

AMS subject classification: 35Q35, 65N06, 76N20

Алгоритм численного решения системы уравнений Прандтля с индуцированным давлением в периодическом случае*

Р.К. Гайдуков

Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", ул. Мясницкая, д. 20, Москва, Россия
E-mail: roma1990@gmail.com

Английская версия этой статьи печатается в журнале "Numerical Analysis and Applications" № 2, Vol. 15, 2022.

Гайдуков Р.К. Алгоритм численного решения системы уравнений Прандтля с индуцированным давлением в периодическом случае // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2022. — Т. 25, № 2. — С. 97–109.

Рассмотрено течение вязкой жидкости вдоль полубесконечной пластины с малыми периодическими неровностями на поверхности при больших значениях числа Рейнольдса. Течение вблизи пластины описывается уравнениями Прандтля с индуцированным давлением, которые не являются классическими уравнениями в частных производных, поскольку содержат предельный член. Основная цель данной работы — построение алгоритма численного решения этих уравнений с периодическими граничными условиями. Приведены результаты численного моделирования течения.

DOI: 10.15372/SJNM20220201

Ключевые слова: *двухпалубная структура, осреднение, уравнения Прандтля с индуцированным давлением, периодические возмущения, численное моделирование.*

Gaydukov R.K. Numerical algorithm for solving Prandtl equations with induced pressure in periodic case // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2022. — Vol. 25, № 2. — P. 97–109.

A viscous liquid flow along a semi-infinite plate with small periodic irregularities on the surface was considered for large Reynolds numbers. The flow near the plate is described by Prandtl equations with induced pressure which are non-classical PDE, because they contain a limiting term. The main goal is to construct a numerical algorithm for solving these equations with periodic boundary conditions. The results of numerical modeling of the flow are presented.

Keywords: *double-deck structure, averaging, Prandtl equations with induced pressure, periodic perturbations, numerical modeling.*

1. Введение

Одним из самых известных решений задачи о течении вязкой жидкости вдоль слегка возмущенной поверхности (например, обтекание малого горбика на полубесконечной пластине) при больших числах Рейнольдса является асимптотическое решение с трехпалубной структурой пограничного слоя, которое на протяжении последних 60-ти лет широко изучалось известными учеными в области механики жидкости: К. Стюартсоном, Ф.Т. Смитом, В.Я. Нейландом, О.С. Рыжовым, В.В. Сычевым и другими [1–9]. Немного менее известным решением таких задач является асимптотическое решение с

*Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

двухпалубной структурой [10–20], которая возникает при масштабах неровностей, отличных от тех, при которых возникает трехпалубная структура, см. [10, 21]. Эти структуры возникают в классической задаче обтекания малых локализованных неровностей (например, горбика) на пластине, а также и в задаче обтекания малых периодических (быстроосциллирующих) неровностей на пластине, см. рис. 1. Отметим, что решения с многопалубными структурами были получены как для несжимаемого течения, так и для сжимаемого, см. [19, 22].

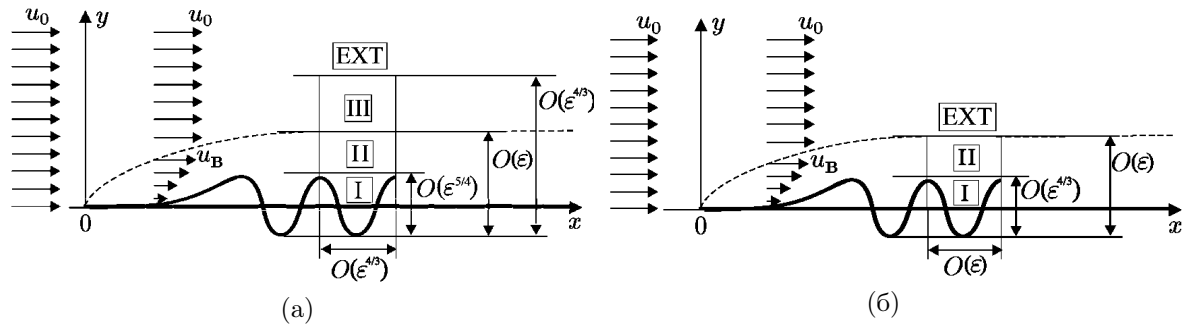


Рис. 1. Многопалубные структуры: (а) — трехпалубная структура; (б) — двухпалубная структура. Обозначения: I — нижняя палуба (тонкий пограничный слой); II — средняя палуба (классический пограничный слой Прандтля); III — верхняя палуба; EXT — область невозмущенного плоскопараллельного течения со скоростью u_0 ; u_B — скорость Блазиуса; $\varepsilon = \text{Re}^{-1/2}$ — малый параметр

В многопалубных моделях система уравнений Навье–Стокса асимптотически редуцируется в пограничных слоях (или в принятой в этой теории терминологии — палубах) к более простым задачам, которые уже допускают простое и эффективное численное решение. Данная работа посвящена построению алгоритма численного решения одной из таких систем, которая описывает течение в области непосредственно около поверхности (см. область I на рис. 1).

Мы рассматриваем нестационарное течение вязкой жидкости вдоль полубесконечной пластины с малыми периодическими неровностями на поверхности y_s при больших числах Рейнольдса Re , см. рис. 1. Мы полагаем, что обтекаемая поверхность имеет вид

$$y_s = \varepsilon^\alpha \mu(x, x/\varepsilon^\beta),$$

где $\alpha = 4/3$, $\beta = 1$ в случае двухпалубной структуры, $\alpha = 5/4$, $\beta = 3/4$ в случае трехпалубной структуры (см. [19, 22]), $\varepsilon = \text{Re}^{-1/2}$ — малый параметр, $\mu(x, \xi)$ — некоторая гладкая функция, описывающая обтекаемую поверхность, T -периодичная по ξ и такая, что $\int_0^T \mu d\xi = 0$, $\mu \equiv 0$, в области кромки пластины, а неровности начинаются гладко на некотором (малом, но достаточном, чтобы пограничный слой Прандтля сформировался) расстоянии δ от края пластины, см. рис. 1. Отметим, что при указанных значениях параметра β функция $\mu(x, \xi)$ имеет быстроосциллирующее поведение, т. е. в окрестности любой точки x на обтекаемой поверхности укладывается довольно большое количество ее периодов, что позволяет говорить о локальной (в окрестности рассматриваемой точки x) периодичности решения. Набегающий поток предполагается плоскопараллельным постоянным дозвуковым потоком с вектором скорости $u_0 = (u_\infty, 0)$ и плотностью ρ_∞ . Для системы уравнений Навье–Стокса и неразрывности с граничными условиями прилипания к поверхности y_s и условиями согласования с набегающим потоком u_0 , описывающей течение во всей области, строится асимптотическое решение с помощью метода

погранслоиных разложений и метода осреднения, т. е. полная задача редуцируется к более простым, описывающих течение в палубах многопалубных структур, см., например, [13, 16, 20]. Полное асимптотическое решение с многопалубными структурами рассматриваемой задачи см. в [19, 22], а ниже мы приводим только уравнения, описывающие течение в пристенной области (т. е. в нижней палубе I, см. рис. 1). Отметим, что как обычно происходит в задачах с пограничным слоем, нельзя указать точную границу пограничного слоя (т. е. такое значение y^* , где область I заканчивается и т. д.). Решения в разных областях гладко сшиваются при стремлении соответствующих масштабирующих (погранслоиных) переменных вида $z = y\varepsilon^{-\gamma}$, $\gamma > 0$, к бесконечности ($z \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$).

В работах [13, 19, 22] показано, что течение в нижней палубе (области I) на одном периоде в окрестности фиксированной точки $x \geq \delta$ описывается начально-краевой задачей для системы уравнений Прандтля с индуцированным давлением, которая имеет следующий вид:

$$\rho_\infty \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial \xi} + v \frac{\partial u}{\partial \hat{\theta}} \right) = -P(\xi) + \frac{\partial^2 u}{\partial \hat{\theta}^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial \hat{\theta}} + \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0. \quad (1)$$

Здесь $\hat{\theta}$ — вертикальная погранслоиная переменная ($\hat{\theta} = y\varepsilon^{-5/4}$ для трехпалубного случая и $\hat{\theta} = y\varepsilon^{-4/3}$ для двухпалубного, где $\varepsilon = \mathbf{Re}^{-1/2}$ — малый параметр), ξ — горизонтальная быстроосциллирующая переменная ($\xi = x\varepsilon^{-3/4}$ для трехпалубного случая и $\xi = x\varepsilon^{-1}$ для двухпалубного), $u = u(t, x, \xi, \hat{\theta})$ и $v = v(t, x, \xi, \hat{\theta})$ — горизонтальная и вертикальная компоненты вектора скорости (u, v) , а $P(\xi)$ — индуцированное давление, см. подробности ниже, а все переменные безразмерные. Отметим, что переменная x в этой задаче является параметром — расстоянием от кромки пластины, т. е. точка, в окрестности которой исследуется решение.

Граничные условия для системы (1) — условия прилипания к обтекаемой поверхности

$$u|_{\hat{\theta}=\mu} = 0, \quad v|_{\hat{\theta}=\mu} = 0, \quad (2)$$

периодические условия

$$u|_{\xi} = u|_{\xi+T}, \quad v|_{\xi} = v|_{\xi+T} \quad (3)$$

и граничные условия “на бесконечности”

$$\frac{\partial u}{\partial \hat{\theta}} \Big|_{\hat{\theta} \rightarrow \infty} = u_\infty \frac{f''(0)}{\sqrt{x}}, \quad \frac{\partial u}{\partial \xi} \Big|_{\hat{\theta} \rightarrow \infty} = 0. \quad (4)$$

Также мы предполагаем, что начальное условие имеет вид

$$u|_{t=0} = \begin{cases} u_\infty \frac{f''(0)}{\sqrt{x}} (\hat{\theta} - \mu)(1 + 0.2\mu), & \mu \leq \hat{\theta} \leq 5 + \mu, \\ u_\infty \frac{f''(0)}{\sqrt{x}} \hat{\theta}, & \hat{\theta} > 5 + \mu. \end{cases} \quad (5)$$

Данная функция является ламинарным потоком вдоль неровности, удовлетворяющим граничным условиям (2)–(4).

Функция $f(\eta)$ является решением задачи типа Блазиуса:

$$\rho_\infty u_\infty f f'' + 2f''' = 0, \quad f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1.$$

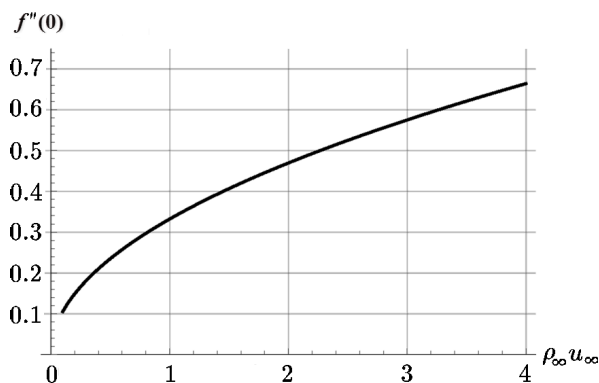


Рис. 2. График зависимости $f''(0)$ от $\rho_\infty u_\infty$

Зависимость $f''(0)$ от $\rho_\infty u_\infty$ приведена на рис. 2 (она легко вычисляется численно методом Рунге–Кутты).

Разница между двух- и трехпалубной структурами заключается в выражении для индуцированного давления $P(\xi)$, которое имеет следующий вид: для двухпалубного случая

$$P(\xi) = -\frac{f''(0)}{\sqrt{x}}v \Big|_{\hat{\theta} \rightarrow \infty} u_\infty \rho_\infty \quad (6)$$

и для трехпалубного

$$P(\xi) = -\rho_\infty \left[\frac{f''(0)}{\sqrt{x}} \left(v - \hat{\theta} \frac{\partial v}{\partial \hat{\theta}} \right) + \left(u - \frac{f''(0)}{\sqrt{x}} u_\infty \hat{\theta} \right) \frac{\partial u}{\partial \xi} \right] \Big|_{\hat{\theta} \rightarrow \infty}. \quad (7)$$

Таким образом, система уравнений (1) не является классической системой уравнений в частных производных — она содержит предел (6) или (7). Отметим, что аналогичная задача была получена и для течений в осесимметричных трубах и каналах с волнистыми стенками, отличие заключается в другом коэффициенте вместо $f''(0)/\sqrt{x}$, см. [16, 20].

Основная цель данной работы заключается в построении алгоритма численного решения задачи (1)–(6). Заметим, что алгоритм для трехпалубной структуры и локализованных возмущений был предложен в [23], но он не применим для периодического случая. В дополнение к другим граничным условиям по ξ задача (1)–(6) имеет отличный вид от классических работ. Это отличие заключается в выражениях для индуцированного давления (6) и (7), форма которого позволяет решать задачу (1)–(6) независимо от остальных палуб, что невозможно в рамках работы [23]. Отметим, что этот вид этих выражений обусловлен применением строгих современных асимптотических методов при выводе уравнений (см. работы [13–15, 19, 22]), в отличие от нестрого физического подхода в работе [6], на основе результатов которой строится алгоритм в [23]. Еще раз подчеркнем, что наша форма задачи (1)–(6) допускает более простой способ построения алгоритма численного решения, поскольку она разрешима независимо от задач в других палубах.

Ниже мы будем использовать следующие обозначения: для любой T -периодичной функции g , зависящей от ξ , мы обозначим среднее значение $\bar{g}$ согласно формуле $\bar{g} = \frac{1}{T} \int_0^T g d\xi$ и осциллирующую часть по формуле $\tilde{g} = g - \bar{g}$.

Структура работы следующая. В пункте 2 мы представим алгоритм численного решения задачи (1)–(6) для случая двухпалубной структуры. Конечно, этот алгоритм можно легко адаптировать к трехпалубному случаю, заменив выражение для индуцированного

давления. Также отметим, что наш алгоритм может быть адаптирован для вычислений в системах с несколькими CPU или GPU (например, с помощью технологии CUDA). В третьем пункте представлены результаты численных расчетов.

2. Алгоритм численного моделирования

Теперь перейдем к построению алгоритма численного решения системы уравнений Прандтля для двухпалубного случая (1)–(6). Сначала мы сделаем некоторые преобразования системы (1). Введем новую вертикальную переменную $\theta = \hat{\theta} - \mu$ так, чтобы нижняя граница области стала плоской ($\hat{\theta} = \mu \rightarrow \theta = 0$). Тогда задача (1)–(6) примет вид (см. подробности в [19, 22]):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + v \frac{\partial u}{\partial \theta} = Qv|_{\theta \rightarrow \infty} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \frac{1}{\rho_\infty}, \quad \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0, \quad (8)$$

$$u|_{\theta=0} = 0, \quad v|_{\theta=0} = 0, \quad u|_\xi = u|_{\xi+T}, \quad v|_\xi = v|_{\xi+T}, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} \Big|_{\theta \rightarrow \infty} = Q, \quad \frac{\partial u}{\partial \xi} \Big|_{\theta \rightarrow \infty} = Q \frac{\partial \mu}{\partial \xi}, \quad (9)$$

где $Q = \frac{u_\infty f''(0)}{\sqrt{x}} = \text{const}$ ($x > 0$ — фиксированный параметр, см. Введение). Выразим вертикальную компоненту скорости из второго уравнения:

$$v = \int_0^\theta \left(-\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \theta'} \right) d\theta' = - \int_0^\theta \frac{\partial u}{\partial \xi} d\theta' + \frac{\partial \mu}{\partial \xi} u. \quad (10)$$

Подстановка этого равенства в первое уравнение (8) приводит к следующему уравнению для горизонтальной компоненты скорости

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial u}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \mu}{\partial \xi} u - \int_0^\theta \frac{\partial u}{\partial \xi} d\theta' \right) = Q \left(- \int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial \xi} d\theta' + \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \lim_{\theta \rightarrow \infty} u \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \frac{1}{\rho_\infty}, \quad (11)$$

которое дополняется граничными условиями (9).

Таким образом, нам нужно решить задачу (11), (9) в пространственной области $\Omega = \{(\xi, \theta) : \xi \in [0, T], \theta \in [0, \infty)\}$. Для дальнейшего построения алгоритма численного решения задачи (11), (9) нам необходимо разрешить две следующие проблемы.

Во-первых, заметим, что область Ω неограниченна. Есть два пути как действовать. Первый путь — ввести новую переменную, например, $\sigma = \theta/(1 + \theta)$. Тогда область Ω примет вид $\Omega_\sigma = \{[0, T] \times [0, 1)\}$. Однако эта замена переменной имеет недостаток. А именно, после дискретизации области $[0, 1)$ с постоянным шагом h_σ и возврата от σ к θ мы получим неравномерную сетку. Более того, нам необходимо выбирать очень маленький шаг h_σ для получения достаточно больших значений θ . Например, если мы выберем шаг дискретизации $h_\sigma = 0.1$, то мы получим следующий набор значений θ : $\{0, 0.12, 0.25, 0.43, 0.67, 1, 1.5, 2.33, 4, 9\}$. Следовательно, в этом случае нам необходимо введение неравномерной сетки на области Ω_σ с малыми значениями шага дискретизации.

Второй путь — обрезать область, т. е. пусть $\theta \in [0, \theta_{\max}]$. Это приводит к некоторым погрешностям, но как показано в [24], они скорее всего будут малы. Мы выбрали этот путь, и мы покажем, как влияет выбор $\theta_{\max}$ на решение в области около поверхности в следующем пункте (см. рис. 3). Мы обозначим обрезанную область через

$$\Omega_{\text{tr}} = \{[0, T] \times [0, \theta_{\max}]\}.$$

Вторая проблема заключается в том, что функция u не ограничена при $\theta \rightarrow \infty$ ($u|_{\theta \rightarrow \infty} \sim Q(\theta + \mu)$, см. [19, 22]). Для разрешения этой проблемы мы введем новую функцию

$$H = u - (\theta + \mu)Q. \quad (12)$$

Тогда задача (11) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial \xi} \left(H + Q(\theta + \mu) \right) + Q \frac{\partial \mu}{\partial \xi} (H - \lim_{\theta \rightarrow \infty} H) - \\ Q(D - \lim_{\theta \rightarrow \infty} D) - \frac{\partial H}{\partial \theta} \left(D + Q \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \theta \right) = \frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} \frac{1}{\rho_{\infty}}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$H|_{\theta=0} = -Q\mu, \quad H|_{\xi} = H|_{\xi+T}, \quad \frac{\partial H}{\partial \theta} \Big|_{\theta \rightarrow \infty} = 0, \quad (14)$$

где $D = \int_0^{\theta} \frac{\partial H}{\partial \xi} d\theta'$.

Следующий шаг в построении нашего алгоритма заключается в использовании метода осреднения (см. обозначения в конце Введения). Осреднение уравнения (13) приводит к следующему уравнению на функцию $\bar{H}$:

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} - W = \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial \theta^2} \frac{1}{\rho_{\infty}}, \quad (15)$$

которое дополняется нулевым начальным значением $\bar{H}|_{t=0} = 0$ (получается из (5) с помощью замены (12) и процедуры осреднения) и граничными условиями

$$\bar{H}|_{\theta=0} = 0, \quad \frac{\partial \bar{H}}{\partial \theta} \Big|_{\theta \rightarrow \infty} = 0, \quad (16)$$

где $W = \overline{\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \theta} (D + Q \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \theta)} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \theta} (D + Q \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \theta) d\xi$.

Уравнение для осциллирующей части $\tilde{H}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \xi} (\tilde{H} + \bar{H} + Q(\theta + \mu)) + Q \frac{\partial \mu}{\partial \xi} (\tilde{H} + \bar{H} - \lim_{\theta \rightarrow \infty} \bar{H}) - \\ Q(D - \lim_{\theta \rightarrow \infty} D) - \frac{\partial \bar{H}}{\partial \theta} \left(D + Q \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \theta \right) = \frac{\partial^2 \tilde{H}}{\partial \theta^2} \frac{1}{\rho_{\infty}} \end{aligned} \quad (17)$$

и дополняется граничными условиями

$$\tilde{H}|_{\theta=0} = -\mu Q, \quad \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \theta} \Big|_{\theta \rightarrow \infty} = 0, \quad \tilde{H}|_{\xi} = \tilde{H}|_{\xi+T} \quad (18)$$

и начальным условием (см. подробнее ниже)

$$\tilde{H}|_{t=0} = \tilde{F}(\xi, \theta). \quad (19)$$

Теперь мы построим алгоритм численного решения задач (15)–(19), основанный на явных разностных схемах (см. [25]). Как было отмечено во Введении, явные разностные схемы легко и эффективно использовать на современных компьютерах с многоядерными процессорами или графическими ускорителями.

Начнем с дискретизации. На области $\Omega_{\text{num}} = [0, T] \times [0, \theta_{\text{max}}] \times [0, t_{\text{max}}]$, введем равномерную сетку ω_h с шагами h_ξ , h_θ , h_t :

$$\omega_h = \left\{ (i, j, k) : \xi_i = ih_\xi, \theta_j = jh_\theta, t^k = kh_t, \quad i = 0, \dots, N; j = 0, \dots, M; k = 0, \dots, K; \right. \\ \left. N = [T/h_\xi], \quad M = [\theta_{\text{max}}/h_\theta], \quad K = [t_{\text{max}}/h_t] \right\},$$

где $[\dots]$ — функция “пол”. Отметим, что для уменьшения ошибок численного счета, связанных с периодичностью, лучше задать N и вычислить $h_\xi = T/N$. Как обычно, введем сеточные функции. Для любой функции $g = g(t, \xi, \theta)$ обозначим сеточную функцию $g_{i,j}^k = g(t^k, \xi_i, \theta_j)$ на узлах сетки ω_h . Также введем следующие обозначения:

$$\hat{\mu}_i = \frac{\mu_{i+1} - \mu_{i-1}}{2h_\xi}, \quad \alpha_{i,j}^k = \tilde{H}_{i,j}^k + \bar{H}_j^k + Q(\theta_j + \mu_i), \\ \beta_{i,j}^k = -(D_{i,j}^k + Q\theta_j\hat{\mu}_i), \quad \chi_{i,j}^k = -\beta_{i,j}^k \frac{\tilde{H}_{i,j+1}^k - \tilde{H}_{i,j}^k}{h_\theta} \quad (20)$$

и для любой функции $g_{i,j}^k$ на сетке ω_h :

$$(g_{i,j}^k)^+ = \frac{g_{i,j}^k + |g_{i,j}^k|}{2}, \quad (g_{i,j}^k)^- = \frac{g_{i,j}^k - |g_{i,j}^k|}{2}. \quad (21)$$

Интегралы $D_{i,j}^k$ будем вычислять методом трапеций

$$D_{i,j}^k = h_\theta \left(\frac{d_{i,0}^k + d_{i,j}^k}{2} + \sum_{j'=1}^{j-1} d_{i,j'}^k \right), \quad (22)$$

где $d_{i,j}^k = \frac{\tilde{H}_{i+1,j}^k - \tilde{H}_{i,j}^k}{h_\xi}$ и $D_{0,j}^k = D_{N,j}^k$.

Тогда явная разностная схема для задачи (15)–(18) имеет следующий вид:

$$\tilde{H}_{i,j}^{k+1} = \tilde{H}_{i,j}^k - h_t \left((\alpha_{i,j}^k)^+ \frac{\tilde{H}_{i,j}^k - \tilde{H}_{i-1,j}^k}{h_\xi} + (\alpha_{i,j}^k)^- \frac{\tilde{H}_{i+1,j}^k - \tilde{H}_{i,j}^k}{h_\xi} + Q\hat{\mu}_i(\tilde{H}_{i,j}^k + \bar{H}_j^k - \bar{H}_M^k) - \right. \\ \left. Q(D_{i,j}^k - D_{i,M}^k) + (\beta_{i,j}^k)^+ \frac{\bar{H}_j^k - \bar{H}_{j-1}^k}{h_\theta} + (\beta_{i,j}^k)^- \frac{\bar{H}_{j+1}^k - \bar{H}_j^k}{h_\theta} \right) + \\ h_t \frac{\tilde{H}_{i,j+1}^k - 2\tilde{H}_{i,j}^k + \tilde{H}_{i,j-1}^k}{h_\theta^2} \frac{1}{\rho_\infty}, \quad (23)$$

$$\tilde{H}_{i,0}^k = -\mu_i Q, \quad \tilde{H}_{i,M}^k = \tilde{H}_{i,M-1}^k, \quad \tilde{H}_{0,j}^k = \tilde{H}_{N,j}^k, \quad \tilde{H}_{i,j}^0 = \tilde{F}_{i,j} \quad (24)$$

$$\bar{H}_j^{k+1} = \bar{H}_j^k + h_t W_j^k + h_t \frac{\bar{H}_{j+1}^k - \bar{H}_j^k + \bar{H}_{j-1}^k}{h_\theta^2} \frac{1}{\rho_\infty}, \quad (25)$$

$$\bar{H}_0^k = 0, \quad \bar{H}_M^k = H_{M-1}^k, \quad \bar{H}_j^0 = 0, \quad (26)$$

где интегралы W_j^k вычисляются методом трапеций $W_j^k = \frac{h_\xi}{T} \left(\frac{\chi_{0,j}^k + \chi_{N,j}^k}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} \chi_{i,j}^k \right)$.

Легко показать, что построенная разностная схема удовлетворяет принципу максимума (см. [25]) и устойчива при $h_t < \min\{h_\xi^2, h_\theta^2\}$.

Функция $u_{i,j}^k$ может быть найдена по формуле

$$u_{i,j}^k = \tilde{H}_{i,j}^k + \overline{H}_j^k + Q(\theta_j + \mu_i), \quad (27)$$

а функция $v_{i,j}^k$ может быть найдена из интеграла (10) путем численного интегрирования по формуле

$$v_{i,j}^k = \hat{\mu}_i u_{i,j}^k + h_\theta \left(\frac{\zeta_{i,0}^k + \zeta_{i,j}^k}{2} + \sum_{jj=1}^{j-1} \zeta_{i,jj}^k \right), \quad (28)$$

где $\zeta_{i,j}^k = -\frac{u_{i+1,j}^k - u_{i,j}^k}{h_\xi}$. Отметим, что мы можем оценить численные ошибки вычислений путем проверки условия $\bar{v} = 0$.

Теперь введем функцию $\text{eps}(t)$:

$$\text{eps}(t^k) = \|u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k\|_C,$$

где $\|g_{i,j}^k\|_C = \max_{(i,j) \in \omega_h} |g_{i,j}^k|$. Эта функция иллюстрирует процесс выхода решения на стационар. Если спустя некоторое время t^* мы имеем $\text{eps}(t) < \psi$ для всех $t > t^*$ и некоторого малого ψ (на иллюстрациях ниже мы положили $\psi = 10^{-3}$), тогда мы можем говорить о том, что получили стационарное решение.

3. Результаты численного моделирования

В этом пункте мы приведем некоторые результаты численного моделирования. Пусть $x = 1$ (это расстояние от кромки пластины). Будем считать, что функция μ имеет вид:

$$\mu(\xi) = a(\cos(\xi) + \cos(2\xi)), \quad a = \text{const.}$$

Пусть $u_\infty = 1$, $\rho_\infty = 1$. Начальное условие для функции $\tilde{H}$ (19) получается из (5) с помощью замены (12) и процедуры осреднения и имеет следующий вид:

$$\tilde{F} = \begin{cases} -Q\mu(\xi)(1 - 0.2\theta), & \theta \leq 5, \\ 0, & \theta > 5. \end{cases} \quad (29)$$

Для численного моделирования использовались следующие параметры сетки ω_h : число узлов по горизонтали $N = 200$ (соответствующий пространственный шаг $h_\xi = 2\pi/N$); пространственный шаг по вертикали $h_\theta = 0.01$ (соответствующее число узлов $M = \theta_{\max}/h_\theta$); $\theta_{\max} = 15$; временной шаг $h_t = 10^{-5}$.

Как было отмечено в предыдущем пункте, погрешности, возникающие из-за обрезания области Ω , довольно малы. В качестве подтверждения этого утверждения, мы провели вычисления с различными значениями $\theta_{\max}$: $\theta_{\max}^s = 15$ и $\theta_{\max}^l = 50$, при неизменных остальных параметрах сетки и самой задачи (a , x , u_∞ , ρ_∞). Обозначим результаты моделирования (функцию u) для $\theta_{\max}^s$ через u_1 , т.е. функция u_1 вычислена на области $\Omega_1 = \{0 \leq \xi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \theta_{\max}^s = 15, 0 \leq t \leq 5\}$, а для $\theta_{\max}^l$ через u_2 , т.е. функция u_2 вычислена на области $\Omega_2 = \{0 \leq \xi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \theta_{\max}^l = 50, 0 \leq t \leq 5\}$. Мы сравнили функции u_1 и u_2 на малой области Ω_1 путем вычисления сеточной нормы $\|u_2 - u_1\|_C$ как

функции от времени t , и получили, что максимальная погрешность порядка 10^{-5} . Это сравнение приведено на рис. 3.

Безусловно, погрешность конечно растет, но на рассматриваемой области моделирования по времени она остается малой, соизмеримой с погрешностью аппроксимации разностной схемы.

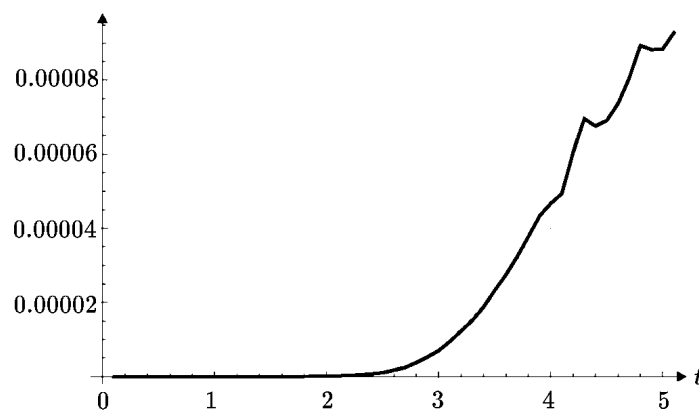


Рис. 3. График зависимости $\|u_2 - u_1\|_C$ от t

Численное моделирование показало, что есть два типа поведения течения: ламинарное обтекание и течение с вихрями. Более того, существуют две критические амплитуды a_1^* и a_2^* такие, что

- если $a < a_1^*$, то мы наблюдаем ламинарное обтекание, которое с некоторого момента времени является стационарным, см. рис. 4 и 5;
- если $a_1^* < a < a_2^*$, то мы наблюдаем формирование вихрей в левой ямке, см. рис. 6;
- если $a > a_2^*$, то мы наблюдаем вихреобразования в обеих ямках, см. рис. 7.

В двух последних случаях (при $a > a_1^*$) вихрь образуется на левой “стенке” ямки, затем перемещается по потоку и разрушается на правой стенке ямки, и в дальнейшем этот процесс может повторяться. Точки, в которых возникают вихри — это точки минимума $\mu'(\xi)$, но этот численный результат требует аналитического исследования, которое будет сделано в отдельной работе. Фактически это означает, что вихреобразование зависит от величины крутизны стенки. Цветом на рис. 4, 6 и 7 обозначена абсолютная величина скорости.

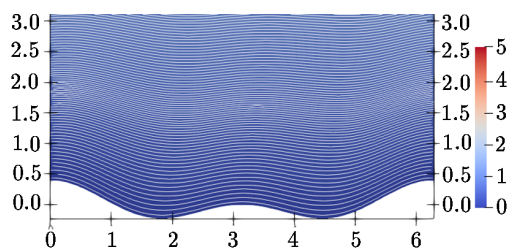


Рис. 4. Ламинарное течение, $a = 0.2$,
 $t = t_1 > 0$

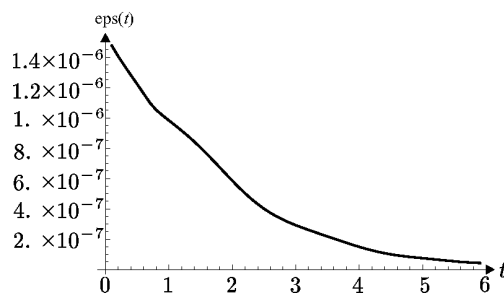


Рис. 5. Ламинарное течение, график функции $\text{eps}(t)$

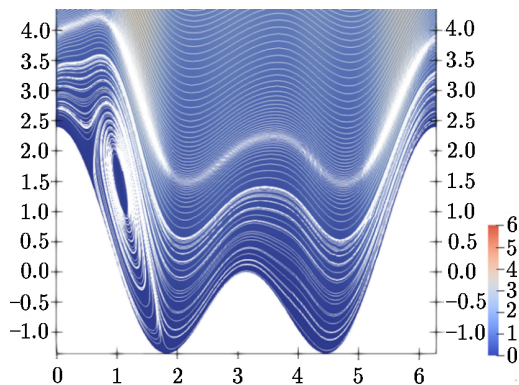


Рис. 6. Течение с вихрями, $a = 1.2$,
 $t = t_1 > 0$

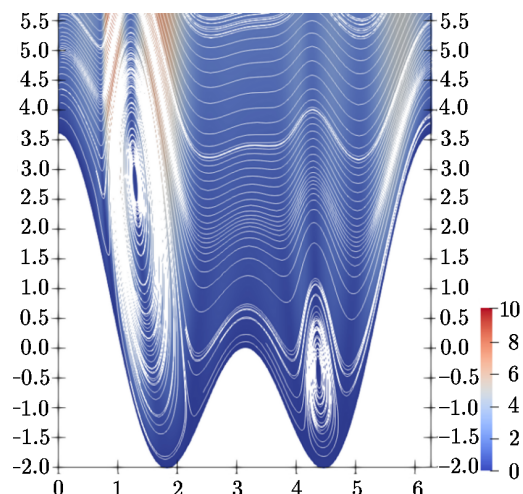


Рис. 7. Течение с вихрями, $a = 1.8$,
 $t = t_1 > 0$

4. Заключение

В статье представлен алгоритм для численного моделирования течения вязкой жидкости вблизи поверхностей с малыми неровностями. А именно, построен алгоритм численного решения системы уравнений Прандтля с индуцированным давлением и периодическими граничными условиями. Эта система уравнений, не являющаяся классической системой уравнений в частных производных, описывает течение в “нижней” палубе трех- и двухпалубных структур пограничного слоя. Подчеркнем, что предложенный алгоритм позволяет моделировать течение в пристеночной зоне (т. е. на “нижней палубе”) независимо от других палуб многопалубных структур, и в этом основное отличие (помимо периодичности) от [23]. Отметим, что важным свойством предложенного алгоритма является минимизация вычислительной ошибки, связанной с периодичностью. Это достигнуто разделением уравнения на уравнение для осциллирующей части и уравнение для среднего значения.

Многопалубные структуры возникают в различных задачах обтекания жидкостями поверхностей с малыми периодическими быстроосциллирующими неровностями (например, вдоль возмущенных пластин или внутри осесимметричных труб с волнистыми стенками, [13, 14, 16, 19, 20, 22]). Численное моделирование показало, что в этой задаче существует два режима течения: ламинарное течение и течение с вихрями, в зависимости от амплитуды неровностей. Эти результаты представлены на рис. 4, 6 и 7.

Литература

1. Neiland V.Y. Theory of laminar boundary layer separation in supersonic flow // Fluid Dynamics. — 1969. — Vol. 4. — P. 33–35. Перевод: Нейланд В.Я. К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1969. — № 4. — С. 53–57.
2. Neiland V.Y. and Sychev V.V. Asymptotic solutions of the Navier–Stokes equations in regions with large local perturbations // Fluid Dynamics. — 1966. — Vol. 1. — P. 29–22. Перевод: Нейланд В.Я., Сычев В.В. Асимптотические решения уравнений Навье–Стокса в областях с большими локальными возмущениями // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1966. — № 4. — С. 43–49.

3. **Рубан А.И., Сычев В.В.** Асимптотическая теория отрыва ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости // Успехи механики. — 1979. — Т. 2, вып. 4. — С. 57–95.
4. **Ryzhov O.S. and Terent'ev E.D.** On unsteady boundary layer with self-induced pressure // J. of Applied Mathematics and Mechanics. — 1977. — Vol. 41. — P. 1024–1040. Перевод: Рыжов О.С., Терентьев Е.Д. О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением // ПММ. — 1977. — Т. 41, вып. 6. — С. 1007–1023.
5. **Stewartson K. and Williams P.G.** Self-induced separation // Proc. of the Royal Society A. — 1969. — Vol. 312. — P. 181–206.
6. **Smith F.T.** Laminar flow over a small hump on a flat plate // J. of Fluid Mechanics. — 1973. — Vol. 57. — P. 803–824.
7. **Smith F.T. and Burggraf O.R.** On the development of large-sized short-scaled disturbances in boundary layers // Proc. of the Royal Society of London A. — 1985. — Vol. 399. — P. 25–55.
8. **Ryzhov O.** The development of nonlinear oscillations in a boundary layer and the onset of random disturbances // Nonlinear Instability of Nonparallel Flows. — Springer, 1994. — P. 52–68.
9. **Данилов В.Г., Россинский К.Ю.** Обтекание плоской пластины с периодическими неровностями малой амплитуды // Матем. моделирование. — 2003. — Т. 15, № 11. — С. 91–109.
10. **Mauss J.** Asymptotic modelling for separating boundary layers // Lecture Notes in Physics. — 1995. — Vol. 442. — P. 239–254.
11. **Danilov V.G. and Makarova M.V.** Asymptotic and numerical analysis of the flow around a plate with small periodic irregularities // Russian J. of Mathematical Physics. — 1994. — Vol. 2. — P. 49–56.
12. **Danilov V.G. and Gaydukov R.K.** Vortices in the prandtl boundary layer induced by irregularities on a plate // Russian J. of Mathematical Physics. — 2015. — Vol. 22. — P. 161–173.
13. **Gaydukov R.K.** Double-deck structure of the boundary layer in the problem of a compressible flow along a plate with small irregularities on the surface // European J. of Mechanics – B/Fluids. — 2017. — Vol. 66. — P. 102–108.
14. **Danilov V.G. and Gaydukov R.K.** Double-deck structure of the boundary layer in problems of flow around localized perturbations on a plate // Mathematical Notes. — 2015. — Vol. 98. — P. 561–571.
15. **Gaydukov R.K.** Double-deck structure in the problem of a compressible flow along a plate with small localized irregularities on the surface // European J. of Mechanics – B/Fluids. — 2018. — Vol. 71. — P. 59–65.
16. **Danilov V.G. and Gaydukov R.K.** Double-deck structure of the boundary layer in the problem of flow in an axially symmetric pipe with small irregularities on the wall for large Reynolds numbers // Russian J. of Mathematical Physics. — 2017. — Vol. 24. — P. 1–8.
17. **Yapalparvi R.** Double-deck structure revisited // European J. of Mechanics – B/Fluids. — 2012. — Vol. 31. — P. 53–70.
18. **Gaydukov R.K. and Borisov D.I.** Existence of the stationary solution of a Rayleigh-type equation // Mathematical Notes. — 2016. — Vol. 99. — P. 636–642.
19. **Gaydukov R.K. and Danilov V.G.** Equations for velocity oscillations in problems of a fluid flow along a plate with small periodic irregularities on the surface for large Reynolds numbers // Proc. of the Intern. Conf. DAYS on DIFFRACTION 2018. — 2018. — P. 118–123.
20. **Gaydukov R.K. and Fonareva A.V.** A compressible fluid flow with double-deck structure inside an axially symmetric wavy-wall pipe // Russian J. of Mathematical Physics. — 2019. — Vol. 26. — P. 334–343.
21. **Cousteix J. and Mauss J.** Asymptotic Analysis and Boundary Layers. — Springer, 2007.

22. **Gaydukov R.K. and Danilov V.G.** Multideck structures of boundary layers in compressible flows // Proc. of the Intern. Conf. DAYS on DIFFRACTION 2019. — 2019. — P. 51–56.
23. **Napolitano M., Werle M.J., and Davis R.T.** Numerical technique for the triple-deck problem // AIAA. — 1979. — Vol. 16. — P. 699–705.
24. **Roache P.J.** Computational Fluid Dynamics. — Hermosa Publishers, 1976.
25. **Samarskii A.A.** The Theory of Difference Schemes. — Marcel Dekker Inc., 2001. Перевод: Самарский А.А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1977.

Поступила в редакцию 13 мая 2021 г.

После исправления 21 октября 2021 г.

Принята к печати 27 января 2022 г.

Литература в транслитерации

1. **Neiland V.Y.** Theory of laminar boundary layer separation in supersonic flow // Fluid Dynamics. — 1969. — Vol. 4. — P. 33–35. Перевод: Neiland V.Ya. К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1969. — № 4. — С. 53–57.
2. **Neiland V.Y. and Sychev V.V.** Asymptotic solutions of the Navier–Stokes equations in regions with large local perturbations // Fluid Dynamics. — 1966. — Vol. 1. — P. 29–22. Перевод: Neiland V.Ya., Sychev V.V. Асимптотические решения уравнений Навье–Стокса в областях с большими локальными возмущениями // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1966. — № 4. — С. 43–49.
3. **Ruban A.I., Sychev V.V.** Асимптотическая теория отрыва ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости // Успехи механики. — 1979. — Т. 2, вып. 4. — С. 57–95.
4. **Ryzhov O.S. and Terent'ev E.D.** On unsteady boundary layer with self-induced pressure // J. of Applied Mathematics and Mechanics. — 1977. — Vol. 41. — P. 1024–1040. Перевод: Ryzhov O.S., Terent'ev E.D. О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением // PMM. — 1977. — Т. 41, вып. 6. — С. 1007–1023.
5. **Stewartson K. and Williams P.G.** Self-induced separation // Proc. of the Royal Society A. — 1969. — Vol. 312. — P. 181–206.
6. **Smith F.T.** Laminar flow over a small hump on a flat plate // J. of Fluid Mechanics. — 1973. — Vol. 57. — P. 803–824.
7. **Smith F.T. and Burggraf O.R.** On the development of large-sized short-scaled disturbances in boundary layers // Proc. of the Royal Society of London A. — 1985. — Vol. 399. — P. 25–55.
8. **Ryzhov O.** The development of nonlinear oscillations in a boundary layer and the onset of random disturbances // Nonlinear Instability of Nonparallel Flows. — Springer, 1994. — P. 52–68.
9. **Danilov V.G., Rossinskii K.Yu.** Obtekanie ploskoi plastiny s periodicheskimi nerovnostyami maloi amplitudy // Matem. modelirovanie. — 2003. — Т. 15, № 11. — С. 91–109.
10. **Mauss J.** Asymptotic modelling for separating boundary layers // Lecture Notes in Physics. — 1995. — Vol. 442. — P. 239–254.
11. **Danilov V.G. and Makarova M.V.** Asymptotic and numerical analysis of the flow around a plate with small periodic irregularities // Russian J. of Mathematical Physics. — 1994. — Vol. 2. — P. 49–56.
12. **Danilov V.G. and Gaydukov R.K.** Vortices in the prandtl boundary layer induced by irregularities on a plate // Russian J. of Mathematical Physics. — 2015. — Vol. 22. — P. 161–173.
13. **Gaydukov R.K.** Double-deck structure of the boundary layer in the problem of a compressible flow along a plate with small irregularities on the surface // European J. of Mechanics – B/Fluids. — 2017. — Vol. 66. — P. 102–108.

14. **Danilov V.G. and Gaydukov R.K.** Double-deck structure of the boundary layer in problems of flow around localized perturbations on a plate // *Mathematical Notes*. — 2015. — Vol. 98. — P. 561–571.
15. **Gaydukov R.K.** Double-deck structure in the problem of a compressible flow along a plate with small localized irregularities on the surface // *European J. of Mechanics – B/Fluids*. — 2018. — Vol. 71. — P. 59–65.
16. **Danilov V.G. and Gaydukov R.K.** Double-deck structure of the boundary layer in the problem of flow in an axially symmetric pipe with small irregularities on the wall for large Reynolds numbers // *Russian J. of Mathematical Physics*. — 2017. — Vol. 24. — P. 1–8.
17. **Yapalparvi R.** Double-deck structure revisited // *European J. of Mechanics – B/Fluids*. — 2012. — Vol. 31. — P. 53–70.
18. **Gaydukov R.K. and Borisov D.I.** Existence of the stationary solution of a Rayleigh-type equation // *Mathematical Notes*. — 2016. — Vol. 99. — P. 636–642.
19. **Gaydukov R.K. and Danilov V.G.** Equations for velocity oscillations in problems of a fluid flow along a plate with small periodic irregularities on the surface for large Reynolds numbers // *Proc. of the Intern. Conf. DAYS on DIFFRACTION 2018*. — 2018. — P. 118–123.
20. **Gaydukov R.K. and Fonareva A.V.** A compressible fluid flow with double-deck structure inside an axially symmetric wavy-wall pipe // *Russian J. of Mathematical Physics*. — 2019. — Vol. 26. — P. 334–343.
21. **Cousteix J. and Mauss J.** *Asymptotic Analysis and Boundary Layers*. — Springer, 2007.
22. **Gaydukov R.K. and Danilov V.G.** Multideck structures of boundary layers in compressible flows // *Proc. of the Intern. Conf. DAYS on DIFFRACTION 2019*. — 2019. — P. 51–56.
23. **Napolitano M., Werle M.J., and Davis R.T.** Numerical technique for the triple-deck problem // *AIAA*. — 1979. — Vol. 16. — P. 699–705.
24. **Roache P.J.** *Computational Fluid Dynamics*. — Hermosa Publishers, 1976.
25. **Samarskii A.A.** *The Theory of Difference Schemes*. — Marcel Dekker Inc., 2001. *Perevod: Samarskii A.A. Teoriya raznostnykh skhem*. — M.: Nauka, 1977.

