УДК 519.63:550.34

Преломление плоской волны на выпуклом и вогнутом углах в приближении геометрической акустики

А.Н. Кремлев

Балтийский федеральный университет им. И. Канта, ул. Пролетарская, 131, Калининград, 236029
E-mail: ankremlev@gmail.com

Кремлев А.Н. Преломление плоской волны на выпуклом и вогнутом углах в приближении геометрической акустики // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2017. — Т. 20, № 3. — С. 251–271.

Построено точное решение уравнения эйконала для плоской волны, преломленной на границе, содержащей вогнутый и выпуклый тупые углы. Под вершиной вогнутого угла решение имеет линию разрыва поля лучевых векторов и первых производных времени первых вступлений, а под вершиной выпуклого угла — конус из волн, дифрагированных на вершине этого угла. Этот конус соответствует конусу дифракции Келлера в геометрической теории дифракции. Рассмотрена взаимосвязь между уравнением эйконала и вытекающего из него уравнения Гамильтона–Якоби для времени прихода нисходящих волн и уравнения сохранения лучевого параметра. Решения этих уравнений совпадают только для докритических углов падения и различны при закритических углах. Показано, что времена прихода волн максимальной амплитуды, представляющие наибольший практический интерес, совпадают со временем, рассчитанным по полю лучевых векторов для уравнения сохранения лучевого параметра. Численный алгоритм, предложенный для расчета этих времен, может быть использован для произвольных скоростных моделей.

DOI: 10.15372/SJNM20170303

Ключевые слова: *уравнение эйконала, уравнение Гамильтона–Якоби, лучевой параметр, преломление на выпуклом и вогнутом углах, время первых вступлений, аналитическое вязкое решение, головная волна, конечно-разностная схема Годунова.*

Kremlev A.N. The plane wave refraction on convex and concave obtuse angles in geometric acoustics approximation // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2017. — Vol. 20, № 3. — P. 251–271.

The strict analytical solution to the eikonal equation for the plane wave refracted on convex and concave obtuse angles has been built. It has a shock line for the ray vector field and the first arrival times at the convex angle and a rarefaction cone with diffracted waves at the concave angle. This cone corresponds to the Keller diffraction cone in the geometric diffraction theory. The comparison of the first arrival times, the Hamilton–Jacoby equation times for downward waves and the conservation ray parameter equation times was made. It is shown that these times are equal only for pre-critical incident angles and are different for sub-critical angles. It is shown that the most energetic wave arrival times, which have dominant practical importance, are equal to the times calculated for the conservation ray parameter equation. The numerical algorithm proposed for these times calculation may be used for arbitrary velocity models.

Keywords: *eikonal equation, Hamilton–Jacobi equation, ray parameter, refraction on convex and concave obtuse angle, first arrival times, analytical viscosity solution, head wave, Godunov finite difference scheme.*

1. Введение

Разработка эффективных алгоритмов для расчета времени и направления прихода волн для сложно-построенных сред актуальна для анализа сейсморазведочных данных, а также их глубинной престековой миграции при поиске коллекторов углеводородов. Расчет этих атрибутов основывается на решении уравнений, возникающих при построении высокочастотных асимптотических [1, 2] или приближенных разрывных решений волнового уравнения [3, 4]. Центральное место среди них занимает уравнение эйконала, которое для 2D случая имеет вид

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2 = s^2(x,z). \tag{1}$$

Здесь $t(x,z)$ — время прихода сигнала в точку $(x,z) \in \mathbb{R}^2$, $s(x,z) = 1/v(x,z)$ — медленность, а $v(x,z)$ — скорость акустических волн.

Изолинии функции $t(x,z)$ являются волновыми фронтами, а лучевой вектор

$$\overrightarrow{p} = \nabla t(x,z), \tag{2}$$

который по модулю равен медленности $|\overrightarrow{p}| = s(x,z)$, ортогонален к этим фронтам и направлен вдоль лучей, являющихся характеристиками уравнения (1).

Лучевой метод построения характеристик, сводящийся к решению обыкновенных дифференциальных уравнений, позволяет рассчитывать все вышеперечисленные атрибуты, однако этот метод относится к так называемым лагранжевым методам. Для него все величины привязаны к движущемуся лучу и выражаются через лучевые координаты: начальную точку и направление выхода луча. Для практического использования атрибутов, рассчитанных с помощью лучевого метода, необходимо построить их отображение из пространства лучевых координат на равномерную сетку точек физического пространства. Для сложно-построенных сред построение этого отображения затруднительно в силу неоднородности распределения лучей. В связи с этим развиваются альтернативные эйлеровы подходы.

Эйлеровы подходы основываются на численном решении уравнения эйконала (или родственных ему уравнений) на равномерных сетках с помощью конечно-разностных методов. Наиболее популярными методами решения уравнения эйконала являются методы FMM (Fast Marching Method) [5] и FSM (Fast Sweeping Method) [6], развивающие работы [7, 8]. Эти методы позволяют эффективно вычислять на равномерных сетках так называемое вязкое решение уравнения эйконала [9], являющееся временем первых вступлений. Кроме того, метод FSM допускает распараллеливание вычислений [10]. Вычисление лучевых векторов выполняется затем с помощью обратной трассировки, что равносильно вычислению первых производных времени первых вступлений и приводит к некоторой потере точности.

С прикладной точки зрения наибольшее значение имеют волны с наибольшей энергией — доминантные волны [11]. Для сложно построенных сред амплитуды волн первых вступлений обычно малы и использование первых вступлений для престековой глубинной миграции приводит к появлению на глубинном разрезе ложных артефактов [12]. В связи с этим представляет интерес поиск дополнительных решений уравнения эйконала, соответствующих волнам с наибольшей энергией.

Альтернативные подходы к решению задачи определения лучевых атрибутов сводятся к численному решению уравнения типа Гамильтона–Якоби:

$$\frac{\partial t}{\partial z} = +\sqrt{s^2(x,z) - \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2} \tag{3}$$

или родственного ему уравнения для лучевого параметра p_x:

$$\frac{\partial p_x}{\partial z} = +\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{s^2(x,z) - p_x^2}\,. \tag{4}$$

Уравнение (3) вытекает из уравнения (1) в результате решения его относительно производной $\partial t/\partial z$, а уравнение (4) — в результате дифференцирования уравнения (3) по переменной x и использования равенства смешанных производных $t''_{xz} = t''_{zx}$. При этом ограничиваются только одной ветвью решения уравнения (1), соответствующей волнам, распространяющимся в положительном направлении оси z (знак + в правой части), и накладывают дополнительное ограничение $|t'_x| \equiv |p_x| \le s$ [13–15]. Существование и единственность вязкого решения для уравнения (3) установлена в работе [9], а для уравнения (4) — в работе [16]. Такие решения мы будем далее называть вязкими нисходящими решениями.

Пусть $t_F(x,z)$ — вязкое решение уравнения эйконала (1), $t_{\mathrm{HJ}}(x,z)$ — вязкое нисходящее решение уравнения Гамильтона–Якоби (3) и $t_{\mathrm{D}}(x,z)$ — время прихода волн, распространяющихся вдоль лучей, являющихся вязким нисходящим решением уравнения для лучевого параметра (4). Представляет интерес вопрос о том, как соотносятся между собой эти поля времен и какое из них наилучшим образом соответствует доминантным волнам.

В настоящей работе в приближении геометрической акустики построено точное аналитическое решение уравнения эйконала для преломления плоской волны, падающей сверху на границу, разделяющую верхнюю низкоскоростную и нижнюю высокоскоростную однородные среды и содержащую вогнутый и выпуклый тупые углы (см. рисунок 1). Установлено, что под вершиной вогнутого угла решение имеет линию разрыва поля лучевых векторов и первых производных времени первых вступлений (что соответствует излому его графика), а под вершиной выпуклого угла — конус, состоящий из волн, дифрагированных на вершине этого угла.

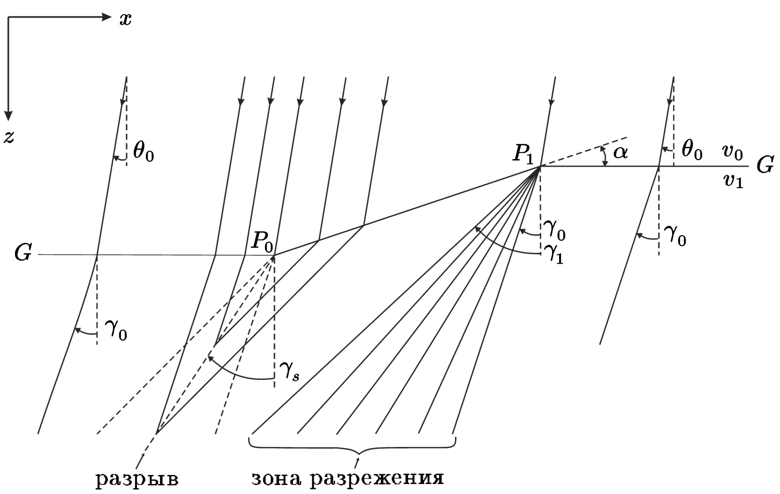

Рис. 1. Падение плоской волны под углом θ_0 на границу G, содержащую вогнутый (P_0) и выпуклый (P_1) углы

Точное аналитическое решение позволило верифицировать конечно-разностные схемы для численного решения нисходящего уравнения Гамильтона–Якоби (3) и нисходящего уравнения для лучевого параметра (4). Для последнего уравнения предложена конечно-разностная схема одновременного вычисления поля лучевых векторов и соответствующего ему поля времен. Показано, что время первых вступлений $t_F(x,z)$, время прихода нисходящих волн Гамильтона–Якоби $t_{\mathrm{HJ}}(x,z)$ и время лучевого параметра $t_{\mathrm{D}}(x,z)$ совпадают только тогда, когда при распространении волн не возникают закритические углы, приводящие к формированию головных волн. При наличии закритических углов все эти три поля времен различны и только время $t_{\mathrm{D}}(x, z)$ соответствует доминантным волнам.

2. Постановка задачи

Рассмотрим падение акустической плоской волны сверху на границу G, содержащую вогнутый P_0 и выпуклый P_1 тупые углы (рис. 1). Эта граница отделяет верхнее однородное полупространство со скоростью распространения волн v_0 от нижнего полупространства с более высокой скоростью v_1.

Направление распространения падающей волны образует с осью z угол θ_0, причем положительными будем считать углы, отсчитанные от оси z против часовой стрелки. Тогда для нисходящих волн лучевой параметр удовлетворяет начальной задаче:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p_x}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial x}\sqrt{s^2(x,z) - p_x^2}, \\ p_x(x,0) = s_0 \sin\theta_0. \end{cases} \tag{5}$$

Решение этой задачи позволяет определить для точек $z > 0$ не только поле лучевых векторов $\vec{p}(x, z)$:

$$\begin{cases} p_x = p_x(x,z), \\ p_z = \sqrt{s^2(x,z) - p_x^2}, \end{cases} \tag{6}$$

но и время прихода этой волны

$$\begin{cases} t(x,z) = t(x,0) + \displaystyle\int_0^z p_z(x,z')\,dz', \\ t(x,0) = x s_0 \sin\theta_0. \end{cases} \tag{7}$$

Верхнее равенство в формуле (7) вытекает из определения (2) при условии непрерывности функции $t(x, z)$.

Уравнение (5) есть гиперболическое дифференциальное уравнение в частных производных консервативного типа. При условии $|p_x(x, z)| \le s(x, z)$ оно имеет единственное вязкое решение [16].

3. Докритические углы падения

Докритические углы падения θ_0 удовлетворяют неравенствам:

$$\begin{cases} \theta_0 \le \beta_{\mathrm{c}}, \\ |\theta_0 - \alpha| \le \beta_{\mathrm{c}}, \end{cases} \tag{8}$$

где $\beta_{\mathrm{c}} = \arcsin(v_0/v_1)$ — критический угол падения на горизонтальные участки границы G, а α — угол наклона ее средней части (рис. 1). Для всех численных примеров, приводимых в этой работе, $\alpha = 10°$, $v_0 = 2$ км/с, $v_1 = 4$ км/с, тогда все докритические углы лежат в интервале $\theta_0 \in [-20°, 30°]$.

Решение уравнения (5) для докритических углов падения построено в приложении А (см. пункт 11) и содержит характерные для гиперболических консервативных уравнений зону разрежения и линию разрыва функции $p_x(x,z)$, которую принято называть ударной волной [17].

Пусть $\gamma_0 = \arcsin(v_1/v_0 \sin\theta_0)$ — угол преломления падающей волны на плоском участке границы, а $\gamma_1 = \arcsin\big(v_1/v_0 \sin(\theta_0-\alpha)\big)+\alpha$ — на наклонном участке. Тогда линия разрыва (“ударная волна”) образуется ниже левого вогнутого угла P_0. Эта линия разрыва есть луч, выходящий из вершины P_0 под углом $\gamma_s = (\gamma_0+\gamma_1)/2$ и являющийся биссектрисой угла, образованного волновыми векторами волн, преломленных на сторонах этого угла. На этой линии происходит разрыв поля лучевых векторов и первых производных времени первых вступлений. Этот разрыв обусловлен пересечением фронтов волн, преломленных на горизонтальном и наклонном участках границы. Его положение определяется условием равенства времен прихода этих волн в точки этой линии. Вязкое решение уравнения эйконала “склеено” вдоль этой линии из волн, подходящих к ней слева и справа.

Зона разрежения образуется в результате дифракции падающей волны на выпуклом угле P_1 и описывается семейством лучей, выходящих из этого угла и заполняющих конус, ограниченный лучами с углами γ_0 и γ_1 (рис. 1). Очевидно, что это конус дифракции, постулированный Келлером [18] в его геометрической теории дифракции. Заметим, что этот конус дифракции использовался в работе [19] для расчета синтетических сейсмограмм с учетом дифракции на углах.

Для завершения описания вязкого решения для докритических углов падения заметим, что выше границы G поле лучей совпадает с полем лучей падающей волны, ниже границы слева и справа от ударной волны, а также вне конуса дифракции, поле лучей совпадает с соответствующими преломленными лучами (рис. 1).

Особого рассмотрения требует случай пересечения линии ударной волны с лучами из конуса дифракции. Это приводит к некоторому изгибанию линии разрыва, но мы для краткости изложения этот случай здесь не описываем.

4. Численное решение для докритических углов

Для численного решения задачи (5) была использована модификация схемы Годунова [20] (см. также [17]):

$$\begin{cases} \hat{U}_j^{n+1} = U_j^n - \dfrac{\Delta z}{\Delta \mathrm{x}}\Big[F_{\mathrm{G}}\Big(\hat{s}_{j+1/2}^{n+1/2}, U_j^n, U_{j+1}^n\Big) - F_{\mathrm{G}}\Big(\hat{s}_{j-1/2}^{n+1/2}, U_{j-1}^n, U_j^n\Big)\Big], \\ U_j^{n+1} = \mathrm{clip}\Big(\hat{U}_j^{n+1}, s_j^{n+1}\Big), \\ F_{\mathrm{G}}\big(s, U_j^n, U_{j+1}^n\big) = F\big(s, m\big(U_j^n, U_{j+1}^n\big)\big), \\ m(x,y) = \max\big(\max(x,0), |\min(y,0)|\big). \end{cases} \tag{9}$$

Здесь $U_j^n = p_x(x_j,z_n)$, $s_j^n = s(x_j,z_n)$ — значения искомого лучевого параметра и медленности в узлах сетки $x_j = j\Delta x$, $z_n = n\Delta z$ ($j,n \in \mathbb{N}$ — целые числа, Δx, Δz — шаги сетки), $F(s,U) = -\sqrt{s^2-U^2}$ — поток для уравнения (5), $F_{\mathrm{G}}(\cdot)$ — поток Годунова, $\hat{s}_{j+1/2}^{n+1/2} = \big(s_j^n + s_{j+1}^n + s_j^{n+1} + s_j^{n+1}\big)/4$, функции $\max(x,y)$ и $\min(x,y)$ — наибольшее и наименьшее значения своих аргументов, а функция “обрезания”

$$\mathrm{clip}(x,a) = \begin{cases} x & \text{при } |x| < a, \\ \mathrm{sign}(x)a & \text{при } |x| > a \end{cases} \tag{10}$$

обеспечивает на каждом шаге $U^n \to U^{n+1}$ сохранение вещественности решения и применимость этой схемы как для докритических, так и для закритических углов. При этом $p_z = -F(s,U) \geq 0$, т.е. решение всегда будет нисходящим. Заметим, что функция обрезания существенна только при закритических углах, а для докритических углов $\mathrm{clip}(x,a) \equiv x$.

Схема Годунова является схемой первого порядка точности по шагу интегрирования Δz. Она хорошо описывает решение консервативных уравнений типа уравнения (5) как в области его гладкости, так и вблизи его разрывов.

Гиперболическое уравнение (5) удовлетворяет принципу причинности. Вследствие этого необходимым условием устойчивости и сходимости схемы Годунова является неравенство CFL (Куранта–Фридрихса–Леви):

$$\mathrm{CFL} = \frac{\Delta z}{\Delta x}\,\mathrm{tg}\,\theta_{\max} \leq 1, \tag{11}$$

которое накладывает ограничение на величину шага интегрирования Δz. В формуле (11) $\theta_{\max}$ — наибольшее значение модуля угла $|\theta(x,z)|$.

Проведенные нами численные эксперименты продемонстрировали эффективность и высокую точность метода Годунова для численного решения задачи преломления плоской волны на вогнутом и выпуклом углах для докритических углов падения. На рис. 2 представлены результаты численного решения задачи (5) для плоской волны, падающей под углом $\theta_0 = -10^0$.

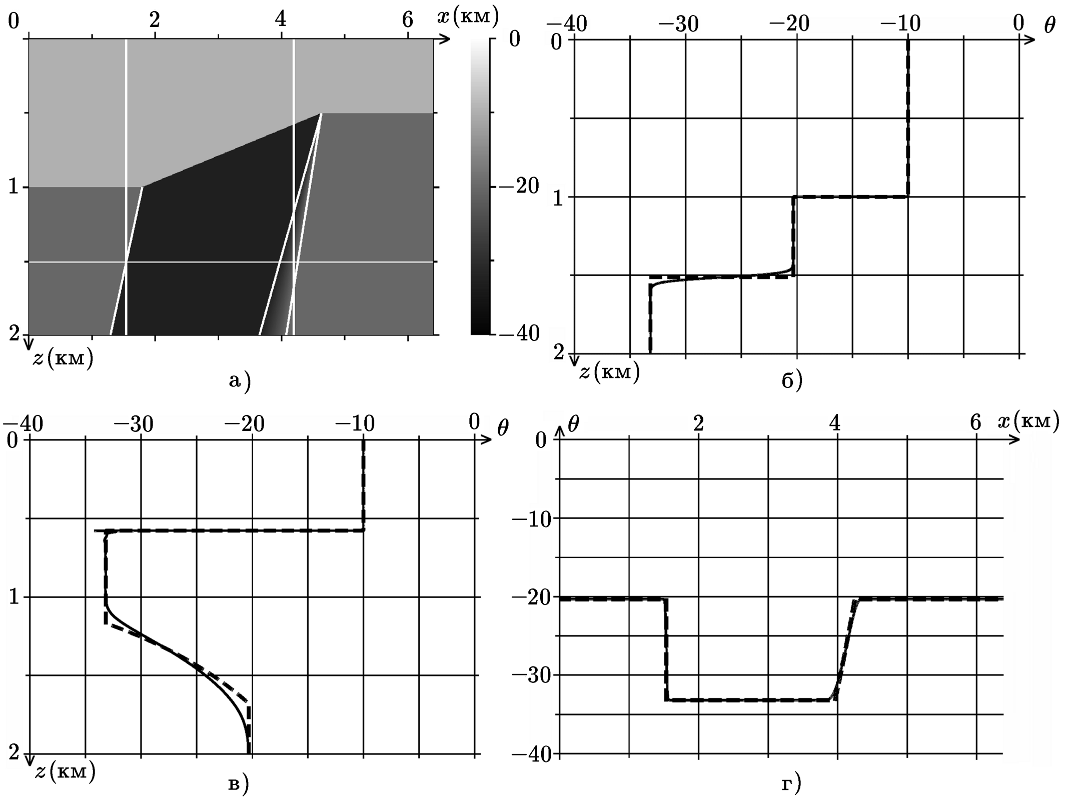

Рис. 2. Карта и графики сечений функции углов наклона лучевых векторов $\theta(x,z)$ для угла падения $\theta_0 = -10°$: а) — карта углов наклона; б) — левое вертикальное сечение; в) — правое вертикальное сечение; г) — горизонтальное сечение

Точки равномерной сетки (x_j, z_n) покрывают прямоугольник $(x, z) \in [0, 6400] \times [0, 2000]$ (в метрах) с шагом $\Delta x = 4$ м и $\Delta z = 0.4$ м, при этом CFL $= 2 \cdot 10^{-2}$. Координаты угловых точек $P_0 = (1782, 1000)$ и $P_1 = (4618, 500)$ выбраны таким образом, что при угле наклона среднего участка границы $\alpha = 10°$ его центральная точка имеет координаты $P_c = (3200, 750)$ и располагается посередине расчетного интервала оси x.

Для наглядности при построении графиков лучевой параметр $u = p_x$ пересчитывался в угол

$$\theta = \arcsin\big(p_x(x, z)v(x, z)\big), \tag{12}$$

который лучевой вектор $\vec{p}(x, z)$ образует с осью z.

На рис. 2 а) с помощью черно-белой палитры изображена карта численно рассчитанных углов наклонов лучевых векторов. Наклонные линии соответствуют линии разрыва поля лучевых векторов (слева) и двух лучей, ограничивающих дифракционный конус зоны разрежения (справа). Горизонтальная линия и две вертикальных линии на этом рисунке указывают положение сечений функции $\theta(x, z)$, вдоль которых на рис. 2 б), 2 в), 2 г) изображены графики разрезов функции $\theta(x, z)$.

На рис. 2 б) приведены графики численного решения задачи (5), рассчитанного по конечно-разностным формулам (9), и аналитического решения, рассчитанного по формулам (24), (27) и (30) приложения А, вдоль левого вертикального разреза вдоль линии $x = 1530$ м. На всех рисунках сплошная линия соответствует численному решению, а пунктирная — аналитическому. На рис. 2 б) верхний скачок соответствует преломлению падающей волны на левом горизонтальном участке границы при $z = 1000$ м, а нижний — пересечению на глубине $z = 1500$ м линии разрыва, выходящей из вершины P_0. На рис. 2 в) представлены графики аналитического и численного решений вдоль правой вертикальной линии $x = 4180$ м, пересекающей зону разрежения. Верхний скачок на этом графике соответствует преломлению волны на наклонном участке границы, а изогнутая часть графика — зоне разрежения. И, наконец, на рис. 2 г) изображены аналогичные сечения вдоль горизонтальной линии $z = 1500$ м, которая пересекает как линию разрыва, так и зону разрежения. Совпадение численного и аналитического решений на всех этих графиках очень хорошее. Это подтверждает как правильность построенного нами аналитического решения, так и высокую эффективность схемы Годунова.

5. Закритические углы падения

Падение плоской волны на границу, разделяющую низкоскоростное (v_0) и высокоскоростное (v_1) полупространства, под углом, превышающим критический, приводит, как известно, к формированию преломленной волны, распространяющейся в высокоскоростном полупространстве вдоль границы G и связанной с ней головной волны, распространяющейся в низкоскоростном слое.

Для горизонтальных участков границы G закритические углы падения удовлетворяют неравенству $|\theta_0| > \beta_c$, а для наклонного участка — неравенству $|\theta_0 - \alpha| > \beta_c$. На рис. 3 изображена круговая диаграмма докритических и закритических углов для $\alpha = 10°$ и $\beta_c = 30°$, что соответствует параметрам, используемым в приводимых примерах. Здесь мы рассмотрим, для сокращения изложения, только область углов $\theta_0 \in [-20°, -30°]$, являющихся закритическими для наклонного участка границы. Углы $\theta_0 \in [30°, 40°]$, закритические для боковых горизонтальных участков границы G, рассматриваются аналогично.

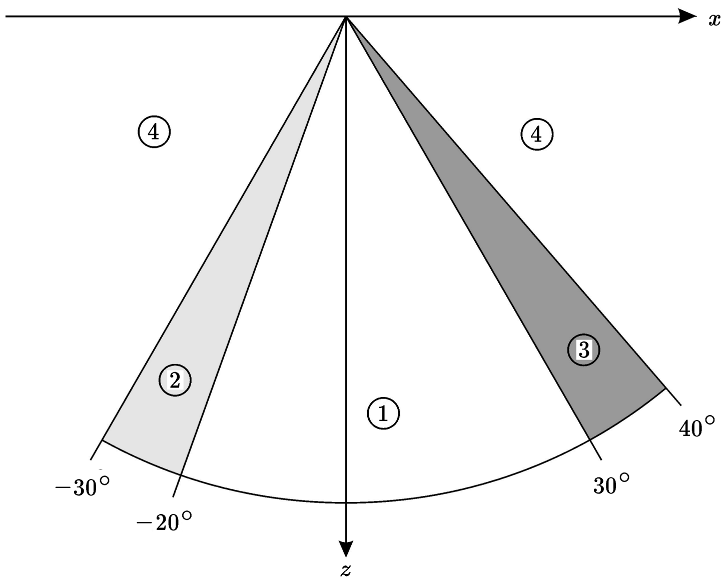

Рис. 3. Докритические и закритические углы для границы G. Докритические углы — 1. Закритические углы: 2 — только для наклонного участка, 3 — только для горизонтальных участков, 4 — для всей границы G

Если угол падения совпадает с критическим углом падения на наклонную границу, т. е. $\theta_0 = \alpha - \beta_c = -20°$, то лучи волны, дифрагированной на точке P_1, заполняют весь конус дифракции в интервале $\theta \in [-\pi/2 + \alpha, \gamma_0]$ (рис. 1 и рис. 4). При этом верхний дифрагированный луч параллелен наклонному участку границы G. Кроме того, все лучи, падающие сверху на наклонный участок границы P_0P_1 и преломленные на нем, также будут параллельны этому участку границы. Все вместе они формируют приграничную волну, распространяющуюся вдоль наклонного участка границы. Важно, что при таком угле падения скорость, с которой движется точка пересечения фронта падающей волны с наклонной границей так называемая кажущаяся скорость

$$v_k = \frac{v_0}{\sin|\theta_0 - \alpha|}, \tag{13}$$

совпадает со скоростью в нижнем высокоскоростном слое v_1. Дальнейшее уменьшение угла θ_0 (напомним, что $\theta_0 < 0$ и уменьшение угла θ_0 соответствует увеличению модуля $|\theta_0 - \alpha|$) приведет к тому, что кажущаяся скорость v_k (13) будет меньше скорости высокоскоростного слоя v_1. При этом самая верхняя из дифрагированных волн, рожденных в точке P_1, начнет обгонять точку пересечения падающего фронта и наклонного участка границы. Однако фронт преломленной волны должен оставаться непрерывным. Для обеспечения этого верхняя дифрагированная волна претерпевает “обратное” преломление и начинает распространяться в верхнем полупространстве навстречу падающей волне. Угол этого “обратного” преломления удовлетворяет закону Снеллиуса и равен

$$\theta_{h1} = -\pi + \alpha + \beta_c, \tag{14}$$

а сама волна, которую мы обозначим h_1, называется головной волной.

Пересечение фронтов падающей и головной волны формируют линию ABP_1 (рис. 4), на которой для вязкого решения уравнения эйконала (1) происходит разрыв поля лучевых векторов и излом времени первых вступлений. Правый отрезок этой ломанной BP_1 образует с осью z, в соответствии с леммой из приложения А, угол

$$\theta_{l1} = \frac{1}{2}(\theta_0 + \theta_{h1}). \tag{15}$$

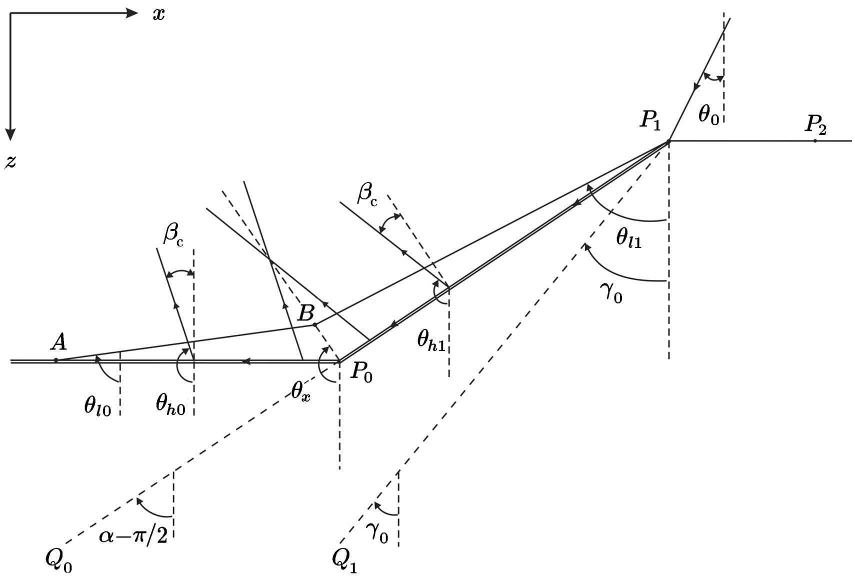

Рис. 4. Падение плоской волны на границу G при закритическом угле θ_0

Приграничная волна, дойдя до угла P_0, формирует на точке P_0 новый конус дифракции. Верхняя дифрагированная волна из этого конуса распространяется вдоль левого горизонтального участка границы G. Эта приграничная волна также претерпевает "обратное" преломление и распространяется навстречу падающей волне под углом

$$\theta_{h0} = -\pi + \beta_c. \tag{16}$$

Эта "обратно преломленная" волна является головной волной h_0, распространяющейся над левым горизонтальным участком границы. Пересечение фронта головной волны h_0 и фронта падающей волны определяет отрезок AB (рис. 4). Этот отрезок образует с осью z угол

$$\theta_{l0} = \frac{1}{2}(\theta_0 + \theta_{h0}). \tag{17}$$

Кроме того, фронты головных волн h_0 и h_1 также пересекаются друг с другом. Это определяет еще одну линию излома времени первых вступлений — отрезок P_0B. Угол, образуемый этим отрезком с осью z, равен

$$\theta_x = \frac{1}{2}(\theta_{h0} + \theta_{h1}). \tag{18}$$

Важно подчеркнуть, что в силу линейности волнового уравнения, пересечение фронтов волн не приводит к их взаимодействию, для волн выполняется принцип суперпозиции. Все построенные нами выше линии пересечения фронтов — геометрические места точек, которые разделяют области гладкости вязкого решения уравнения эйконала (1). На них претерпевает разрыв поле лучевых векторов и происходит излом времени первых вступлений. Эти разрывы получаются вследствие того, что вязкое решение уравнения эйконала "склеено" из различных локальных решений уравнения (1) и эти линии суть линии их склейки. Поэтому область ABP_1P_0A есть просто множество точек, в которые первыми приходят головные волны, сформировавшиеся на отрезках AP_0 и P_0P_1 в результате "обратного" преломления приграничной волны.

В сектор $Q_1P_1P_2$ первой приходит волна, преломленная на границе P_1P_2 под углом γ_0, в область $Q_0P_0P_1Q_1$ — волны, дифрагированные на угле P_1, а в область AP_0Q_0 — волны, дифрагированные на угле P_0.

Координаты точек A и B, а также уравнения для отрезков AB, BP_1 и P_0B, выраженные через параметры задачи, приведены в приложении Б. Эти формулы позволяют в явном виде вычислить лучевые векторы $\vec{p}(x,z)$ для всех точек $z > 0$ и по ним рассчитать поле времен первых вступлений. Это поле лучевых векторов мы будем обозначать $\vec{p}_F(x,z)$, а согласованные с ним первые вступления — $t_F(x,z)$. Функция $t_F(x,z)$ является вязким решением уравнения эйконала (1). Мы будем далее называть время $t_F(x,z)$ и лучевое поле $\vec{p}_F(x,z)$ аналитическим решением для первых вступлений.

6. Нисходящее аналитическое решение для закритических углов

В этом пункте мы опишем для закритических углов еще одно решение уравнения закона сохранения лучевого параметра (5). Это решение состоит из волн, распространяющихся только в положительном направлении оси z, и поэтому мы называем его нисходящим аналитическим решением.

Пусть $\vec{p}_{\mathrm{D}}(x,z)$ — поле лучевых векторов этого решения, а $t_{\mathrm{D}}(x,z)$ — время прихода этих лучей. Над границей G поле $\vec{p}_{\mathrm{D}}(x,z)$ определено лучами падающей волны. Под горизонтальными участками границы G поле $\vec{p}_{\mathrm{D}}(x,z)$ состоит из лучей, преломленных на этих участках, а под наклонным участком — из лучей волны, дифрагированной на точке P_1, и заполняющих конус разрежения. Правая граница этого конуса выходит из точки P_1 под углом $\gamma_0 = \arcsin(v_1/v_0 \sin\theta_0)$, а левая — под углом $\hat{\gamma}_1 = -\pi/2 + \alpha$ параллельно наклонному участку границы. Линия разрыва поля $\vec{p}_{\mathrm{D}}(x,z)$ выходит из вершины P_0 под углом $\hat{\gamma}_s = (\gamma_0 + \hat{\gamma}_1)/2$ и образуется вследствие пересечения лучей из конуса дифракции и лучей, преломленных на левом горизонтальном участке границы.

Очевидно, что x-компонента $p^x_{\mathrm{D}}(x,z)$ является слабым разрывным решением уравнения (5). Кроме того, это решение является естественным пределом вязкого решения при уменьшении угла падения θ_0 от докритических к закритическим значениям. Действительно, при $\theta_0 \longrightarrow -\beta_{\mathrm{c}} + \alpha$ (справа) левая граница конуса разрежения $\gamma_1 \to \hat{\gamma}_1$ и доходит до наклонного участка границы G. Дальнейшее уменьшение θ_0 не изменяет положение этой границы, а лишь уменьшает угол γ_0, т. е. приводит только к изменению положения правой границы зоны разрежения, линии разрыва и угла наклона лучей, преломленных на горизонтальных участках границы.

Далее будет показано, что $p^x_{\mathrm{D}}(x,z)$ является вязким решением задачи (5), в которой поток $F = -\sqrt{s^2 - p_x^2}$ заменен на $\hat{F} = -\sqrt{s^2 - \mathrm{clip}(p_x, s)^2}$. Мы увидим также, что $t_{\mathrm{D}}(x,z)$ есть время прихода доминантной волны.

Построенные нами в пунктах 5 и 6 аналитические решения $\vec{p}_F(x,z)$ и $\vec{p}_{\mathrm{D}}(x,z)$ основываются на рассуждениях физического уровня строгости и нуждаются в подтверждении численными расчетами.

7. Численное решение первых вступлений для закритических углов

На рис. 5 а) с интервалом 100 мс изображены изохроны поля первых вступлений $t_F(x,z)$ для плоской волны, падающей на границу G под углом $\theta_0 = -25°$. Эти первые вступления были рассчитаны с помощью алгоритма FIM (Fast Iterative Method) [21]. Обратим внимание на характерный для головных волн зигзагообразный излом изохрон, начинающийся в точке $P_1 = (4618, 500)$ и увеличивающийся при уменьшении координаты x.

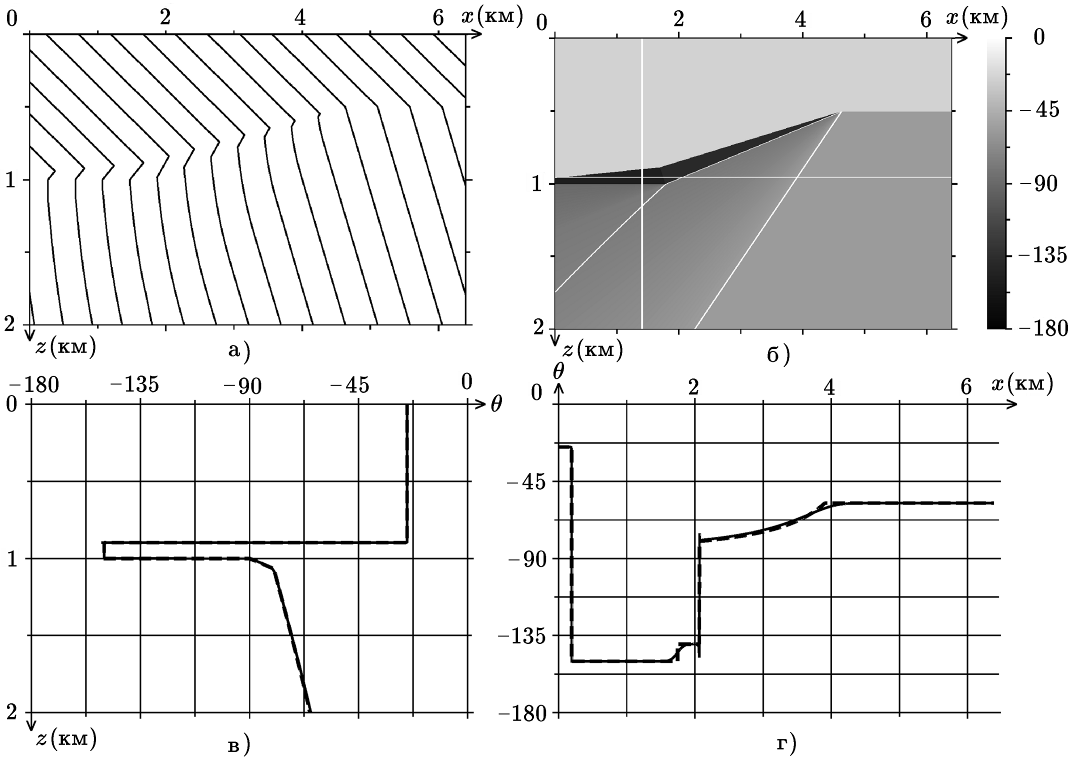

Рис. 5. Преломление плоской волны для угла $\theta_0 = -25°$: а) — изохроны первых вступлений; б) — карта углов наклона лучевых векторов $\theta(x,z)$; в) — вертикальное сечение вдоль линии $x = 1400$ м; г) — горизонтальное сечение вдоль линии $z = 950$ м

Для проверки аналитического решения $t_F(x,z)$ по значениям $t_{\mathrm{ij}} = t_F(x_{\mathrm{i}}, z_j)$, рассчитанных численно в узлах равномерной сетки по методу FIM, с помощью конечных разностей оценивались компоненты лучевого вектора

$$\begin{cases} p_x^{ij} = \dfrac{1}{\Delta x}(t_{i+1,j} - t_{i,j}), \\ p_{\mathrm{z}}^{ij} = \dfrac{1}{\Delta z}(t_{i,j+1} - t_{i,j}), \end{cases} \tag{19}$$

которые затем пересчитывались в его углы наклона

$$\theta_{ij} = \arcsin(p_x^{ij}\, v_{ij}). \tag{20}$$

На рис. 5 б) изображена карта функции $\theta(x, z)$ для аналитического решения первых вступлений $t_F(x, z)$, которая совпадает с рассчитанной численно по формуле (20) картой сеточной функции θ_{ij}. Обратим внимание на этом рисунке на узкую темную зону, расположенную над границей G и соответствующую области с головными волнами. В этой области углы наклона лучевых векторов $\theta < -\pi/2$, что соответствует распространению волн против оси z.

Лучи, выходящие из вершин углов P_0 и P_1 на рис. 5 б), соответствуют положению "ударной" волны и правого края зоны разрежения. Вертикальная и горизонтальная линии на этом рисунке — сечения функции $\theta(x, z)$ при $x = 1400$ м и при $z = 950$ м, графики которых изображены на рис. 5 в) и 5 г). Пунктирная линия соответствует аналитическому, а сплошная — численному решению, вычисленному с помощью формул (19), (20). Хорошее совпадение аналитического и численного решений подтверждает правильность предыдущих построений.

8. Численное решение для нисходящих волн

На рис. 6 приведены результаты численного решения задачи (5) для закритического угла $\theta_0 = -25°$ с помощью конечно-разностной схемы Годунова (9) и проведено сравнение численного и аналитического нисходящих решений $\vec{p}_{\mathrm{D}}(x, z)$.

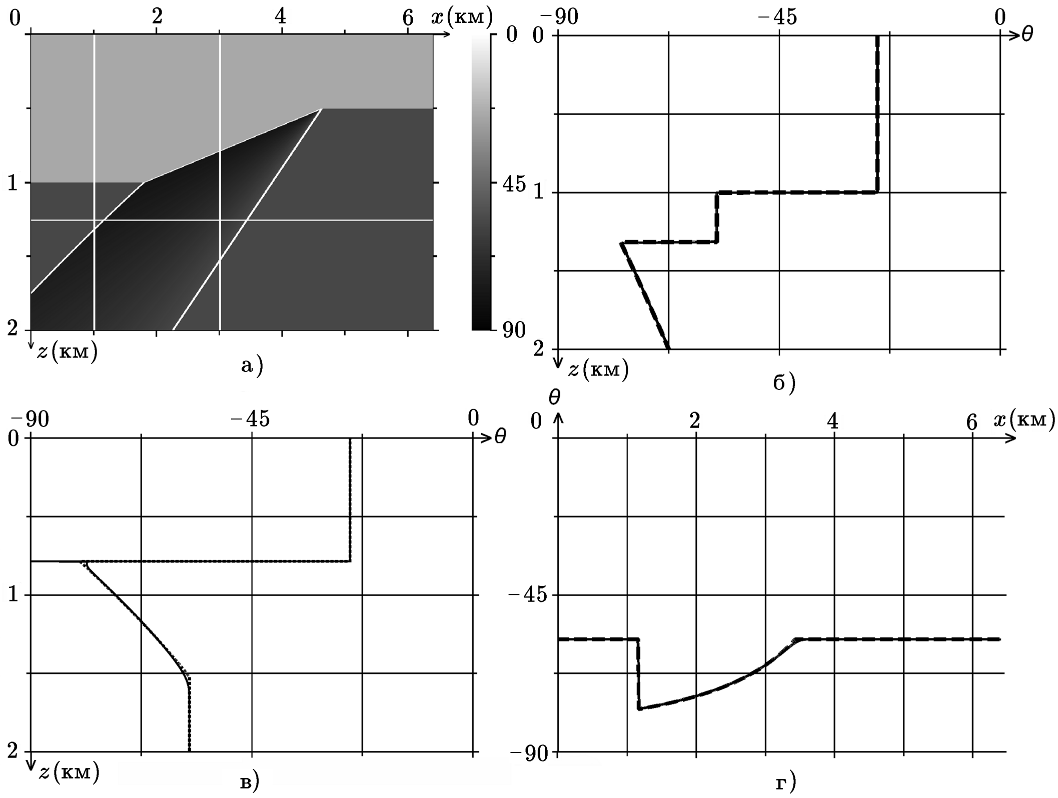

Рис. 6. Функции $\theta(x, z)$ для точного и численного нисходящего решений $\vec{p}_{\mathrm{D}}(x, z)$ для угла $\theta_0 = -25°$: а) — карта углов наклона; б) — вертикальное сечение для $x = 1000$ м; в) — вертикальное сечение для $x = 3000$ м; г) — горизонтальное сечение для $z = 1250$ м

На рис. 6 а) изображена карта углов наклона для аналитического нисходящего решения $\vec{p}_{\mathrm{D}}(x, z)$, совпадающая с картой углов наклона численного нисходящего решения. На этой карте еще изображены линия разрыва (слева) и правая граница конуса разрежения (справа), а также линии двух вертикальных и одного горизонтального сечений функций $\theta_{\mathrm{D}}(x,z)$. Графики этих сечений — численного нисходящего решения (сплошная линия) и аналитического нисходящего решения (пунктирная линия) — изображены на рис. 6 б)–6 г). Совпадение этих решений подтверждает правильность построения аналитического нисходящего решения и утверждения, что нисходящее решение является вязким решением уравнения (5) с модифицированной функцией потока $\hat{F} = -\sqrt{s^2 - \mathrm{clip}(u,s)^2}$.

9. Сравнение полей времен

В этом пункте мы сравним между собой время первых вступлений $t_F(x,z)$, решение $t_{\mathrm{HJ}}(x,z)$ уравнения Гамильтона–Якоби (3) и время $t_{\mathrm{D}}(x,z)$, соответствующее лучевому полю, рассчитанному с помощью закона сохранения лучевого параметра (5).

Для докритических углов падения эти три функции непрерывны и совпадают. Для вычисления времени первых вступлений $t_F(x,z)$ по полю лучевых векторов $\vec{p}_F(x,z)$ может быть использован интеграл (7). Эта формула справедлива как для докритических, так и для закритических углов. Последнее обеспечивается тем, что поле лучей для первых вступлений включает в себя область ABP_1P_0, содержащую головные волны. Головные волны распространяются против оси z, поэтому в этой области $p_z < 0$. Следовательно, вклад в интеграл (7) по участку, пересекающему эту область, будет отрицательным. Именно этот отрицательный вклад и обуславливает характерный зигзагообразный излом на изохронах первых вступлений, соответствующий головным волнам.

Вязкое решение $t_{\mathrm{HJ}}(x,z)$ уравнения Гамильтона–Якоби (3) является непрерывной функцией [22] и учитывает только волны, распространяющиеся в положительном направлении оси z. Вследствие этого функция $t_{\mathrm{HJ}}(x,z)$ для закритических углов θ_0 отличается от времени первых вступлений $t_F(x,z)$, которое учитывает головные волны, распространяющиеся против оси z.

Для закритических углов падения θ_0 время $t_{\mathrm{D}}(x,z)$, соответствующее полю лучевых векторов $\vec{p}_{\mathrm{D}}(x,z)$, имеет на ломанной линии AP_0P_1 разрыв. В силу этого, время $t_{\mathrm{D}}(x,z)$ отличается как от времени $t_F(x,z)$, так и от времени $t_{\mathrm{HJ}}(x,z)$.

Схема Годунова (9) позволяет численно рассчитывать поле лучей $\vec{p}_{\mathrm{D}}(x,z)$. Однако вычисление времени $t_{\mathrm{D}}(x,z)$ для закритических углов с помощью интеграла (7) дает неверный результат. Действительно, функция $t(x,z)$, вычисленная с помощью этого интеграла, будет непрерывна по z, в то время как истинное время $t_{\mathrm{D}}(x,z)$ имеет на ломанной линии AP_0P_1 разрыв.

Модифицируем интеграл (7) таким образом, чтобы он позволял вычислять время $t_{\mathrm{D}}(x,z)$ по полю лучевых векторов $\vec{p}_{\mathrm{D}}(x,z)$ как для докритических, так и для закритических углов θ_0. Воспользуемся тем, что в области гладкости функции $t(x,z)$ лучевое поле $\vec{p}(x,z) = \nabla t(x,z)$ является потенциальным и его циркуляция по любому замкнутому контуру, лежащему внутри этой области гладкости, равна нулю. Это не выполняется вблизи линии AP_0P_1, если участок этой линии попадает внутрь контура циркуляции. Исходя из этого, для вычисления времени прихода нисходящей волны предлагается следующая модификация интегральной суммы:

$$t_j^{n+1} = \begin{cases} t_j^n + p_{z,j}^n \Delta z, & \text{если } \hat{c}_j^n < \varepsilon \Delta l / v_{\max}, \\ t_j^n + (p_{x,j-1}^n \Delta x + p_{z,j-1}^n \Delta z), & \text{если } \hat{c}_j^n > \varepsilon \Delta l / v_{\max} \text{ и } p_{x,j-1}^n > 0, \\ t_j^n + (-p_{x,j+1}^n \Delta x + p_{z,j+1}^n \Delta z), & \text{если } \hat{c}_j^n > \varepsilon \Delta l / v_{\max} \text{ и } p_{x,j+1}^n < 0. \end{cases} \tag{21}$$

Здесь $\hat{c}_j^{\,n} = \min(c^n_{j-1}, c^n_j)$, $c^n_j = p^n_{x,j}\Delta x + p^n_{z,j+1}\Delta z - p^{n+1}_{x,j+1}\Delta x - p^{n+1}_{z,j}\Delta z$ — циркуляция поля $\vec{p}_j^{\,n}$ по замкнутому контуру, соединяющему точки: $\vec{r}_j^{\,n} \to \vec{r}^{\,n}_{j+1} \to \vec{r}^{\,n+1}_{j+1} \to \vec{r}_j^{\,n+1} \to \vec{r}_j^{\,n}$ (вершины ячейки вычислительной сетки); $\Delta l = \min(\Delta x, \Delta z)$ — минимальная сторона этой ячейки, $v_{\max}$ — максимальное значение скорости, $\varepsilon \ll 1$ — малый параметр, определяющей уровень разделения гладких потенциальных областей (в приведенных ниже примерах $\varepsilon = 0.1$). Верхняя строка в формуле (21) соответствует приходу сигнала в точку $\vec{r}_j^{\,n+1}$ из точки $\vec{r}_j^{\,n}$, средняя — приходу сигнала в точку $\vec{r}_j^{\,n+1}$ из точки $\vec{r}^{\,n}_{j-1}$ слева, а нижняя — приходу сигнала в точку $\vec{r}_j^{\,n+1}$ из точки $\vec{r}^{\,n}_{j+1}$ справа.

На рис. 7 для угла $\theta_0 = -25°$ слева изображены изолинии времени первых вступлений $t_F(x,z)$, времени Гамильтона–Якоби $t_{\rm HJ}(x,z)$ и времени прихода нисходящих волн $t_{\rm D}(x,z)$. Время первых вступлений $t_F(x,z)$ было рассчитано численно с помощью алгоритма FIM [21]; время $t_{\rm HJ}(x,z)$ вычислялось по разностной схеме первого порядка точности, описанной в работе [13]; время $t_{\rm D}(x,z)$ вычислялось по формуле (21). Справа приведена разность между этими временами и теоретическим временем прихода нисходящих волн $t_{\rm D}^{\rm theor}(x,z)$. Видно, что для времени первых вступлений и времени Гамильтона–Якоби эта разность достигает величин порядка 100 мс. Численно рассчитанное время $t_{\rm D}(x,z)$ практически всюду совпадают с теоретическим.

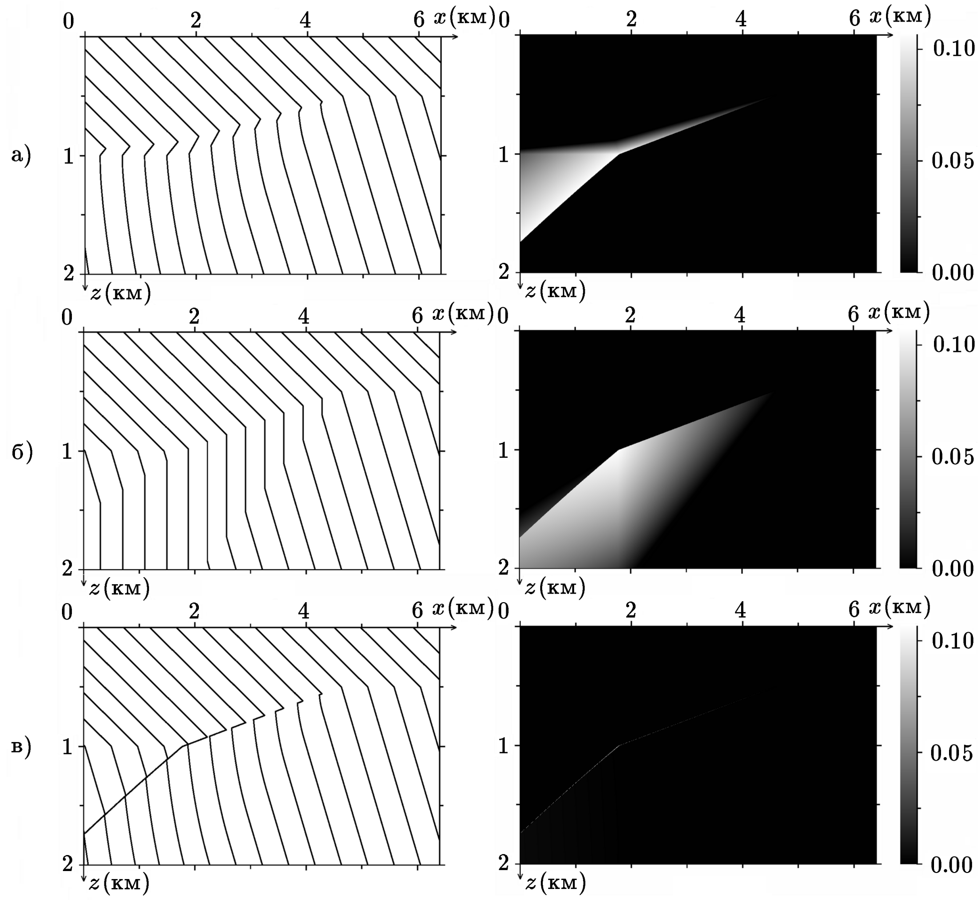

Рис. 7. Изолинии времени вступления волн (слева) и их разность со временем $t_{\rm D}(x,z)$ (справа) для угла $\theta_0 = -25°$: а) — время первых вступлений $t_F(x,z)$; б) — время $t_{\rm HJ(x,z)}$ для уравнения Гамильтона–Якоби; в) — время $t_{\rm D}(x,z)$ для уравнения лучевого параметра

Изолинии времени первых вступлений, времени Гамильтона–Якоби и времени лучевого параметра были наложены на мгновенные снимки волнового поля, рассчитанного с помощью конечно-разностного решения волнового уравнения для закритического угла падения $\theta_0 = -25°$. На рис. 8 а) изображены снимки волнового поля с изолиниями первых вступлений $t_F(x, z)$, на рис. 8 б) — снимки с изолиниями времени $t_{\mathrm{HJ}}(x, z)$, а на рис. 8 в) — с изолиниями времени $t_{\mathrm{D}}(x, z)$. Хорошо видно, что изолинии времени лучевого параметра совпадают с наиболее энергетически значимыми волнами, а изолинии времени первых вступлений и изолинии времени Гамильтона–Якоби нет. Действительно, изолинии времени первых вступлений ложатся на высокоэнергетические волны только под наклонным участком границы, а изолинии Гамильтона–Якоби — только под левым горизонтальным участком. Таким образом, времена прихода нисходящих волн $t_{\mathrm{D}}(x, z)$, рассчитанные по формулам (9) и (21), наилучшим образом совпадают с доминантными волнами и наиболее предпочтительны для использования в престековой глубинной миграции.

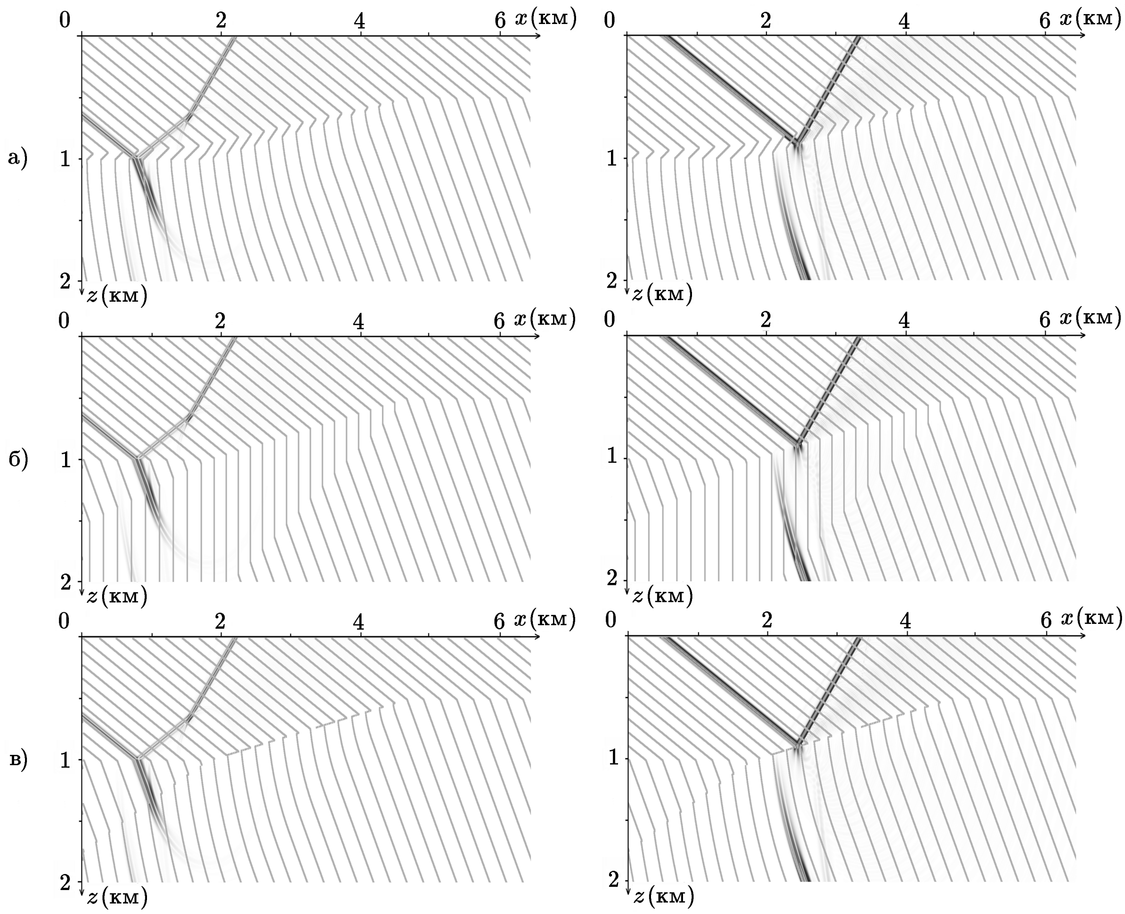

Рис. 8. Снимки волнового поля для двух моментов времени: а) — с изолиниями первых вступлений; б) — с изолиниями Гамильтона–Якоби; в) — с изолиниями времени прихода нисходящих волн

10. Заключение

В приближении геометрической акустики получено аналитическое вязкое решение уравнения эйконала, описывающее преломление плоской волны на границе, содержащей вогнутый и выпуклый углы и разделяющей низкоскоростное и высокоскоростное полупространства. Показано, что под вогнутым углом, вследствие пересечения преломленных на сторонах этого угла фронтов волн, поле лучевых векторов этого решения имеет разрыв на линии, выходящей из вершины этого угла и совпадающей с биссектрисой угла между волновыми векторами преломленных волн. Время первых вступлений испытывает на этой линии излом, а его первые производные — разрыв. Под выпуклым углом поле лучевых векторов образует зону разрежения, ограниченную лучами, выходящими из вершины этого угла в направлении волновых векторов волн, преломленных на сторонах этого угла. Эти лучи ограничивают конус, образованный в результате дифракции падающей волны на вершине этого угла. Это — конус дифракции, постулированный Келлером [18] в его геометрической теории дифракции.

Проведено сравнение численных решений уравнения эйконала (1), уравнения Гамильтона–Якоби (3) и закона сохранения лучевого параметра (5). Показано, что поле времен первых вступлений $t_F(x,z)$, поле времен уравнения Гамильтона–Якоби $t_{\mathrm{HJ}}(x,z)$ и поле времен $t_{\mathrm{D}}(x,z)$ для закона сохранения лучевого параметра совпадают только для докритических углов падения. Для закритических углов падения все они различны. Предложена конечно-разностная схема для расчета времени лучевого параметра $t_{\mathrm{D}}(x,z)$ совместно с лучевыми векторами нисходящих волн. Показано, что для закритических углов это время соответствует нисходящим доминантным волнам и, вследствие этого, является наиболее оптимальным временем для глубинной престековой миграции.

Благодарности. Автор выражает благодарность В.А. Седайкиной за предоставление программы для вычисления времени первых вступлений по методу FIM, А.Н. Данилину за помощь при численном решении волнового уравнения и А.А. Кремлеву за помощь при оформлении рисунков.

11. Приложение А

Рассмотрим падение плоской волны под углом θ_0 на тупой выпуклый угол P_1 (рис. 1), граница которого состоит из точек:

$$G_1 = \left\{ (x, z_G): \ z_G = \begin{cases} -x\,\mathrm{tg}\alpha & \text{при } x < 0, \\ \quad 0 & \text{при } x > 0 \end{cases} \right\}, \tag{22}$$

где $x \in \mathbb{R}^1$, а $\alpha \in [0, \pi/2)$ — острый угол. Формула (22) описывает границу G вблизи точки P_1 в локальных координатах (x', z') с началом координат в точке P_1. (В формуле (22) и далее штрихи опущены). Пусть $\gamma_0 = \arcsin(v_1/v_0 \sin\theta_0)$ и $\gamma_1 = \arcsin\big(v_1/v_0 \sin(\theta_0 - \alpha)\big) + \alpha$ — углы преломления плоской волны на горизонтальном и наклонном участках границы. Тогда очевидно, что при $z < z_G$ лучевой параметр $p_x \equiv u = s_0 \sin\theta_0$, а при $z \ge z_G$ этот лучевой параметр удовлетворяет начальной задаче:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial x}\sqrt{s_1^2 - u^2} & \text{при } x \in \mathbb{R}^1, \ z > z_G, \\ u(x, z_G) = \begin{cases} s_1 \sin\gamma_1 & \text{при } x < 0, \\ s_1 \sin\gamma_0 & \text{при } x > 0. \end{cases} \end{cases} \tag{23}$$

Решение задачи (23) при $z > z_G$ ищем в виде

$$u(x,z) = \begin{cases} s_1 \sin\gamma_1 & \text{при } x/z < \operatorname{tg}\gamma_1, \\ w(x/z) & \text{при } \operatorname{tg}\gamma_1 < x/z < \operatorname{tg}\gamma_0, \\ s_1 \sin\gamma_0 & \text{при } x/z > \operatorname{tg}\gamma_0, \end{cases} \tag{24}$$

где $w(\xi)$ — неизвестная функция. Функция $u(x,z)$ (24) постоянна вне конуса K, образованного лучами, выходящими из начала координат под углами γ_0 и γ_1, а внутри этого конуса описывается функцией $w(x/z)$, которая постоянна на лучах, лежащих внутри этого конуса. Пусть $\xi(x,z) = x/z$, $w(\xi) = w(\xi(x,z))$. Подставляя эту функцию в уравнение (23), получим для нее уравнение

$$w'(\xi)\left[\frac{w}{\sqrt{s_1^2 - w^2}} - \xi\right] = 0,$$

которое выполняется, если справедливо одно из двух равенств:

$$\begin{cases} w(\xi) = \text{const}, \\ w = \xi\sqrt{s_1^2 - w^2}\,. \end{cases}$$

Выбирая второе из них и разрешая его относительно w, получим

$$\begin{cases} w\left(\dfrac{x}{z}\right) = s_1 \dfrac{x/z}{\sqrt{1 + x^2/z^2}} = s_1 \sin\varphi(x,z), \\ \varphi(x,z) = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}\,. \end{cases} \tag{25}$$

Очевидно, что $\varphi(x,z)$ — угол между осью z и лучом, выходящим из начала координат в точку (x,z). Поэтому решение (24), (25) есть непрерывная кусочно-гладкая функция. Вне конуса K решение $u(x,z)$ ((24), (25)) совпадает с проекцией на ось x лучевых векторов, преломленных на горизонтальном и наклонном участках границы G_1, а внутри конуса K — с проекцией лучевых векторов $\vec{p}$ с модулем $|\vec{p}\,| = s_1$, выходящих из начала координат и заполняющих конус K. Очевидно, что этот конус соответствует дифракционному конусу, введенному Келлером [18] в его геометрической теории дифракции. В теории консервативных уравнений сечения решения $u(x,z)\,|_{z=\text{const}}$ (при интерпретации переменной z как времени) принято называть волнами разрежения. Мы также будем называть эту зону зоной разрежения, тем более, что расхождение лучей соответствует уменьшению амплитуды волны.

Рассмотрим теперь преломление плоской волны на вогнутом угле P_0 (рис. 1), т.е. пусть граница G_0 есть

$$G_0 = \left\{(x, z_G):\ z_G = \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{при } x < 0, \\ -x\,\text{tg}\alpha & \text{при } x > 0 \end{array}\right\}\right\}. \tag{26}$$

Здесь также (x,z) — локальные координаты, отсчитанные от точки P_0. В этом случае лучевой параметр $p_x = u$ удовлетворяет в области $z \geq 0$ классической задаче Римана:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial x}\sqrt{s_1^2 - u^2}, & z > 0, \\ u(x,0) = \begin{cases} s_1 \sin\gamma_0, & x < 0, \\ s_1\sin\gamma_1, & x > 0. \end{cases} \end{cases} \tag{27}$$

Вязкое решение этой задачи хорошо известно (см., например, [17, 20]):

$$u(x,z) = \begin{cases} s_1 \sin\gamma_0, & x/z < \operatorname{tg}\gamma_s, \\ s_1 \sin\gamma_1, & x/z > \operatorname{tg}\gamma_s, \end{cases} \tag{28}$$

где $\gamma_s = (\gamma_0 + \gamma_1)/2$. Это кусочно-постоянное решение с разрывом на линии, выходящей из начала координат под углом γ_s к оси z. На этой линии, которую в теории консервативных уравнений принято называть ударной волной, поле лучевых векторов претерпевает разрыв, а время прихода луча хоть и остается непрерывным, однако имеет излом, соответствующий разрыву первых производных. С физической точки зрения эта линия излома времени первых вступлений соответствует пересечению фронтов волн, преломленных на горизонтальном и наклонном участках границы. При этом линия излома есть геометрическое место точек, для которых время прихода волны слева совпадает со временем прихода волны справа. Это наблюдение позволяет нам сформулировать лемму, с помощью которой можно легко находить линии разрывов, не прибегая к теории консервативных дифференциальных уравнений.

Лемма. *Пусть $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ — лучевые векторы двух плоских волн, распространяющихся в однородном пространстве $\mathbb{R}^2$ со скоростью v и пусть $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = 1/v$. Если фазы этих волн совпадают в некоторой точке O, то они будут совпадать на прямой линии L, проходящей через эту точку и параллельной вектору $\vec{p}_x = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$, т. е. являющейся биссектрисой угла, образованного векторами $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$.*

Доказательство. Доказательство этого утверждения тривиально и основывается на равенстве фаз этих волн: $\vec{p}_1\vec{l} = \vec{p}_2\vec{l}$. Здесь $\vec{l}$ — произвольный вектор, выходящий из точки O и лежащий на прямой L. Если θ_1 и θ_2 — углы, которые векторы $\vec{p}_1$и $\vec{p}_2$ образуют с осью z, то отсюда следует, что $\theta_L = (\theta_1 + \theta_2)/2$ — угол наклона линии L. Это полностью согласуется с формулой для угла наклона ударной волны γ_s. □

12. Приложение Б

Выразим координаты точек A и B и уравнения для отрезков AB, BP_1 и P_0B через известные углы θ_{l0}, θ_{l1}, θ_x (14)–(18) и координаты точек $P_0 = (x_0, z_0)$, $P_1 = (x_1, z_1)$ (рис. 4).

Пусть $\chi = \angle P_0BP_1 = \theta_{l1} - \theta_x$ и $\psi = \angle BP_1P_0 = -\pi/2 + \alpha - \theta_{l1}$ — острые углы треугольника P_0BP_1. Тогда из теоремы синусов имеем

$$\begin{cases} P_0B = P_0P_1 \dfrac{\sin\psi}{\sin\chi}, \\ P_0P_1 = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}\,. \end{cases} \tag{29}$$

Координаты точки B:

$$\begin{cases} x_B = x_0 + P_0B \sin\theta_x, \\ z_B = x_0 + P_0B \cos\theta_x. \end{cases} \tag{30}$$

Аналогично, в треугольнике ABP_0: $\angle P_0AB = \pi/2 + \theta_{l0}$ и $\angle AP_0B = -\pi/2 - \theta_x$, откуда следует

$$\begin{cases} AB = -P_0B\dfrac{\cos\theta_x}{\cos\theta_{l0}}, \\ x_A = x_B + ABt\sin\theta_{l0}, \\ z_A = z_0. \end{cases} \tag{31}$$

Это позволяет получить уравнения для отрезков AB, BP_1 и P_0B:

$$\begin{cases} AB\ :\ x(z) = x_B + (z - z_B)\mathrm{tg}\theta_{l0}, & x \in [x_A, x_B], \\ BP_1 :\ x(z) = x_1 + (z - z_1)\mathrm{tg}\theta_{l1}, & x \in [x_B, x_1], \\ P_0B :\ x(z) = x_0 + (z - z_0)\mathrm{tg}\theta_x, & x \in [x_B, x_0]. \end{cases} \tag{32}$$

Формулы (29)–(32) и (14)–(18) позволяют в явном виде вычислить лучевые векторы $\vec{p}(x,z)$ для всех точек $z > 0$ (рис. 4), и по этому векторному полю вычислить соответствующее ему поле времен $t_F(x,z)$.

Литература

1. **Алексеев А.С., Бабич В.М., Гельчинский Б.Я.** Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. — 1961. — Т. 5. — С. 3–24.
2. **Cerveny V.** Seismic Ray Theory. — Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
3. **Уизем Д.** Линейные и нелинейные волны. Пер. с англ. / А.Б. Шабат. — М.: Мир, 1977.
4. **Аки К., Ричардс П.** Количественная сейсмология. Теория и методы. Том 1. — М.: Мир. 1983.
5. **Sethian J.A.** A fast marching level set method for monotonically advancing fronts // Proc. of the National Academy of Sciences. — 1996. — Vol. 93, № 4. — P. 1591–1595.
6. **Zhao H.** A fast sweeping method for eikonal equations // Mathematics of Computation. — 2005. — Vol. 74. — P. 603–627.
7. **Vidale J.** Finite-difference calculation of travel times // Bull. of the Seismological Society of America. — 1988. — Vol. 78, № 6. — P. 2062–2076.
8. **Podvin P., Lecomte I.** Finite difference computation of traveltimes in very contrasted velocity models: a massively parallel approach and its associated tools // Geophysical J. Int. — 1991. — Vol. 105, № 1. — P. 271–284.
9. **Crandall M., Lions P.** Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. — 1983. — Vol. 277. — P. 1–42.
10. **Никитин А.А, Сердюков А.С., Дучков А.А.** Параллельный алгоритм решения уравнения эйконала для трехмерных задач сейсморазведки // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. — 2015. — Т. 13, вып. 3. — С. 19–28.
11. **Kim S.** The most-energetic traveltime of seismic waves // Applied Mathematics Letters. — 2001. — Vol. 14. — P. 313–319.
12. **Geoltrain S., Brac J.** Can we image complex structures with first-arrival traveltime // Geophysics. — 1993. — Vol. 58, № 4. — P. 564–575.
13. **Van Trier J., Symes W.W.** Upwind finite-difference calculation of traveltimes // Geophysics. — 1991. — Vol. 56. — P. 812–821.

14. **Belfi C.D.** Second and Third Order ENO Methods for the Eikonal Equation. — Houston, Texas, USA: Rice University, 1997. — (Technical report / The Rice Inversion Project).
15. **Quin J., Symes W.W.** An adaptive finite-difference method for traveltimes and amplitudes // Geophysics. — 2002. — Vol. 67. — P. 167–176.
16. **Karlsen K.H., Towers J.D.** Convergence of the Lax-Friedrichs scheme and stability for conservation laws with a discontinuous space-time dependent flux // Chinese Ann. Math. Ser. B. — 2004. — Vol. 25. — P. 287–318.
17. **LeVeque R.J.** Numerical Methods for Conservation Laws. // Basel: Birkhauser Verlag, 1990. — (Lectures in Mathematics, ETH Zürich).
18. **Keller J.B.** Geometrical theory of diffraction // J. Opt. Soc. Am. — 1962. — Vol. 52. — P. 116–130.
19. **Klem-Musatov K.D., Aizenberg A.M.** Seismic modeling by methods of the theory of edge waves // Geophysics. — 1985. — Vol. 57. — P. 90–105.
20. **Годунов С.К.** Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Математический сборник. — 1959. — Т. 47(89), № 3. — С. 271–306.
21. **Jeong W.-K., Whitaker R.** A fast iterative method for eikonal equations // SIAM J. on Scientific Computing. — 2008. — Vol. 30, iss. 5. — P. 2512–2534.
22. **Crandall M.G., Evans L.C., and Lions P.L.** Some properties of viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. of the American Mathematical Society. — 1984. — Vol. 282, iss. 2. — P. 487–502.

Поступила в редакцию 1 ноября 2016 г.,
в окончательном варианте 27 декабря 2016 г.

Литература в транслитерации

1. **Alekseev A.S., Babich V.M., Gel'chinskiy B.Ya.** Luchevoy metod vychisleniya intensivnosti volnovyh frontov // Voprosy dinamicheskoy teorii rasprostraneniya seysmicheskih voln. — 1961. — T. 5. — S. 3–24.
2. **Cerveny V.** Seismic Ray Theory. — Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
3. **Uizem D.** Lineynye i nelineynye volny. Per. s angl. / A.B. SHabat. — M.: Mir, 1977.
4. **Aki K., Richards P.** Kolichestvennaya seysmologiya. Teoriya i metody. Tom 1. — M.: Mir. 1983.
5. **Sethian J.A.** A fast marching level set method for monotonically advancing fronts // Proc. of the National Academy of Sciences. — 1996. — Vol. 93, № 4. — P. 1591–1595.
6. **Zhao H.** A fast sweeping method for eikonal equations // Mathematics of Computation. — 2005. — Vol. 74. — P. 603–627.
7. **Vidale J.** Finite-difference calculation of travel times // Bull. of the Seismological Society of America. — 1988. — Vol. 78, № 6. — P. 2062–2076.
8. **Podvin P., Lecomte I.** Finite difference computation of traveltimes in very contrasted velocity models: a massively parallel approach and its associated tools // Geophysical J. Int. — 1991. — Vol. 105, № 1. — P. 271–284.
9. **Crandall M., Lions P.** Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. — 1983. — Vol. 277. — P. 1–42.
10. **Nikitin A.A, Serdyukov A.S., Duchkov A.A.** Parallel'nyy algoritm resheniya uravneniya eykonala dlya trekhmernyh zadach seysmorazvedki // Vestnik NGU. Seriya: Informatsionnye tekhnologii. — 2015. — T. 13, vyp. 3. — S. 19–28.
11. **Kim S.** The most-energetic traveltime of seismic waves // Applied Mathematics Letters. — 2001. — Vol. 14. — P. 313–319.

12. **Geoltrain S., Brac J.** Can we image complex structures with first-arrival traveltime // Geophysics. — 1993. — Vol. 58, № 4. — P. 564–575.

13. **Van Trier J., Symes W.W.** Upwind finite-difference calculation of traveltimes // Geophysics. — 1991. — Vol. 56. — P. 812–821.

14. **Belfi C.D.** Second and Third Order ENO Methods for the Eikonal Equation. — Houston, Texas, USA: Rice University, 1997. — (Technical report / The Rice Inversion Project).

15. **Quin J., Symes W.W.** An adaptive finite-difference method for traveltimes and amplitudes // Geophysics. — 2002. — Vol. 67. — P. 167–176.

16. **Karlsen K.H., Towers J.D.** Convergence of the Lax-Friedrichs scheme and stability for conservation laws with a discontinuous space-time dependent flux // Chinese Ann. Math. Ser. B. — 2004. — Vol. 25. — P. 287–318.

17. **LeVeque R.J.** Numerical Methods for Conservation Laws. // Basel: Birkhauser Verlag, 1990. — (Lectures in Mathematics, ETH Zürich).

18. **Keller J.B.** Geometrical theory of diffraction // J. Opt. Soc. Am. — 1962. — Vol. 52. — P. 116–130.

19. **Klem-Musatov K.D., Aizenberg A.M.** Seismic modeling by methods of the theory of edge waves // Geophysics. — 1985. — Vol. 57. — P. 90–105.

20. **Godunov S.K.** Raznostnyy metod chislennogo rascheta razryvnyh resheniy uravneniy gidrodinamiki // Matematicheskiy sbornik. — 1959. — T. 47(89), № 3. — S. 271–306.

21. **Jeong W.-K., Whitaker R.** A fast iterative method for eikonal equations // SIAM J. on Scientific Computing. — 2008. — Vol. 30, iss. 5. — P. 2512–2534.

22. **Crandall M.G., Evans L.C., and Lions P.L.** Some properties of viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. of the American Mathematical Society. — 1984. — Vol. 282, iss. 2. — P. 487–502.