > 0. \end{aligned} \quad (4)$$

**2. Предварительные сведения.** В поставленных выше задачах граничное условие (3), (4) выполняется при  $-\infty < x < \infty$ .

На начальном этапе решения задачи находятся потенциалы  $\Phi(x, y, t)$  и  $\Psi(x, y, t)$  [1], которые в изображениях по Лапласу по времени  $t$  (с параметром  $s$ ) и по координате  $x$  (с параметром  $s\lambda$  в комплексной плоскости  $\lambda$  с разрезами на вещественной оси от  $-\infty$  до  $-a_2 = -a/(1 - a/d)$  и от  $a_1 = a/(1 + a/d)$  до  $\infty$ ) имеют вид

$$\bar{\Phi}(\lambda, y, s) = A_1 e^{-s\alpha y}, \quad \bar{\Psi}(\lambda, y, s) = B_1 e^{-s\beta y},$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= (1 - a^2/d^2)^{1/2} (a_1 - \lambda)^{1/2} (a_2 + \lambda)^{1/2}, & \beta &= (1 - b^2/d^2)^{1/2} (b_1 - \lambda)^{1/2} (b_2 + \lambda)^{1/2}, \\ b_1 &= b/(1 + b/d), & b_2 &= b/(1 - b/d), & d &= 1/v_T, & a &= 1/c_{\parallel}, & b &= 1/c_{\perp}, \end{aligned}$$

$c_{\parallel}$ ,  $c_{\perp}$  — скорости продольной и поперечной волн соответственно.

Далее используются зависимости изображений по Лапласу напряжений и перемещений от изображений потенциалов. В частности, для касательного напряжения  $\bar{\sigma}_{xy}$  эта зависимость имеет вид

$$\bar{\sigma}_{xy} = \mu[-2s^2\alpha\lambda A_1 e^{-s\alpha y} + s^2(\beta^2 - \lambda^2)B_1 e^{-s\beta y}],$$

где  $\mu$  — модуль сдвига материала. Тогда с учетом граничного условия (3) получаем связь между постоянными  $A_1$  и  $B_1$

$$B_1 = -2\alpha A_1 \lambda / \gamma,$$

где  $\gamma = 2\lambda^2 - b^2 - b^2\lambda^2/d^2 + 2b^2\lambda/d$ . Поэтому изображения для нормального напряжения  $\sigma_{yy}$  и перемещения  $u_y$  представляются в виде

$$\bar{\sigma}_{yy} = A_1 s^2 \mu (-\gamma^2 e^{-s\alpha y} - 4\lambda^2 \alpha \beta e^{-s\beta y}) / \gamma, \quad \bar{u}_y = A_1 s \alpha (-e^{-s\alpha y} + 2\lambda^2 e^{-s\beta y} / \gamma).$$

Из этих равенств следует зависимость между  $\bar{\sigma}_{yy}$  и  $\bar{u}_y$ . В частности, на границе полупространства данная зависимость имеет вид

$$\bar{u}_y = -\frac{1}{\mu} b^2 \left( \frac{\lambda}{d} - 1 \right)^2 \frac{\alpha(\lambda)}{sR(\lambda)} \bar{\sigma}_{yy}, \quad y = 0. \quad (5)$$

Здесь  $R(\lambda) = \gamma^2 + 4\lambda^2\alpha\beta$  — модифицированная волновая функция Рэлея. Можно показать, что корнями уравнения  $R(\lambda) = 0$ , имеющими физический смысл, являются корни  $\lambda_1 = c/(1 + c/d) = c_1$ ,  $\lambda_2 = -c/(1 - c/d) = -c_2$ ,  $\lambda_{3,4} = d$ . Здесь  $c = 1/c_R$ ;  $c_R$  — скорость волны Рэлея.

Из выражения для  $R(\lambda)$  следует, что при  $|\lambda| \rightarrow \infty$

$$R(\lambda) = -k_1\lambda^4, \quad k_1 = 4\sqrt{(1 - a^2/d^2)(1 - b^2/d^2)} - (2 - b^2/d^2)^2.$$

Поэтому функция  $R(\lambda)$  представляется в виде

$$R(\lambda) = -k_1(\lambda - c_1)(\lambda + c_2)(\lambda - d)^2 S(\lambda),$$

где функция  $S(\lambda)$  не имеет особенностей в разрезанной указанным выше способом плоскости комплексной переменной  $\lambda$ . Кроме того,  $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} S(\lambda) = 1$ .

**3. Решение задачи.** Из решения задачи  $(\sigma_{ij}^{(1)}, u_i^{(1)})$  об ударной сосредоточенной движущейся нагрузке с граничными условиями (1), (3) необходимо определить перемещение  $u_y^{(1)}$  по поверхности полупространства. Для этого преобразованное по Лапласу граничное условие (1) для  $\sigma_{yy}^{(1)}$

$$\bar{\sigma}_{yy}^{(1)} = \int_0^\infty e^{-st} dt \int_{-\infty}^\infty e^{-s\lambda x} [-F\delta(x + l + v_0 t)] dt = \frac{F e^{s\lambda l}}{sv_0(\lambda - 1/v_0)}, \quad \text{Re } \lambda < \frac{1}{v_0}$$

с использованием обратных преобразований Лапласа подставляется в (5). Тогда оригинал нормального перемещения границы полупространства при  $x > 0$  имеет вид

$$u_y^{(1)}(x, 0, t) = -\frac{Fb^2}{\mu d^2 v_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{c'} \frac{(\lambda - d)^2 \alpha(\lambda)}{R(\lambda)(\lambda - 1/v_0)} H[t + \lambda(l + x)] d\lambda, \quad (6)$$

где  $c'$  — контур, проходящий в нижней полуплоскости  $\lambda$  от  $-\infty$  до  $-a_2$ , охватывающий точку  $-a_2$  и уходящий в  $-\infty$  по верхней полуплоскости  $\lambda$ .

Однако вследствие наличия функции Хевисайда интегрирование проводится лишь по части контура  $c'$ , так как  $\lambda > -t/(l + x)$ .

Учитывая, что подынтегральная функция в (6) на верхней и нижней частях контура комплексно-сопряженная, а также заменяя переменную интегрирования  $\lambda$  на  $-\lambda$ , окончательно выражение для нормального перемещения при  $x > 0$  представляем в виде

$$u_y^{(1)}(x, 0, t) = \frac{Fb^2}{\mu d^2 \pi v_0} \int_{a_2}^{t/(l+x)} \text{Im}_+ \left[ \frac{(-\lambda - d)^2 \alpha(-\lambda)}{R(-\lambda)(\lambda + 1/v_0)} \right] d\lambda, \quad \text{Re } \lambda > -\frac{1}{v_0}, \quad (7)$$

где запись  $\text{Im}_+[\cdot]$  означает, что интегрирование проводится по верхней части разреза комплексной плоскости  $\lambda$ .

В случае скорости  $v_0 = v_T = 0$  и сосредоточенной нагрузки в виде дельта-функции  $\delta(t)$  решение для нормального перемещения получено в [2]. При интегрировании этого решения по времени получаем выражение (7). Следует отметить, что интеграл (7) является действительным.

Следующий этап решения (решение второй задачи) заключается в нахождении напряженного деформированного состояния  $\sigma_{ij}^{(2)}, u_i^{(2)}$ , при котором нормальное перемещение  $u_y^{(2)}(x, 0, t)$  на поверхности полупространства при  $x > 0$  компенсирует перемещение (7), определяемое решением первой задачи.

Решение подобной задачи, полученное методом наложения движущихся от вершины трещины краевых дислокаций, рассмотрено в работе [3]. Это решение получено с использованием факторизации функций  $\alpha(\lambda)$  и  $S(\lambda)$  путем сведения задачи к уравнению Винера — Хопфа [4] относительно изображений по Лапласу для напряжения перед вершиной трещины и перемещения на берегах трещины. В этом решении выражение для напряжения имеет вид

$$\sigma_{yy}^{(2)}(x, 0, t) = \frac{F}{\pi^2 v_0 \sqrt{1 - a/d}} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_{a_2}^{t/l} \operatorname{Im}_+ \left[ \frac{\alpha_+(-h)}{(-h + c_2) S_+(-h) (h + 1/v_0) \sqrt{t - lh}} \right] dh, \quad (8)$$

$$t/l > h,$$

где  $\alpha_+(\lambda)$ ,  $S_+(\lambda)$  — функции, аналитические при  $\operatorname{Re} \lambda > -a_2$ :

$$\alpha_+(\lambda) = (1 - a/d)^{1/2} (a_2 + \lambda)^{1/2},$$

$$S_+(\lambda) = \exp \left[ -\frac{1}{\pi} \int_{a_2}^{b_2} \operatorname{arctg} \left( \frac{4\eta^2 |\alpha(-\eta)| |\beta(-\eta)|}{(2\eta^2 - b^2 - b^2\eta^2/d^2 - 2b^2\eta/d)^2} \right) \frac{d\eta}{\eta + \lambda} \right].$$

Результирующее напряжение  $\sigma_{yy}(x, 0, t)$  выражается в виде суммы первого решения  $\sigma_{yy}^{(1)}(x, 0, t)$  (1) и второго решения (8).

Для расчета КИН  $K_I(t)$  необходимо использовать соотношение

$$K_I(t) = \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{2\pi x} \sigma_{yy}(x, 0, t),$$

из которого следует, что вклад в КИН вносит только напряжение  $\sigma_{yy}^{(2)}(x, 0, t)$ . Поэтому выражение для КИН принимает вид

$$K_I(t) = -\sqrt{\frac{2}{\pi l}} \frac{F}{\pi v_0 \sqrt{1 - a/d}} \int_{a_2}^{t/l} \operatorname{Im}_+ \left[ \frac{\alpha_+(-h)}{S_+(-h) (h - c_2) (h + 1/v_0) \sqrt{t/l - h}} \right] dh, \quad \frac{t}{l} > h. \quad (9)$$

В общем случае  $l \neq 0$  для вычисления интеграла в (9) при  $a_2 < t/l < b_2$  необходимо использовать приближенные формулы, так как при сведении интеграла к контурному интегралу подынтегральное выражение имеет три точки ветвления  $a_2$ ,  $t/l$ ,  $b_2$ . Однако при  $t/l > b_2$  интеграл в (9) можно заменить контурным интегралом в комплексной плоскости. Тогда решение (9) записывается в виде

$$K_I(t) = -\sqrt{\frac{2}{\pi l}} F \left\{ \frac{1}{\pi v_0} \int_{a_2}^{t/l} \frac{(h - a_2)^{1/2}}{(h + 1/v_0)(h - c_2) S_+(-h) \sqrt{t/l - h}} dh H\left(b_2 - \frac{t}{l}\right) - \frac{1}{1 + c_2 v_0} \left[ \frac{(1 + a_2 v_0)^{1/2}}{S_+(1/v_0) \sqrt{1 + v_0 t/l}} - \frac{(c_2 - a_2)^{1/2} H(c_2 - t/l)}{S_+(-c_2) (c_2 - t/l)^{1/2}} \right] H\left(\frac{t}{l} - b_2\right) \right\} H\left(\frac{t}{l} - a_2\right). \quad (10)$$

Выражения (9), (10) являются окончательным решением задачи.

**4. Частные случаи.** Рассмотрим частные случаи решения (9), (10), соответствующие различным значениям  $v_0$ ,  $v_T$ ,  $l$ ,  $F$ .

4.1. *Случай  $l = 0$ .* В случае  $l = 0$  КИН  $K_I(t)$  определяется во всем временном интервале.

Полагая в (10)  $l = 0$ , с учетом того что первое слагаемое в фигурных скобках и второе слагаемое в квадратных скобках обращаются в нуль, имеем

$$K_I(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} F \frac{(1 + a_2 v_0)^{1/2}}{v_0^{3/2} (1/v_0 + c_2) S_+(1/v_0)} \frac{1}{\sqrt{t}}. \quad (11)$$

Это соотношение получено в [5] другим методом (методом снятия нагрузки перед вершиной трещины в процессе ее движения). В частности, если  $v_0 = v_T$ , то из (11) следует

$$K_I(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{F}{\sqrt{1 - a/d}} \frac{d^{3/2}}{(d + c_2) S_+(d)} \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad d = \frac{1}{v_T}. \quad (12)$$

Данное соотношение получено в [6] с использованием метода снятия нагрузки [5]. Если в (12) положить  $v_T = 0$ , то  $K_I \rightarrow \infty$ . Это объясняется тем, что сосредоточенные нагрузки в любой момент времени  $t > 0$  расположены в вершине трещины.

4.2. *Случай  $l \neq 0$ .* Рассмотрим различные случаи приложения нагрузки на берегах трещины.

1. Если распределенная нормальная нагрузка на берегах трещины приложена на расстоянии  $l_1$  от вершины трещины, то для вычисления КИН целесообразно использовать выражение (9), в котором вместо сосредоточенной нагрузки  $F$  используется нагрузка  $P(l) dl$  и интегрирование проводится по  $l$  в пределах от  $l_1$  до  $(c_{||} - v_T)t$ :

$$K_I(t) = - \int_{l_1}^{(c_{||} - v_T)t} \sqrt{\frac{2}{\pi l}} \frac{1}{\pi v_0} \frac{P(l)}{\sqrt{1 - a/d}} dl \int_{a_2}^{t/l} \text{Im}_+ \left[ \frac{\alpha_+(-h)}{\sqrt{t/l - h} (h - c_2) (h + 1/v_0) S_+(-h)} \right] dh. \quad (13)$$

Заменяя в первом интеграле (13) переменную интегрирования  $l$  на  $h^* = t/l$ , получаем

$$K_I(t) = - \frac{1}{v_0 \sqrt{1 - a/d}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{t}}{\pi} \int_{a_2}^{t/l_1} \text{Im}_+ \left[ \frac{P(h^*)}{(h^*)^{3/2}} \int_{a_2}^{h^*} \frac{\alpha_+(-h)}{\sqrt{h^* - h} (h - c_2) (h + 1/v_0) S_+(-h)} dh \right] dh^*.$$

Изменяя пределы интегрирования, получаем

$$K_I(t) = \frac{-1}{v_0 \sqrt{1 - a/d}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{t}}{\pi} \times \int_{a_2}^{t/l_1} \text{Im}_+ \left[ \frac{\alpha_+(-h)}{(h - c_2) (h + 1/v_T) S_+(-h)} \int_h^{t/l_1} \frac{P(h^*) (h^*)^{-3/2}}{\sqrt{h^* - h}} dh^* \right] dh. \quad (14)$$

Если  $P(h^*) = \sigma$ , то интеграл в квадратных скобках в (14) равен  $(2/h) \sqrt{t/l_1 - h} / \sqrt{t/l_1}$  [7] и, следовательно,

$$K_I(t) = -2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\pi} \frac{\sigma \sqrt{l_1}}{v_0} \int_{a_2}^{t/l_1} \text{Im}_+ \left[ \frac{(a_2 - h)^{1/2} \sqrt{t/l_1 - h}}{h (h + 1/v_0) (h - c_2) S_+(-h)} \right] dh. \quad (15)$$

Интеграл в (15) действительный и в общем случае вычисляется приближенно. Однако при  $t/l_1 > b_2$  этот интеграл можно заменить контурным интегралом в комплексной плоскости с полюсами в точках 0 и  $-1/v_0, c_2$ . Вычисляя вычеты в этих полюсах, находим

$$K_I(t) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \left[ \frac{a_2^{1/2} \sqrt{t}}{c_2 S_+(0)} - \frac{(a_2 + 1/v_0)^{1/2} \sqrt{t + l_1/v_0}}{(c_2 + 1/v_0) S_+(1/v_0)} + \frac{(c_2 - a_2)^{1/2} (c_2 l_1 - t)^{1/2}}{v_0 c_2 (c_2 + 1/v_0) S_+(-c_2)} H(c_2 l_1 - t) \right] H(t - b_2 l_1). \quad (16)$$

Из (16) следует важный вывод, содержащийся во многих работах [3, 6, 8–11]: при скорости вершины трещины, равной скорости волны Рэлея  $c_R$ , КИН  $K_I(t)$  обращается в нуль.

2. Полагая в (16)  $v_0 = v_T = 0$ , получаем выражение для КИН в виде

$$K_I(t) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \left[ \frac{a^{1/2}}{c S_+(0)} \sqrt{t} - \sqrt{l_1} + \frac{(c - a)^{1/2} (c l_1 - t)^{1/2}}{c S_+(-c)} H(c l_1 - t) \right] H(t - b l_1).$$

3. В случае если нагрузка  $-\sigma$  приложена на конечном участке берегов трещины ( $-l_2 < x < -l_1$ ), на расстоянии  $l_2$  от вершины трещины необходимо приложить нагрузку  $\sigma$ . В этом случае последнее выражение принимает вид

$$K_I(t) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \left\{ \left[ \frac{a^{1/2}}{c S_+(0)} \sqrt{t} - \sqrt{l_1} + \frac{(c - a)^{1/2} (c l_1 - t)^{1/2}}{c S_+(-c)} H(c l_1 - t) \right] H(t - b l_1) - \left[ \frac{a^{1/2}}{c S_+(0)} \sqrt{t} - \sqrt{l_2} + \frac{(c - a)^{1/2} (c l_2 - t)^{1/2}}{c S_+(-c)} H(c l_2 - t) \right] H(t - b l_2) \right\}. \quad (17)$$

Если в (17) величину  $\sigma(l_2 - l_1)$  считать постоянной и равной  $F$ , то при  $l_2 \rightarrow l_1$  и  $t \rightarrow \infty$   $K_I(t)$  стремится к величине  $\sqrt{2/(\pi l_1)} F$  — статическому КИН для сосредоточенной нагрузки  $F$ , приложенной на расстоянии  $l_1$  от вершины трещины.

Формулу (17) можно применить для оценки момента начала движения трещины в случае, когда некоторый участок берегов трещины  $(l_2, l_1)$  нагружен ударной нагрузкой. Экспериментальное исследование такого процесса проводилось в [12].

4. Полагая в (17)  $l_1 = 0$ ,  $l_2 = \infty$ , имеем зависимость для КИН во всем временном интервале

$$K_I(t) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \frac{a^{1/2}}{c S_+(0)} \sqrt{t}, \quad (18)$$

приведенную в [5]. Эта формула получена в [9] методом суперпозиции частот установившихся колебаний в случае ударных нагрузок, приложенных к берегам трещины.

Выражения (13)–(18) получены для случая, когда к берегам трещины приложена ступенчатая нагрузка. Однако с использованием принципа суперпозиции эти результаты можно обобщить на случай произвольных зависимостей нагрузки от времени [13].

5. В случае  $v_0 > 0$ ,  $t/l > b_2$  первое слагаемое в (17) обращается в нуль. Проанализируем изменение  $K_I(t)$  во времени. Из (10) следует, что при достижении волной Рэлея вершины трещины ( $c_2 t = l$ ) КИН  $K_I(t)$  принимает бесконечно большое отрицательное значение. Это обусловлено тем, что “вспученность” материала на берегах трещины, возникающая в окрестности приложенной сосредоточенной нагрузки, распространяется со скоростью, равной скорости волны Рэлея, и “закрывает” трещину в окрестности ее вершины. Однако, после того как волна Рэлея проходит через вершину трещины, КИН  $K_I(t)$  становится положительным и с течением времени уменьшается до нуля (при  $t \rightarrow \infty$ ) по мере удаления вершины трещины от сосредоточенной нагрузки.

6. При  $v_0 = 0$ ,  $t/l > b_2$  в (10) выражение для КИН переходит в соотношение, полученное в [3]:

$$K_I(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi l}} F \left[ 1 - \frac{(c_2 - a_2)^{1/2} H(c_2 - t/l)}{S_+(-c_2) (c_2 - t/l)^{1/2}} \right] H\left(\frac{t}{l} - b_2\right). \quad (19)$$

Так же как в предыдущем случае, при достижении волной Рэлея вершины трещины КИН  $K_I(t)$  принимает бесконечно большое отрицательное значение. После прихода волны Рэлея в вершину трещины второе слагаемое в квадратных скобках (19) обращается в нуль и КИН принимает статическое значение  $\sqrt{2/(\pi l)} F$ .

7. В случае  $v_T = 0$  выражение (19) для КИН принимает вид [14]

$$K_I(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi l}} F \left[ 1 - \frac{(c-a)^{1/2} H(c-t/l)}{S_+(-c)(c-t/l)^{1/2}} \right] H\left(\frac{t}{l} - b\right). \quad (20)$$

Следует отметить, что в работе [14] в этой формуле имеется две опечатки, отмеченные в работе [3], в которой приведена правильная формула (20).

8. Рассмотрим случай, когда точечная нагрузка перемещается из точки  $x = -l$  в направлении вершины трещины со скоростью  $-v_0$ , т. е.  $v_0 < 0$ ,  $t/l > b_2$ . Тогда, подставляя в (9)  $-v_0$  ( $v_0 > 0$ ), получаем

$$K_I(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi l}} \frac{F}{\sqrt{1-a/d}} \frac{1}{\pi} \frac{1}{v_0} \int_{a_2}^{t/l} \text{Im}_+ \left[ \frac{\alpha_+(-h)}{S_+(-h)(h-c_2)(h-1/v_0)\sqrt{t/l-h}} \right] dh.$$

Поскольку  $t/l > b_2$ , этот интеграл можно свести к контурному интегралу в комплексной плоскости с полюсами в точках  $c_2$  и  $1/v_0$ . В этом случае КИН определяется соотношением

$$K_I(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi l}} F \frac{1}{1-c_2 v_0} \left[ -\frac{\sqrt{c_2-a_2}}{S_+(-c_2)\sqrt{c_2-t/l}} H\left(c_2 - \frac{t}{l}\right) + \frac{\sqrt{1/v_0-a_2}}{S_+(-1/v_0)\sqrt{1/v_0-t/l}} H\left(\frac{1}{v_0} - \frac{t}{l}\right) \right] H\left(\frac{t}{l} - b_2\right). \quad (21)$$

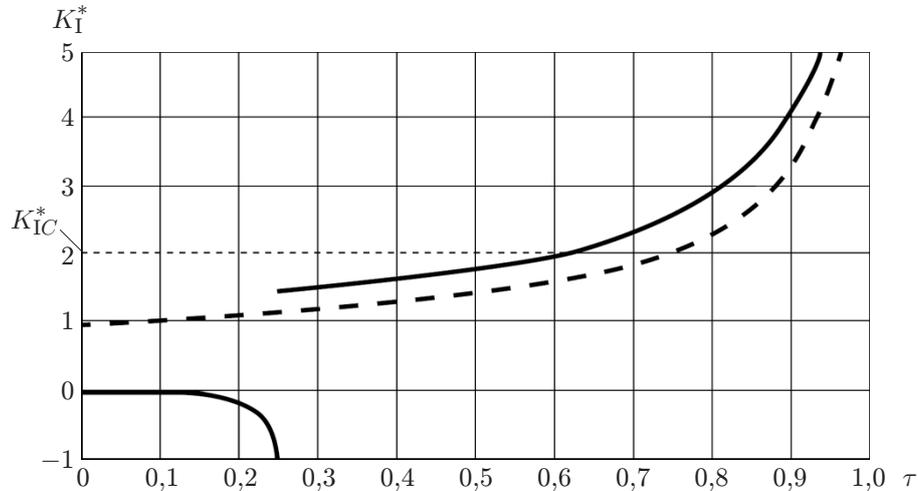
Проанализируем изменение  $K_I$  во времени в предположении, что скорость волны Рэлея в подвижной системе координат  $(c_R, v_T)$  больше скорости движения точечной нагрузки к вершине трещины  $v_0$  ( $c_R - v_T > v_0$ ), т. е.  $c_2 < 1/v_0$  или  $c_2 v_0 < 1$ . Тогда, во-первых, коэффициент перед квадратными скобками в (21) будет положительным и, во-вторых, с увеличением времени  $t$  величина  $t/l$  достигнет сначала значения  $c_2$ . Первое слагаемое в (21) принимает бесконечно большое отрицательное значение при  $t = l c_2 = l/(c_R - v_T)$ . В этот момент волна Рэлея достигает вершины трещины и значение КИН стремится к  $-\infty$ .

После достижения волной Рэлея вершины трещины первое слагаемое обращается в нуль, а второе является положительным, со временем увеличивается и стремится к бесконечности при  $t \rightarrow l/v_0$ . В момент  $t = l/v_0$  сосредоточенная нагрузка достигает вершины трещины и второе слагаемое в (21) обращается в нуль.

В работе [3] приведены зависимости  $S_+(-1/V)$  от  $Vb$  при различных скоростях движения вершины трещины  $b/d$  и значениях коэффициента Пуассона  $\nu = 0,25; 0,40$ . С использованием этих зависимостей можно вычислять КИН в частных случаях. Случай  $b/d = 0$  рассмотрен в работе [8].

Проведем численный расчет КИН по формуле (21), полагая, что трещина покоится ( $v_T = 0$ ). Тогда (21) преобразуется к виду

$$K_{Id}^*(\tau) = \frac{1}{1-v_0/c_R} \left[ \frac{\sqrt{1-v_0/c_{\parallel}}}{S_+(-1/v_0)\sqrt{1-\tau}} H(1-\tau) - \frac{\sqrt{v_0/c_R-v_0/c_{\parallel}}}{S_+(-1/c_R)\sqrt{v_0/c_R-\tau}} H\left(\frac{v_0}{c_R} - \tau\right) \right] H\left(\tau - \frac{v_0}{c_{\perp}}\right), \quad (22)$$



Зависимости  $K_{Id}^*$  (сплошная линия) и  $K_{Ist}^*$  (штриховая линия) от безразмерного времени  $\tau$

где  $K_{Id}^*(\tau) = (K_I(\tau)/F)\sqrt{\pi l/2}$  — безразмерный динамический КИН;  $\tau = v_0 t/l$  — безразмерное время.

Для того чтобы получить статический КИН  $K_{Ist}(\tau)$ , скорости волн  $c_{\parallel}$ ,  $c_{\perp}$ ,  $c_R$  в (22) должны стремиться к бесконечности. Тогда из (22) следует

$$K_{Ist}^*(\tau) = \frac{1}{S_+(-1/v_0)\sqrt{1-\tau}} H(1-\tau)H(\tau). \quad (23)$$

Далее полагаем  $v_0 = 0,25c_R$ .

В качестве примера рассмотрим полиметилметакрилат (ПММА), для которого согласно [13]  $c_{\parallel} = 1970$  м/с,  $c_{\perp} = 1130$  м/с,  $c_R = 1040$  м/с, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,25$ , вязкость разрушения  $K_{IC} = 1,47$  МПа  $\cdot$  м<sup>1/2</sup>. Значения  $S_+(-1/(0,25c_R)) = 1,03$  и  $S_+(-1/c_R) = 1,98$  получены в работе [3] при  $\nu = 0,25$ .

На рисунке приведены зависимости  $K_{Id}^*$  и  $K_{Ist}^*$  от  $\tau$ . Видно, что, изменяя независимый параметр  $F$ , можно получить любое значение  $K_{IC}^* = (K_{IC}/F)\sqrt{\pi l/2}$  при заданном значении  $K_{IC} = 1,47$  МПа  $\cdot$  м<sup>1/2</sup>.

Из рисунка следует, что статический КИН увеличивается от значения  $K_{Ist}^* \approx 0,97$  при  $\tau = 0$  до бесконечности при  $\tau = 1$ , когда нагрузка достигает вершины трещины. Динамический КИН  $K_{Id}^*$  равен нулю до тех пор, пока продольная волна не достигнет вершины трещины ( $\tau = 0,13$ ). Далее  $K_{Id}^*$  непрерывно изменяется от нуля до малых отрицательных значений [14], до тех пор пока не будет справедливым выражение (22) ( $\tau = 0,23$ ). Начиная с момента времени  $\tau = 0,23$  значение  $K_{Id}^*$  уменьшается и при  $\tau \rightarrow 0,25$  стремится к  $-\infty$  как  $1/\sqrt{\tau - 0,25}$  (в данный момент времени волна Рэлея достигает вершины трещины). При  $\tau = 0,25$  КИН  $K_{Id}^*$  скачком принимает положительное значение, равное 1,4 и превышающее статическое значение, равное 1,1. В дальнейшем значение  $K_{Id}^*$  также превышает статическое значение. Поэтому, в случае если сосредоточенная сила  $F$  такова, что  $K_{IC}^* = 2$  (см. рисунок) и при  $\tau = 0,63$  динамический КИН достигает такого же значения, в этот момент времени  $\tau$  начинается разрушение, несмотря на то что статический КИН  $K_{st}^*$  имеет меньшее значение, равное 1,6.

**Заключение.** В работе методом наложения двух решений получено решение динамической задачи теории упругости для пространства с полубесконечной движущейся трещиной. Первое из этих решений является решением задачи Лэмба с сосредоточенной нор-

мальной нагрузкой, движущейся по поверхности полупространства со скоростью, отличной от скорости движения трещины, второе — решением задачи для полупространства со смешанными граничными условиями, полученным методом суперпозиции движущихся от вершины трещины краевых дислокаций, компенсирующих нормальное перемещение перед вершиной трещины в первой задаче. Рассмотрены частные случаи, соответствующие различным способам приложения нагрузки.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Новацкий В.** Теория упругости. М.: Мир, 1975.
2. **Поручиков В. Б.** Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986.
3. **Жорник А. И., Карташов Э. М.** О динамической задаче теории упругости пространства с движущейся полубесконечной трещиной // Прикл. механика. 1992. Т. 2, № 12. С. 56–63.
4. **Нобл Б.** Применение метода Винера — Хопфа для решения уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
5. **Freund L. B.** Crack propagation in an elastic solid subjected to general loading. 3. Stress wave loading // J. Mech. Phys. Solids. 1973. V. 21. P. 47–61.
6. **Freund L. B.** Crack propagation in an elastic solid subjected to general loading. 1. Constant rate of extension // J. Mech. Phys. Solids. 1972. V. 20. P. 129–140.
7. **Прудников А. П.** Интегралы и ряды. Элементарные функции / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. М.: Наука, 1981.
8. **Партон В. З.** Динамическая механика разрушения / В. З. Партон, В. Г. Борисковский. М.: Машиностроение, 1985.
9. **Черепанов Г. П.** Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.
10. **Слепян Л. И.** Механика трещин. Л.: Судостроение, 1981.
11. **Костров Б. В.** Распространение трещин с переменной скоростью // Прикл. математика и механика. 1974. Т. 38, вып. 3. С. 551–560.
12. **Груздков А. А., Кривошеев С. И., Петров Ю. В.** Энергоемкость разрушения материалов в условиях импульсного нагружения микросекундной длительности // Физика твердого тела. 2003. Т. 45, вып. 5. С. 842–845.
13. **Кривошеев С. И., Морозов Н. Ф., Петров Ю. В., Шнеерсон Г. А.** Инициирование разрушения твердых тел при интенсивном импульсном нагружении // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1999. № 5. С. 165–171.
14. **Freund L. B.** The stress intensity factor due to normal impact loading of the faces of a crack // Intern. J. Engng Sci. 1974. V. 12, N 2. P. 179–189.

*Поступила в редакцию 22/II 2017 г.,  
в окончательном варианте — 2/V 2017 г.*