

УДК 538.4

РАСЧЕТ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В КАНАЛАХ  
МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ

Д. А. Бут, Л. К. Ковалев, Ю. М. Никитин,  
И. А. Никитина

(Москва)

Исследуются локальные и интегральные характеристики плоских МГД каналов с учетом продольных и поперечных краевых эффектов и неоднородностей в распределениях проводимости и скорости потока. Проведен анализ влияния конечных размеров изоляционных проставок при продольном краевом эффекте и модульной конструкции боковой стенки при поперечном краевом эффекте на выходные параметры МГД каналов.

Решение задачи основано на сведении исходного квазилинейного эллиптического уравнения для электрического потенциала с учетом закона Ома к интегральному уравнению типа Фредгольма относительно плотности тока.

**1. Введение.** Выходные параметры кондукционных магнитогидродинамических (МГД) устройств сильно зависят от характера распределения скорости  $v$ , проводимости  $\sigma$  и внешнего магнитного поля  $B$ , а также от конструкции проводящих и изоляционных стенок МГД канала. Выявление этой зависимости связано с расчетом электрического поля в канале при фиксированной геометрии стенок и заданных распределенных  $v$ ,  $\sigma$  и  $B$  (кинематические задачи). Такие задачи обычно решаются в двумерной постановке, которая во многих случаях допускается действительным трехмерным характером электрического поля в канале.

Построение решений двумерных кинематических задач играет важную роль при исследовании течений с учетом МГД взаимодействия, которое может проводиться на основе поблочного решения газодинамических и электродинамических задач с использованием итерационных алгоритмов [1].

Основные типы обсуждаемых задач связаны с исследованием поперечного и продольного краевых эффектов в МГД каналах. Подробный теоретический анализ этих эффектов с обзором литературы приведен в монографиях [2, 3], а также в [4–7]. Рассматриваемые задачи обычно сводятся к решению эллиптического уравнения для электрического потенциала  $\phi$  [2]. Такие решения могут быть построены в конечной аналитической форме лишь для частных случаев, когда, например, уравнение потенциала сводится к уравнениям Лапласа или Пуассона. Это возможно, если мало магнитное число Рейнольдса  $R_m$  и проводимость среды постоянна. Второе условие не выполняется для многих практически важных задач, связанных с движением проводящего газа.

При неоднородном распределении проводимости и скорости анализ МГД течения усложняется. В общем случае он может основываться на использовании прямых разностных методов [6], хотя в задачах с разрывными граничными условиями применение этих методов требует большого числа расчетных точек.

Эффективные алгоритмы расчета электрических полей в каналах МГД устройств с учетом секционирования стенок и неоднородных распределений скорости, проводимости потока и магнитного поля могут быть по-

строены также на основе интегральных представлений. Следует отметить, что ядра интегральных уравнений могут в определенной мере «вбирать» разрывность решений на границах между изоляторами и проводниками, что позволяет заметно сократить число расчетных точек по сравнению с прямыми численными методами. Кроме того, переход к интегральным представлениям в ряде случаев облегчает доказательство единственности получаемых решений, что часто представляет самостоятельную проблему в конечно-разностных методах. Интегральные представления при решении электродинамических задач оказываются достаточно эффективными при расчете электрических и магнитных полей (см., например, [7–10]).

**2. Интегральные уравнения для электрического потенциала и плотности тока.** Рассмотрим двумерное МГД течения проводящей среды со скоростью  $\mathbf{v}(x, y)$  и проводимостью  $\sigma(x, y)$  во внешнем магнитном поле  $\mathbf{B}(x, y)$ , ( $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ ,  $\operatorname{rot} \mathbf{B} = 0$ ).

При малых магнитном числе Рейнольдса  $R_m$  и параметре Холла  $\beta$  распределения плотности тока  $\mathbf{j}$  и потенциала  $\varphi$  в безразмерном виде описываются уравнениями

$$(2.1) \quad \mathbf{j} = \sigma(\mathbf{v} \times \mathbf{B} - \nabla\varphi)$$

$$(2.2) \quad \Delta\varphi = (\mathbf{v} \times \mathbf{B} - \nabla\varphi) \nabla \ln \sigma + \mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{v}$$

с граничными условиями на электродах

$$(2.3) \quad \varphi = \pm \Phi_e \quad |_{\text{электрода}}$$

на заземленных проводящих частях конструкции

$$(2.4) \quad \varphi = 0$$

на изоляторах

$$(2.5) \quad \partial\varphi / \partial n = (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_n$$

где  $n$  — единичная нормаль к поверхности канала.

Здесь размеры отнесены к  $h$ ,  $\mathbf{v}$  — к  $v_0$ ,  $\mathbf{B}$  — к  $B_0$ ,  $\sigma$  — к  $\sigma_0$ ,  $\mathbf{j}$  — к  $\sigma_0 v_0 B_0$ ;  $\varphi$  — к  $v_0 B_0 h$ ;  $h$ ,  $v_0$  — соответственно половина межэлектродного расстояния и средняя по сечению скорость на входе в МГД канал;  $B_0$  — максимальная индукция внешнего магнитного поля в канале. В качестве характерной проводимости выбиралась величина

$$\sigma_0 = h \sqrt{\int_0^h \frac{dy}{\sigma}} \quad \text{при } x = 0$$

Основная трудность при реализации интегральных методов решения уравнений типа (2.2) связана с построением функций влияния, определяющих структуру ядер соответствующих интегральных уравнений. Отыскание таких функций непосредственно для (2.2) возможно лишь в отдельных случаях (например, когда (2.2) сводится к уравнению типа

$$\Delta\varphi + k\varphi = f(x, y), \text{ где } k = \text{const} \quad [7, 8].$$

Более широкие возможности связаны с интегральными представлениями общих эллиптических уравнений через функцию Грина для уравнения Лапласа (см., например, [11]). Такая функция определяется только граничными условиями задачи и не зависит от распределения проводимости, скорости потока и топографии магнитного поля. Построение функции Грина для широкого класса задач может быть выполнено с помощью конформного преобразования рассматриваемых областей на канонические, в которых функция Грина известна.

Функция Грина смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа  $\Delta\varphi = 0$  имеет вид [12]

$$G(x_0, y_0, x, y) = -\ln \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} + g(x_0, y_0, x, y)$$

где  $g(x_0, y_0, x, y)$  — аналитическая функция, которая обеспечивает выполнение следующих граничных условий для  $G$ , соответствующих условиям (2.3) — (2.5),  $G = 0$  на поверхности металлических стенок,  $dG/dn = 0$  на изоляторах.

Применяя к (2.2) вторую формулу Грина и используя граничные условия для  $\varphi$  и  $G$ , получим

$$(2.6) \quad \Omega\varphi(x_0, y_0) = \int_{\Gamma_e} \varphi(\gamma) \frac{\partial G(x_0, y_0, \gamma)}{\partial n} d\gamma - \int_{\Gamma_i} [\mathbf{v}(\gamma) \times \mathbf{B}(\gamma)] \mathbf{n} G(x_0, y_0, \gamma) d\gamma + \\ + \iint_S \{[\mathbf{v}(x, y) \times \mathbf{B}(x, y) - \nabla \varphi(x, y)] \nabla \ln \sigma(x, y) + \\ + \mathbf{B}(x, y) \operatorname{rot} \mathbf{v}(x, y)\} G(x_0, y_0, x, y) dx dy$$

где  $\Gamma_e$  — часть границы области, соответствующая проводящим стенкам, а  $\Gamma_i$  — то же для изоляционных стенок,  $S$  — область канала

$$\Omega = \begin{cases} -2\pi, & (x_0, y_0) \in S \\ -\pi, & (x_0, y_0) \in \Gamma \\ 0, & (x_0, y_0) \notin S \cup \Gamma \end{cases}$$

Интегрированием по частям уравнение (2.6) с использованием (2.4) может быть сведено к интегральному уравнению относительно  $\varphi$ .

За счет разрывных граничных условий градиент  $\nabla\varphi$  может иметь особенность, характер которой заранее неизвестен. Результаты анализа будут корректными в строгом смысле, если произведение  $\nabla\varphi (\nabla \ln \sigma) G$  интегрируемо, что выполняется в большинстве практических случаев.

Наибольший практический интерес представляет распределение плотности тока по сечению канала. Определяя градиент  $\nabla_0$  по  $x_0, y_0$  от правой и левой частей (2.6) и используя (2.1), получим интегральное уравнение относительно плотности тока  $\mathbf{j}(j_x, j_y)$

$$(2.7) \quad \mathbf{j}(x_0, y_0) = \sigma(x_0, y_0) \left\{ \mathbf{v}(x_0, y_0) \times \mathbf{B}(x_0, y_0) - \frac{1}{\Omega} \times \right. \\ \times \left[ \int_{\Gamma_e} \varphi(\gamma) \nabla_0 \frac{\partial G(x_0, y_0, \gamma)}{\partial n} d\gamma - \int_{\Gamma_i} \{[\mathbf{v}(\gamma) \times \mathbf{B}(\gamma)] \mathbf{n}\} \times \right. \\ \times \nabla_0 G(x_0, y_0, \gamma) d\gamma + \iint_S [\mathbf{B}(x, y) \operatorname{rot} \mathbf{v}(x, y) - \\ \left. - \mathbf{j}(x, y) \nabla \frac{1}{\sigma(x, y)} \right] \nabla_0 G(x_0, y_0, x, y) dx dy \right\}$$

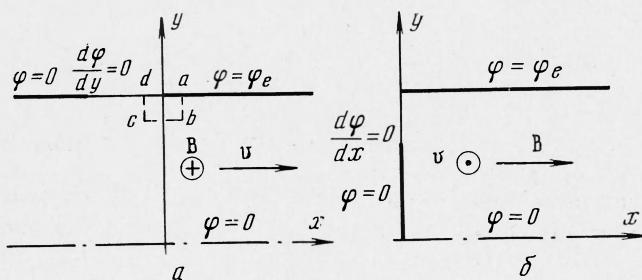
которое эквивалентно системе двух интегральных уравнений относительно соответствующих компонент  $j_x$  и  $j_y$ .

Интегральное уравнение (2.7) имеет особенность за счет  $\nabla_0 G_0$ . Можно показать, что эта особенность слабая и (2.7) является уравнением типа Фредгольма.

Интегральное представление использовалось для расчета двумерного распределения токов в продольном сечении концевой зоны канала и в поперечном сечении рабочей части канала.

Система интегральных уравнений для  $j_x$  и  $j_y$  решалась методом конечных сумм на ЭВМ. Устранение слабой особенности в ядрах интегральных уравнений проводилось в соответствии с [12]. Система решалась итерационным методом, показавшим хорошую сходимость. Так, относительная невязка двух последних итераций, меньшая  $10^{-5}$ , достигалась за 6–8 прогонок.

**3. Построение функций Грина.** При исследовании краевых эффектов в длинных и широких МГД каналах можно пренебречь взаимным влиянием входа и выхода или противоположных боковых стенок. В этом случае



Фиг. 1

в качестве канонической области удобно использовать полуполосу с изолятором в основании (фиг. 1, а). Для такой области функция Грина строится по известной функции Грина задачи Дирихле для полосы путем зеркального отображения этой функции относительно оси  $q$  и имеет вид [10]

(3.1)

$$G(p_0, q_0, p, q) = \frac{1}{2} \ln \frac{[\operatorname{ch}(p - p_0) - \cos(q + q_0)][\operatorname{ch}(p + p_0) - \cos(q + q_0)]}{[\operatorname{ch}(p - p_0) - \cos(q - q_0)][\operatorname{ch}(p + p_0) - \cos(q - q_0)]}$$

На границе канонической области  $G$  удовлетворяет условиям

$$G(p_0, q_0, p, \pi) = G(p_0, q_0, p, 0) = \partial G(p_0, q_0, 0, q) / \partial p = 0$$

Функция Грина (3.1) может быть использована при исследовании концевых эффектов в профицированных МГД каналах, когда проводящие тракты имеют либо непроводящие, либо металлические стенки, отделенные от электродов изоляционными приставками, а также при исследовании цеперечных краевых эффектов в каналах с проводящим модулем на боковой стенке (фиг. 1).

Решение задачи сводится к отысканию функции

$$(3.2) \quad W(x + iy) = p(x, y) + iq(x, y)$$

осуществляющей конформное отображение рассматриваемой области на полуполосу.

После определения отображающей функции (3.2) можно получить аналитическое выражение для контурного интеграла в (2.7)

$$(3.3) \quad \int_{\Gamma_e} \varphi(\gamma) \frac{\partial \tilde{G}(x_0, y_0, \gamma)}{\partial n} d\gamma = \Omega \varphi_e q(x_0, y_0)$$

которое существенно упрощает проведение расчетных и аналитических исследований.

При численных расчетах различных краевых эффектов в каналах МГД устройств (см. фиг. 1) переход от одного исследуемого канала к другому проводился заменой в программе расчета блока, осуществляющего конформное отображение рассматриваемой области  $\{x, y\}$  на каноническую  $\{p, q\}$ .

**4. Продольный краевой эффект в плоском МГД канале.** Исследовалось распределение электрического поля в канале, полубесконечные электроды которого отделены от проводящего сопла изоляционной приставкой шириной  $\delta$ , полувысота канала принята равной единице. Безразмерные распределения скорости  $v\{v_x(y), 0, 0\}$  и проводимости  $\sigma(y)$  задавались в виде

$$(4.1) \quad v_x = M \frac{\operatorname{ch} M - \operatorname{ch} My}{M \operatorname{ch} M - \operatorname{sh} M}, \quad \sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + 1}{(\sigma_2 + 1)(1 + \sigma_1 \sigma_2)}$$

Здесь  $M$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  — постоянные, варьирование которых позволяет задавать различные профили  $v_x$ , и  $\sigma$ .

Использование зависимостей (4.1) соответствует тому, что средняя по сечению канала скорость и электрическое сопротивление рабочего тела в направлении оси  $y$  постоянны

$$\int_0^1 v_x dy = 1, \quad \int_0^1 \sigma^{-1} dy = 1$$

Внешнее магнитное поле считалось однокомпонентным и направленным перпендикулярно плоскости течения. Безразмерное распределение магнитного поля на входе в МГД канал задавалось однородным в межэлектродной зоне ( $B = 1$  при  $x \geq 0$ ) и экспоненциально затухающим вне ее ( $B = \exp(\alpha x)$  при  $x < 0$ ). Такая аппроксимация  $B$  на входе в МГД канал подробно обсуждалась в [13, 14].

Отображение рассматриваемой области на полуполосу осуществлялось функцией

$$W(z) = \operatorname{Arch}[2(1 + e^{\pi z})/(1 - e^{-\pi z}) - 1]$$

Для перехода в интегральных уравнениях к конечным суммам использовались квадратурная формула трапеций в области  $|x| < 3$  и квадратурная формула Эрмита в области  $|x| > 3$ . Полагалось, что при  $|x| > 3$  распределения  $j(j_x, j_y)$  известны и совпадают с асимптотическими распределениями

$$\begin{aligned} j_x &= 0, \quad j_y = 1 - \varphi_e \quad \text{при } x \rightarrow \infty \\ j_x &= 0, \quad j_y = B(x) \quad \text{при } x \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

Как показали расчеты, это предположение выполняется с точностью  $\sim 1\%$ .

Расчеты были выполнены для сетки в 50 и 80 узлов и дали практически тождественные результаты (локальные отличия двух соответствующих решений не превышали 1.5%).

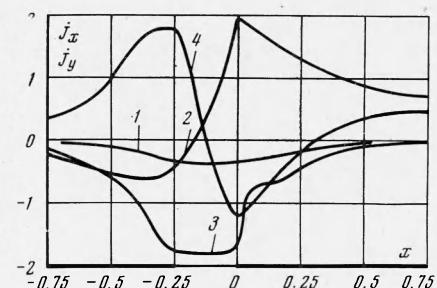
При определении полного тока канала интегрирование  $j_n$  проводилось не по границе электрода, где имеются особые точки ( $j_n \rightarrow \infty$ ), а по близкому к границе контуру, не содержащему точек разрыва (контур  $abcd$  на фиг. 1, a).

На фиг. 2—4 приведены результаты численных расчетов локальных и интегральных характеристик МГД канала при  $\delta = 0.25$ ,  $\varphi_e = 0.75$ .

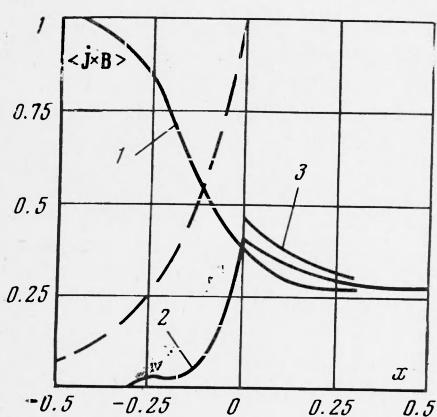
Принималось  $M = 1$ ,  $\sigma_1 = 1$ ,  $\sigma_2 = 3$ , что соответствует близкому к параболическому профилю скорости и пониженной проводимости среды в пристеночном слое.

Распределения  $j_x$  и  $j_y$  компонент плотности тока по длине канала при различных значениях  $y$  представлены на фиг. 2. Там же пунктиром нарисована зависимость  $B$  от  $x$ . Кривые 1 и 3 относятся к распределениям  $j_x(x)$ , кривые 2 и 4 — к распределениям  $j_y(x)$ . Кривые 1, 2 соответствуют  $y = 0.05$ , кривые 3, 4 —  $y = -0.95$ .

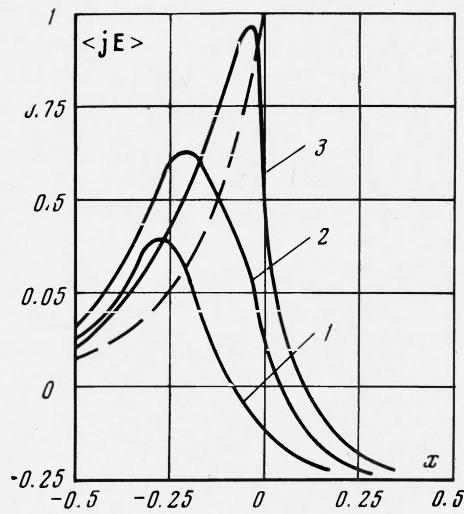
Из характера изменения компонент плотности тока вблизи оси канала (кривые 1, 2) и в пристеночной зоне (кривые 3, 4) видно, что при спадании магнитного поля вне электродов концевой эффект проявляется в виде токов утечки на металлические части сопла и токового вихря на входе в МГД канал. Как показали расчеты, основное влияние на концевые потери оказывает величина изоляционной приставки и градиента магнитного поля. Снижение проводимости в пристеночных областях приводит к увеличению интенсивности токового вихря и снижению токов утечки вдоль изоляционного промежутка. При заданном расходе в канале влияние профиля скорости на интенсивность токового вихря и характер распределения плотности тока в МГД канале относительно невелико.



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Для расчетов интегральных характеристик МГД каналов и построения канонических потоков представляют интерес осредненные по сечению электромагнитные характеристики МГД канала.

На фиг. 3, 4 представлены распределения по длине канала осредненных по сечению  $x = \text{const}$  величин тормозящей силы  $\langle j \times B \rangle$  и электри-

ческой мощности  $\langle jE \rangle$ , отнесенных соответственно к  $\sigma_0 v_0 B_0^2$  и  $\sigma_0 v_0^2 B_0^2$  при различных законах спадания  $B$ . (Кривые 1 соответствуют  $\alpha = 0$ , 2 —  $\alpha = 5$ , 3 —  $\alpha = \infty$ ; штриховая кривая показывает изменение  $B$  при  $\alpha = 5$ ).

Видно, что влияние краевого эффекта на осредненные по сечению характеристики МГД канала оказывается на расстоянии  $\sim 0.25$  калибра от кромки электрода. В остальной части электродной области величины  $\langle j \times B \rangle$ ,  $\langle jE \rangle$  близки к асимптотическим значениям. Снижение проводимости в пристеночном слое приводит к росту осредненной тормозящей силы вблизи электродных кромок канала. Это объясняется снижением токов утечки и увеличением интенсивности токового вихря. При резком спадании магнитного поля вне электродов ( $\alpha \rightarrow \infty$ ) торможение потока в электродной зоне усиливается (кривая 3 на фиг. 3).

Вынос поля за пределы электродов снижает величину тормозящей силы в электродной зоне на входе в МГД канал. При этом тормозящая сила резко возрастает за счет короткозамкнутых токов на проводящих стенках сопла, что приводит к общему увеличению торможения потока на входе в МГД канал.

Помимо торможения потока на входе наличие токов утечки на заземленные элементы конструкции и токовый вихрь вызывают существенное перераспределение энергии во входной зоне МГД канала (см. кривую 1 на фиг. 4). В зоне сопла и изоляционного промежутка наблюдается подвод энергии к потоку.

Расчеты показывают, что величина подводимой к потоку энергии значительно возрастает с увеличением крутизны спадания поля вне электродной зоны. Это объясняется ростом интенсивности токового вихря на входе в МГД канал. При увеличении  $\alpha$  максимум подводимой энергии смещается к электроду. На начальном участке электродной зоны канала величина средней по сечению генерируемой мощности может превышать соответствующие значения в центральной зоне.

**5. Поперечный краевой эффект в прямоугольном МГД канале.** Исследовалось распределение электрического поля в поперечном сечении прямоугольного МГД канала с модульной боковой стенкой (фиг. 1, б). Полувысота канала принята равной единице, ширина изоляционной приставки  $b$ . Внешнее магнитное поле считалось однородным и параллельным электродам, распределения скорости и проводимости в межэлектродном зазоре задавались аналогично п. 4. В [4] показано, что в прямоугольных МГД каналах с относительной шириной электродов  $L \geq 2$  взаимным влиянием краевых эффектов на боковых стенках можно пренебречь и рассматривать полубесконечный канал.

Отображение исходной полубесконечной области на каноническую осуществлялось функцией

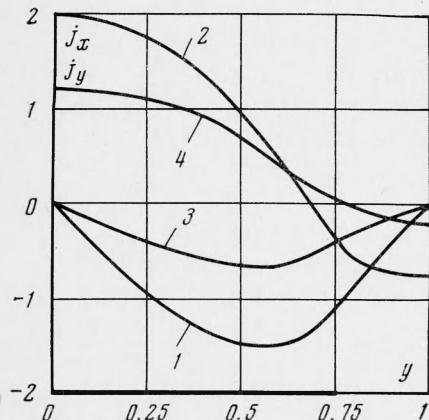
$$W(z) = \operatorname{Arch} [2(\cos \pi z + 1) / (1 - \cos \pi \delta) - 1]$$

Распределения  $j_x$  и  $j_y$  компонент плотности тока по высоте канала для различных значений  $x$  при  $\delta = 0.25$ ,  $\varphi_e = 0.75$ ,  $M = 1$ ,  $\sigma_1 = 1$ ,  $\sigma_2 = 3$  приведены на фиг. 5. Кривые 1 и 3 относятся к распределениям  $j_x(y)$ , кривые 2 и 4 — к распределениям  $j_y(y)$ . Кривые 1, 2 соответствуют  $x = 0.25$ , кривые 3, 4  $x = 0.75$ .

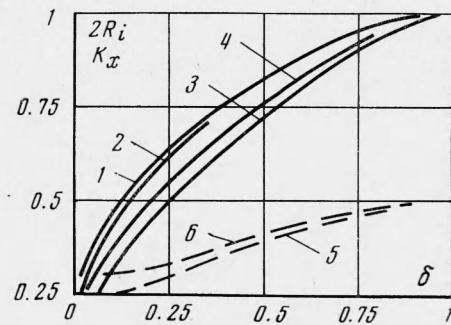
Распределения плотности тока в направлении оси  $y$  вблизи боковой стенки (кривые 1, 2) указывают на наличие интенсивного присоединенного токового вихря на проводящем модуле. Сопоставление полученных данных с результатами исследования поперечного краевого эффекта при  $\sigma = \text{const}$  и  $v = \text{const}$ , выполненного в [4], показало, что при выбран-

ном способе обезразмеривания  $\sigma$  (4.1) снижение  $\sigma$  в приэлектродной зоне приводит к уменьшению токов утечки и к увеличению интенсивности присоединенного токового вихря.

На фиг. 6 даны зависимости коэффициента снижения напряжения холостого хода  $k_x = \Phi_{exx} / v_0 B_0 h$  и внутреннего сопротивления МГД канала  $R_i$  от относительной доли изоляционного промежутка  $\delta$  при различных профилях  $v_x$  и  $\sigma$ . При определении  $k_x$  и  $R_i$  принималось, что ширина электродов равняется двум. Сплошные линии относятся к зависимостям



Фиг. 5



Фиг. 6

$k_x$  от  $\delta$ ; штриховые —  $R_i$  от  $\delta$ . Кривая 1 соответствует расчету с  $\sigma = \text{const}$  и  $M = \infty$  ( $v_x = \text{const}$ ); 2 —  $\sigma = \text{const}$ ,  $M = 10$  (турбулентный профиль); 3 —  $\sigma = \text{const}$ ,  $M = 0$  (пуазейлевский профиль); 4 —  $\sigma = \text{var}$  ( $\sigma_1 = 1$ ,  $\sigma_2 = 3$ ),  $M = 0$ ; 5, 6 — расчетам зависимостей  $R_i$  от  $\delta$  при  $\sigma = \text{const}$  и  $\sigma = \text{var}$  ( $\sigma_1 = 1$ ,  $\sigma_2 = 3$ ). В силу квазилинейности задачи внутреннее сопротивление МГД канала не зависит от распределения скорости и определяется геометрией канала и профилем проводимости  $\sigma(x, y)$  [2]. Видно, что при турбулентном течении среды с постоянной проводимостью коэффициент снижения напряжения холостого хода практически совпадает с  $k_x$  для течения при  $v_x = \text{const}$  (отличие составляет  $1 \div 2\%$ ). Последнее позволяет рассчитывать напряжение холостого хода МГД канала с турбулентным течением рабочего тела по аналитическим зависимостям работы [4].

При пуазейлевском течении (кривая 3) отличие  $k_x$  от напряжения холостого хода МГД канала с  $v_x = \text{const}$  существенно и достигает 15% для  $\delta = 0.25$ . Учет неоднородности в распределении  $\sigma$  (кривая 4) приводит к увеличению  $k_x$  по сравнению с кривой ( $\sigma = \text{const}$  и  $M = 0$ ). Это объясняется снижением токов утечки вдоль изоляционного промежутка при снижении  $\sigma$  в приэлектродной зоне.

Кривые 5 и 6 на фиг. 6 показывают, что с уменьшением относительной доли изоляционного промежутка на боковой стенке внутреннее сопротивление МГД канала уменьшается, что объясняется ростом шунтирующего влияния проводящего модуля. Сопоставление кривых с  $\sigma = \text{const}$  и  $\sigma = \text{var}$  указывает на слабую зависимость полного внутреннего сопротивления МГД канала от профиля проводимости  $\sigma$  при выполнении условия

$$\int_0^1 \sigma^{-1} dy = 1.$$

Рассмотренные примеры показывают возможность применения интегральных методов к расчету сложных электрических полей, описываемых негармоническими потенциалами, с помощью аппарата функций Грина уравнения Лапласа. Интегральный метод может применяться при исследовании краевых эффектов в различных МГД каналах с криволинейными стенками, когда область канала допускает конформное отображение на каноническую полуполосу. Получаемые результаты можно считать строгими в том смысле, что благодаря единственности решений интегральных уравнений Фредгольма они с помощью ЭВМ всегда могут быть достаточно приближены к точным решениям. Развитие метода допускается принципиальной возможностью его использования для задач с  $R_n \geq 1$ ,  $\beta \geq 1$  и с электродами конечных размеров. В последнем случае строятся две функции Грина для соответствующих краевых зон с последующим сплайнением решений.

В заключение авторы благодарят [Л. А. Вулиса], А. В. Губарева, А. Л. Генкина за обсуждение постановки задачи и результатов работы.

Поступила 1 VIII 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Demetriades S. T., Argyropoulos G. S., Maxwell C. D. О некоторых успехах в области аналитического описания МГД генераторов. Прямое преобразование тепловой энергии в электрическую и топливные элементы, 1972, № 9.
2. Ватажин А. Б., Любимов Г. А., Регирер С. А. Магнитогидродинамические течения в каналах. М., «Наука», 1970.
3. Вулис Л. А., Генкин А. Л., Фоменко Б. А. Теория и расчёт магнитогазодинамических течений. М., Атомиздат, 1971.
4. Ватажин А. Б., Немкова Н. Г. Концевой эффект в канале МГД-генератора с металлическим соплом и диэлектрическим участком на входе. В сб. «Седьмое Рижское совещание по магнитной гидродинамике», т. 2. Рига, «Зинатне», 1972.
5. Бертинов А. И., Ковалев Л. К., Тютин В. К. Поперечный краевой эффект в прямоугольном МГД-канале с секционированной стенкой. Магнитная гидродинамика. 1972, № 1.
6. Губарев А. В., Дегтярев Л. М., Фаворский А. П. К вопросу о продольном краевом эффекте в магнитогидродинамических каналах. Магнитная гидродинамика, 1970, № 2.
7. Moszynski J. R., Agrawal I. G. Электрические концевые потери в жидкокометаллических МГД генераторах с переменной проводимостью. Прямое преобразование тепловой энергии в электрическую и топливные элементы, 1969, № 8.
8. Дмитриев В. И., Захаров Е. В. Об интегральных уравнениях некоторого класса граничных задач электродинамики неоднородных сред. В сб. «Вычислительные методы и программирование», вып. 16. М., Изд-во МГУ, 1971.
9. Бертинов А. И., Бут Д. А., Ковалев Л. К., Юдас В. И. Двумерные магнитные поля в магнитогидродинамических каналах со стальными стенками при конечных магнитных числах Рейнольдса. ПМТФ, 1971, № 5.
10. Бут Д. А., Ковалев Л. К., Никитин Ю. М., Никитина И. А., Тютин В. К. Интегральный метод исследования концевых и краевых эффектов в МГД-каналах с неоднородным распределением параметров проводящей жидкости. В сб. «Седьмое Рижское совещание по мат. физ. гидродинамике», т. 1. Рига, «Зинатне», 1972.
11. Гурса Э. Курс математического анализа. т. 3, ч. 1. М., Гостехиздат, 1933.
12. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.—Л., Физматгиз, 1962.
13. Васильев В. Ф., Лаврентьев И. В. Продольная краевая задача о распределении электрических полей в МГД каналах с проводящими стенками. Магнитная гидродинамика, 1970, № 2.
14. Васильев В. Ф., Лаврентьев И. В. Концевые эффекты в магнитогидродинамических каналах при конечных магнитных числах Рейнольдса. ПМТФ, 1971, № 3.