

УДК 534.16

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОБОДНЫХ И ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ КОНСТРУКЦИИ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ДВУХ ОРТОТРОПНЫХ ГРАФЕНОВЫХ ПЛАСТИН, СВЯЗАННЫХ ВЯЗКОУПРУГИМ СЛОЕМ, С УЧЕТОМ ПОВЕРХНОСТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

М. Пан, Ю. Фан, Ю. Ц. Чзан

Колледж гражданского строительства и архитектуры Чжэцзянского университета,
310058 Ханчжоу, Китай
E-mails: pmmzju@163.com, 11412071@zju.edu.cn, cyqzhang@zju.edu.cn

Исследуются поперечные колебания конструкции, состоящей из двух ортотропных графеновых пластин, связанных слоем вязкоупругого материала (модель Пастернака). Получены уравнения свободных и вынужденных колебаний системы с учетом поверхностных напряжений высшего порядка. Получены выражения для частоты затухающих колебаний, коэффициента затухания и для разности смещений листов с шарнирно опертыми краями. Исследовано влияние поверхностных напряжений высшего порядка на частоту затухающих колебаний системы и коэффициент затухания колебаний, совпадающих и не совпадающих по фазе. Также изучено влияние напряжений высшего порядка, коэффициента структурного демпфирования, коэффициента демпфирования материала, модулей жесткости и сдвига вязкоупругой прослойки на разность смещений листов графена в случае вынужденных колебаний. Показано, что поверхностные напряжения высшего порядка оказывают более существенное влияние на параметры колебаний, чем поверхностные напряжения низшего порядка.

Ключевые слова: вязкоупругий ортотропный графеновый лист, свободные и вынужденные колебания, поверхностные напряжения высшего порядка, вязкоупругий материал, упругое основание Пастернака, структурное демпфирование.

DOI: 10.15372/PMTF20210116

Введение. Однослойные графеновые листы представляют собой двумерные наномасштабные структуры, которые используются в качестве компонентов сложных систем, состоящих из нанопластин. Графеновые листы применяются в нанооптико-механических и наноэлектромеханических системах, поэтому в последнее время их механические свойства интенсивно исследуются.

В отличие от однослойных графеновых пластин исследованию двухслойных пластин уделяется недостаточно внимания. Двухслойные графеновые листы обладают аномальным квантовым эффектом Холла, легко настраиваемой полосой пропускания и потенциалом для экситонной конденсации, поэтому могут применяться в опто- и наноэлектронике. Представляет интерес исследование механических свойств двухслойных графеновых листов.

В работе [1] изучены закономерности колебаний двухслойных графеновых листов. С использованием молекулярной структурной механики в работе [2] исследованы механические свойства двухслойных графеновых листов. В [3] с помощью нелокальной теории пластин Миндлина — Рейсснера изучено распространение волн в двухслойных графеновых листах. Выпучивание и колебания двухслойных графеновых листов, подвергаемых действию гигротермических нагрузок при различных краевых условиях, исследованы в работе [4].

В работе [5] в экспериментах на растяжение нанопластин оксида графена получены гистерезисные петли. Это позволило установить, что такие пластины обладают вязкоупругими свойствами. Большое внимание уделяется исследованию вязкоупругих свойств двухслойных графеновых листов. В [6] получено аналитическое решение задачи о свободных колебаниях двухслойных вязкоупругих графеновых листов, соединенных вязкоупругим материалом (модель Пастернака). Маломасштабные эффекты свободных колебаний вязкоупругих двухслойных нанопластин при термическом нагружении исследованы в работе [7]. В [8] изучены двухосное выпучивание и поперечные колебания вязкоупругих двухслойных пластин из функционально-градиентного материала. В [9] получено решение динамической задачи о деформировании вязкоупругой ортотропной двухслойной пластины, находящейся в продольном магнитном поле. В ряде работ исследуются вынужденные колебания двухслойных графеновых систем.

Поскольку для наноструктур отношение площади поверхности к объему велико, поверхностные эффекты могут оказывать существенное влияние на механические свойства наноструктур. В работе [10] с учетом поверхностных эффектов исследовано динамическое поведение вязкоупругих двухслойных нанопластин из функционально-градиентного материала при температурных нагрузках. В [11] с учетом поверхностных эффектов изучены колебания вязкоупругих двухслойных графеновых листов в магнитном поле. В [12] с учетом геометрических дефектов и поверхностных эффектов исследованы свободные колебания круглой двухслойной графеновой пластины. В [13] с учетом поверхностных эффектов изучено нелинейное динамическое поведение наноэлектромеханической системы, состоящей из двухслойных вязкоупругих нанопластин.

Следует отметить, что перечисленные выше исследования выполнены на основе теории упругой поверхности в предположении, что тонкая прослойка может воспринимать напряжения, действующие только в ее плоскости. Это предположение соответствует учету механических свойств поверхности в первом приближении.

Однако в работе [14] экспериментально установлено, что тонкий слой может воспринимать как усилия в его плоскости, так и моменты. Поэтому при моделировании деформирования тонкого слоя необходимо учитывать моменты [15]. Поверхностные моменты можно рассматривать в качестве поверхностных напряжений более высокого порядка. В [15, 16] утверждается, что зависимостью механических свойств от поверхностных напряжений высшего порядка нельзя пренебрегать. В настоящее время отсутствуют работы, в которых исследуются механические свойства связанных двухслойных графеновых листов с учетом поверхностных напряжений высших порядков.

В данной работе изучаются свободные и вынужденные поперечные колебания системы, состоящей из двух прямоугольных вязкоупругих ортотропных графеновых листов, соединенных вязкоупругим материалом (модель Пастернака). Предполагается, что все края обоих листов шарнирно оперты. Исследуется влияние поверхностных напряжений высших порядков и коэффициентов демпфирования листов и связующего материала на колебания системы.

1. Постановка задачи и математическое моделирование. Рассмотрим систему, состоящую из двух прямоугольных вязкоупругих ортотропных графеновых листов, каждый из которых имеет длину a , ширину b и толщину h (рис. 1).

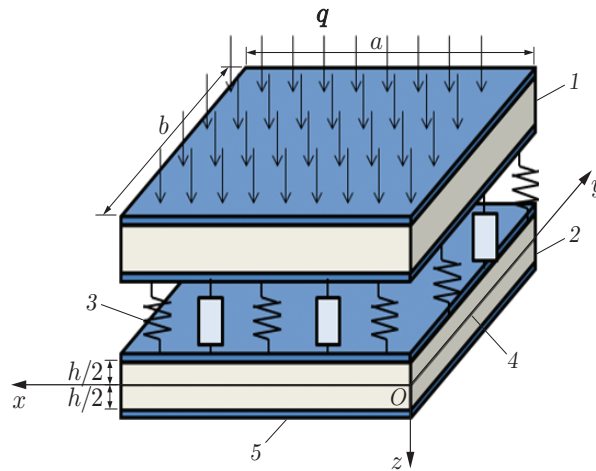


Рис. 1. Схема двухслойной вязкоупругой графеновой конструкции:
 1 — графеновый лист 1, 2 — графеновый лист 2, 3 — слой вязкоупругого материала,
 4 — срединная плоскость ($z = 0$), 5 — поверхностный слой

Два вязкоупругих ортотропных листа с коэффициентом демпфирования τ_d соединены слоем вязкоупругого материала (модель Пастернака) с однородными жесткостями, модулем сдвига и коэффициентом демпфирования. Графеновые листы имеют одинаковые модули упругости E_1, E_2 , модули сдвига G_{12} , коэффициенты Пуассона ν_{12}, ν_{21} и плотность ρ (индексы 1, 2 соответствуют направлениям вдоль осей x, y). На поверхности графенового листа 1 действует распределенная внешняя нагрузка q .

Определяющие соотношения для нелокального тела Гука записываются в виде

$$(1 - \mu \nabla^2) \sigma_{ij}^{nl} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (1)$$

где σ_{ij}^{nl} — тензор нелокальных напряжений; ∇^2 — оператор Лапласа; C_{ijkl} — тензор модулей упругости; ε_{kl} — тензор деформаций; $\mu = (e_0 l)^2$ — параметр нелокальности; l — внутренний параметр длины; e_0 — константа материала.

Поместим начало системы координат Oxy в одном из углов срединной плоскости графенового листа (рис. 1). Тогда в соответствии с нелокальной теорией упругости выражения для обобщенных усилий и моментов записываются в виде

$$(N_x^{nl}, N_y^{nl}, N_{xy}^{nl}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x^{nl}, \sigma_y^{nl}, \sigma_{xy}^{nl}) dz, \quad (M_x^{nl}, M_y^{nl}, M_{xy}^{nl}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x^{nl}, \sigma_y^{nl}, \sigma_{xy}^{nl}) z dz, \quad (2)$$

где h — толщина графенового листа; $\sigma_x^{nl}, \sigma_y^{nl}$ и σ_{xy}^{nl} — компоненты тензора нелокальных напряжений в случае плоского напряженного состояния.

Как отмечено выше, для получения надежных результатов нужно учесть напряжения высшего порядка в поверхностном слое. Фактически действие напряжений высшего порядка можно заменить действием на лист распределенной поперечной нагрузки [16]:

$$q^{hs} = 2D_s \nabla^2 (\nabla^2 w) - 2\tau_s \nabla^2 w.$$

Здесь τ_s — остаточное поверхностное растяжение листа; w — поперечное смещение; D_s — поверхностная изгибная жесткость, определяемая следующим образом:

$$D_s = \frac{1}{12} \frac{E_s h_s^3}{1 - \nu_s^2},$$

E_s — модуль Юнга поверхностного слоя; ν_s — коэффициент Пуассона поверхностного слоя; h_s — толщина поверхностного слоя.

В соответствии с теорией пластин Кирхгофа — Лява перемещения в любой точке графенового листа выражаются через смещения срединной поверхности:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}, & v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}, \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (3)$$

(u_0, v_0, w_0 — компоненты вектора смещения точек срединной поверхности в направлениях осей x, y, z соответственно; t — время). С учетом соотношений (3) компоненты тензора деформаций при малых деформациях вычисляются по формулам

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \varkappa_x \\ \varkappa_y \\ \varkappa_{xy} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где $\varepsilon_x^0 = \partial u_0 / \partial x$; $\varepsilon_y^0 = \partial v_0 / \partial y$; $\gamma_{xy}^0 = \partial u_0 / \partial y + \partial v_0 / \partial x$; $\varkappa_x = -\partial^2 w_0 / \partial x^2$; $\varkappa_y = -\partial^2 w_0 / \partial y^2$; $\varkappa_{xy} = -2 \partial^2 w_0 / \partial x \partial y$.

В соответствии с моделью Кельвина и с учетом соотношений (1), (4) определяющие соотношения для вязкоупругого ортотропного материала графенового листа записываются в виде

$$(1 - \mu \nabla^2) \begin{bmatrix} \sigma_x^{nl} \\ \sigma_y^{nl} \\ \sigma_{xy}^{nl} \end{bmatrix} = \left(1 + \tau_d \frac{\partial}{\partial t}\right) \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где $Q_{11} = E_1 / (1 - \nu_{12}\nu_{21})$; $Q_{12} = \nu_{21}E_2 / (1 - \nu_{12}\nu_{21})$; $Q_{21} = \nu_{12}E_1 / (1 - \nu_{12}\nu_{21})$; $Q_{22} = E_2 / (1 - \nu_{12}\nu_{21})$; $Q_{66} = E_1 / 2(1 - \nu_{12})$; $G_{12} = Q_{66}$.

С использованием классической теории слоистых пластин и с учетом соотношений (2), (4), (5) получаем

$$(1 - \mu \nabla^2) \begin{bmatrix} N_x^{nl} \\ N_y^{nl} \\ N_{xy}^{nl} \end{bmatrix} = \left(1 + \tau_d \frac{\partial}{\partial t}\right) \begin{bmatrix} A_{11}^{hs} & A_{12}^{hs} & 0 \\ A_{21}^{hs} & A_{22}^{hs} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66}^{hs} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} A_{11}^{hs} &= \frac{E_1 h}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} + \frac{E_s}{1 - \nu_s^2}, & A_{12}^{hs} &= \frac{\nu_{21} E_2 h}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} + \frac{\nu_s E_s}{1 - \nu_s^2}, & A_{21}^{hs} &= \frac{\nu_{12} E_1 h}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} + \frac{\nu_s E_s}{1 - \nu_s^2}, \\ A_{22} &= \frac{E_2 h}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} + \frac{E_s}{1 - \nu_s^2}, & A_{66} &= G_{12} h + \frac{E_s}{1 + \nu_s}, \end{aligned}$$

и

$$(1 - \mu \nabla^2) \begin{bmatrix} M_x^{nl} \\ M_y^{nl} \\ M_{xy}^{nl} \end{bmatrix} = \left(1 + \tau_d \frac{\partial}{\partial t}\right) \begin{bmatrix} D_{11}^{hs} & D_{12}^{hs} & 0 \\ D_{21}^{hs} & D_{22}^{hs} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^{hs} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varkappa_x \\ \varkappa_y \\ \varkappa_{xy} \end{bmatrix},$$

где

$$D_{11}^{hs} = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})} + \frac{E_s h^2}{2(1 - \nu_s^2)}, \quad D_{12}^{hs} = \frac{\nu_{21} E_2 h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})} + \frac{\nu_s E_s h^2}{2(1 - \nu_s^2)},$$

$$D_{21}^{hs} = \frac{\nu_{12}E_1h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})} + \frac{\nu_s E_s h^2}{2(1-\nu_s^2)}, \quad D_{22}^{hs} = \frac{E_2h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})} + \frac{E_s h^2}{2(1-\nu_s^2)},$$

$$D_{66}^{hs} = \frac{G_{12}h^3}{12} + \frac{E_s h^2}{2(1+\nu_s)}.$$

Уравнения движения графенового листа можно получить с использованием принципа Гамильтона:

$$0 = \int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt.$$

Здесь

$$\delta U = \int_{\Omega_V} (N_x \delta \varepsilon_x^0 + M_x \delta \varkappa_x + N_y \delta \varepsilon_y^0 + M_y \delta \varkappa_y + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_{xy} \delta \varkappa_{xy}) dx dy,$$

$$\delta V = - \int_{\Omega_V} [q(x, y) + q^{hs}(x, y)] \delta w \left(x, y, \frac{h}{2} \right) dx dy - \int_{\Omega_V} F_s(x, y) \delta w \left(x, y, -\frac{h}{2} \right) dx dy,$$

$$\delta K = \int_{\Omega_V} \int_{-h/2}^{h/2} \rho (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}) dz dx dy,$$

U — энергия деформаций; V — работа внешних сил; K — кинетическая энергия; F_s — сила, действующая со стороны вязкоупругой среды. Приравнивая к нулю коэффициенты при δu_0 , δv_0 и δw_0 , получаем

$$\delta u_0: \quad \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}, \quad \delta v_0: \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2},$$

$$\delta w_0: \quad \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w_0}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial x} + N_y \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) +$$

$$+ q + q^{hs}(x, y, t) + F_s = I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - I_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right), \quad (7)$$

где I_0, I_2 — моменты инерции массы:

$$I_0 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz, \quad I_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho z^2 dz.$$

Подставляя (6) в (7) и считая, что проинтегрированные по толщине силы равны нулю, находим

$$\left(1 + \tau_d \frac{\partial}{\partial t} \right) D(w) + (1 - \mu \nabla^2) [M(w) - q - q^{hs}(x, y, t) - F_s] = 0, \quad (8)$$

где

$$D(w) = D_{11}^{hs} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (2D_{12}^{hs} + 4D_{66}^{hs}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22}^{hs} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}, \quad M(w) = I_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} w - I_2 \nabla^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} w \right).$$

Силы F_s^j , действующие со стороны вязкоупругой среды на j -й лист графена, вычисляются по формуле

$$F_s^j = (-1)^j \left(k_w(w_1 - w_2) - k_G \nabla^2(w_1 - w_2) + C_d \frac{\partial(w_1 - w_2)}{\partial t} \right), \quad j = 1, 2 \quad (9)$$

(k_w , k_G , C_d — модуль основания Винклера, модуль сдвига и коэффициент демпфирования основания Пастернака соответственно; w_1 , w_2 — смещения графеновых листов 1 и 2 соответственно). Подставляя (9) в (8), получаем уравнения движения графеновых листов:

— для графенового листа 1

$$\left(1 + \tau_d \frac{\partial}{\partial t}\right) D(w_1) + (1 - \mu \nabla^2) [M(w_1) - 2D_s \nabla^2(\nabla^2 w_1) + 2\tau_s \nabla^2 w_1 + k_w(w_1 - w_2) - k_G \nabla^2(w_1 - w_2) + C_d(\dot{w}_1 - \dot{w}_2)] = (1 - \mu \nabla^2)q; \quad (10)$$

— для графенового листа 2

$$\left(1 + \tau_d \frac{\partial}{\partial t}\right) D(w_2) + (1 - \mu \nabla^2) [M(w_2) - 2D_s \nabla^2(\nabla^2 w_2) + 2\tau_s \nabla^2 w_2 + k_w(w_2 - w_1) - k_G \nabla^2(w_2 - w_1) + C_d(\dot{w}_2 - \dot{w}_1)] = 0. \quad (11)$$

Уравнения (10), (11) сводятся к уравнениям, полученным в работе [6], если пренебречь распределенной внешней нагрузкой q и поверхностными напряжениями высокого порядка ($\tau_s = D_s = 0$).

Вводя обозначение для относительного смещения $\Delta w = w_1 - w_2$, из уравнений (10), (11) получаем следующие уравнения:

$$\left(1 + \tau_d \frac{\partial}{\partial t}\right) D(\Delta w) + (1 - \mu \nabla^2) [M(\Delta w) + 2D_s \nabla^2(\nabla^2(\Delta w)) - 2\tau_s \nabla^2(\Delta w) + 2k_w(\Delta w) - 2k_G \nabla^2(\Delta w) + 2C_d(\Delta \dot{w})] = (1 - \mu \nabla^2)q; \quad (12)$$

$$\left(1 + \tau_d \frac{\partial}{\partial t}\right) D(w_2) + (1 - \mu \nabla^2) [M(w_2) + 2D_s \nabla^2(\nabla^2 w_2) - 2\tau_s \nabla^2 w_2 - k_w(\Delta w) + k_G \nabla^2(\Delta w) - C_d(\Delta \dot{w})] = 0. \quad (13)$$

2. Аналитическое решение. Ниже получены аналитические решения задачи о свободных ($q = 0$) и вынужденных колебаниях. При решении задачи о свободных колебаниях предполагается, что графеновые листы колеблются по гармоническому закону. В случае шарнирного опирания смещения и моменты на концах графеновых листов равны нулю. В соответствии с методом Навье полагаем

$$w_j(x, y, t) = \sum_m \sum_n A_{jmn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) e^{\Omega t}, \quad j = 1, 2, \quad (14)$$

где Ω — комплексные собственные значения гармонических колебаний; A_{jmn} — амплитуды; $\alpha_m = m\pi/a$; $\beta_n = n\pi/b$.

В случае колебаний, не совпадающих по фазе, $\Delta w = w_1 - w_2 \neq 0$. Из уравнений (14), (12) при $q = 0$ получаем

$$R\Omega^2 + (T + C)\Omega + A + B = 0, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} A &= D_{11}^{hs} \alpha_m^4 + 2(D_{12}^{hs} + 2D_{66}^{hs}) \alpha_m^2 \beta_n^2 + D_{22}^{hs} \beta_n^4, \\ R &= (1 + \mu z_{mn})(I_0 + I_2 z_{mn}), \quad z_{mn} = \alpha_m^2 + \beta_n^2, \quad T = \tau_d A, \\ B &= 2(1 + \mu z_{mn})(k_w + k_G z_{mn} + \tau_s z_{mn} + D_s z_{mn}^2), \quad C = 2C_d(1 + \mu z_{mn}). \end{aligned}$$

Введем безразмерные величины

$$\begin{aligned}\bar{\omega} &= \omega a^2 \sqrt{\frac{I_0}{D_{11}^{hs}}}, & \bar{\Omega} &= \Omega a^2 \sqrt{\frac{I_0}{D_{11}^{hs}}}, & r &= \frac{a}{b}, & \bar{k}_w &= k_w \frac{a^4}{D_{11}^{hs}}, & \bar{k}_G &= k_G \frac{a^2}{D_{11}^{hs}}, \\ \bar{C}_d &= C_d a^2 \sqrt{\frac{1}{I_0 D_{11}^{hs}}}, & \bar{\tau}_s &= \tau_s \frac{a^2}{D_{11}^{hs}}, & \bar{D}_s &= \frac{D_s}{D_{11}^{hs}}, & \bar{\tau}_d &= \tau_d \frac{1}{a^2} \sqrt{\frac{D_{11}^{hs}}{I_0}}, \\ \bar{\mu} &= \left(\frac{e_0 l}{a}\right)^2 = \frac{\mu}{a^2}, & \bar{D}_{ij}^{hs} &= \frac{D_{ij}^{hs}}{D_{11}^{hs}}, & \bar{\alpha}_m &= \alpha_m a, & \bar{\beta}_n &= \beta_n a, & \bar{I}_0 &= \frac{I_0}{I_0}, & \bar{I}_2 &= \frac{I_2}{I_0 a^2}.\end{aligned}$$

Корни безразмерного характеристического уравнения (15) записываются в виде

$$\bar{\Omega}_{(o)} = -\left(\frac{\bar{T} + \bar{C}}{2\bar{R}}\right) \mp i\sqrt{\frac{\bar{A} + \bar{B}}{\bar{R}} - \left(\frac{\bar{T} + \bar{C}}{\bar{R}}\right)^2},$$

где

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \bar{D}_{11}^{hs} \bar{\alpha}_m^4 + 2(\bar{D}_{12}^{hs} + 2\bar{D}_{66}^{hs}) \bar{\alpha}_m^2 \bar{\beta}_n^2 + \bar{D}_{22}^{hs} \bar{\beta}_n^4, \\ \bar{R} &= (1 + \bar{\mu} \bar{z}_{mn})(\bar{I}_0 + \bar{I}_2 \bar{z}_{mn}), & \bar{T} &= \bar{\tau}_d \bar{A}, & \sqrt{i} &= -1, \\ \bar{B} &= 2(1 + \bar{\mu} \bar{z}_{mn})(\bar{k}_w + \bar{k}_G \bar{z}_{mn} + \bar{\tau}_s \bar{z}_{mn} + \bar{D}_s \bar{z}_{mn}^2), \\ \bar{C} &= 2\bar{C}_d(1 + \bar{\mu} \bar{z}_{mn}), & \bar{z}_{mn} &= \bar{\alpha}_m^2 + \bar{\beta}_n^2.\end{aligned}$$

Поскольку собственные значения Ω можно заменить на комплексные собственные частоты $i\omega$, выражение для безразмерной комплексной частоты собственных колебаний может быть представлено в виде

$$\bar{\omega}_{(o)} = \bar{\omega}_{u(o)} (\pm \sqrt{1 - \xi_{(o)}^2} + i\xi_{(o)}),$$

где $\bar{\omega}_{u(o)} = \sqrt{(\bar{A} + \bar{B})/\bar{R}}$ — собственная частота, соответствующая незатухающим колебаниям; $\xi_{(o)} = [(\bar{T} + \bar{C})/(2\bar{R})]/\sqrt{(\bar{A} + \bar{B})/\bar{R}}$ — коэффициент затухания; вещественная часть $\bar{\omega}_{d(o)} = \bar{\omega}_{u(o)} \sqrt{1 - \xi_{(o)}^2}$ — собственная частота свободных затухающих колебаний системы, не совпадающих по фазе.

В случае свободных колебаний, совпадающих по фазе, $\Delta w = w_1 - w_2 = 0$. Подставляя (14) в (13), получаем

$$\bar{\Omega}_{(i)} = -\frac{\bar{T}}{2\bar{R}} \mp i\sqrt{\frac{\bar{A} + \bar{B}^*}{\bar{R}} - \left(\frac{\bar{T}}{2\bar{R}}\right)^2},$$

где $\bar{B}^* = (1 + \bar{\mu} \bar{z}_{mn})(\bar{\tau}_s \bar{z}_{mn} + \bar{D}_s \bar{z}_{mn}^2)$. Можно записать также выражение для безразмерной собственной частоты свободных колебаний, совпадающих по фазе:

$$\bar{\omega}_{(i)} = \bar{\omega}_{u(i)} (\pm \sqrt{1 - \xi_{(i)}^2} + i\xi_{(i)}).$$

Собственная частота незатухающих колебаний и коэффициент затухания в случае свободных колебаний, совпадающих по фазе, представляются в виде $\bar{\omega}_{u(i)} = \sqrt{(\bar{A} + \bar{B}^*)/\bar{R}}$ и $\xi_{(i)} = \bar{T}/\sqrt{4\bar{R}(\bar{A} + \bar{B}^*)}$ соответственно, собственная частота затухающих свободных колебаний, совпадающих по фазе, — в виде $\bar{\omega}_{d(i)} = \bar{\omega}_{u(i)} \sqrt{1 - \xi_{(i)}^2}$.

Вынужденные колебания синхронны с колебаниями внешней силы, но отличаются от них по фазе. Предполагается, что внешняя нагрузка представляется в виде

$$q = q_0(x, y) \cos(\omega_e t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \cos(\omega_e t) \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y), \quad (16)$$

где ω_e — частота внешней нагрузки; q_0 — амплитуда внешней нагрузки,

$$C_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q_0(x, y) \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) dx dy.$$

Частное решение неоднородного дифференциального уравнения будем искать в виде

$$\Delta w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \eta_{(mn)}(t) \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y), \quad (17)$$

где $\eta_{(mn)}(t)$ — неизвестная функция времени. Подставляя (17) в уравнение (12), получаем

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [R\ddot{\eta}_{mn}(t) + (T + C)\dot{\eta}_{mn}(t) + (A + B)\eta_{mn}(t)] \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) = (1 - \mu\nabla^2)q. \quad (18)$$

Из (16), (18) следует

$$R\ddot{\eta}_{mn}(t) + (T + C)\dot{\eta}_{mn}(t) + (A + B)\eta_{mn}(t) = (1 + \mu z_{mn})C_{mn} \cos(\omega_e t).$$

Для того чтобы получить установившееся решение этого обыкновенного дифференциального уравнения, функцию $\eta_{mn}(t)$ примем в виде

$$\eta_{mn}(t) = \frac{F}{\sqrt{(\omega_u^2 - \omega_e^2)^2 + (2\xi\omega_u\omega_e)^2}} \cos(\omega_e t - \varphi), \quad (19)$$

где

$$F = \frac{16(1 + \mu z_{mn})q_0}{\pi^2 Rmn}, \quad \omega_u = \sqrt{\frac{A + B}{R}}, \quad \xi = \frac{T + C}{2R\omega_u}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega_u^2 - \omega_e^2}{2\xi\omega_u\omega_e}.$$

Подставляя выражение (19) в (17), получаем общее решение для разности смещений двух графеновых листов:

$$\Delta w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F \sin(\omega_e t + \varphi)}{\sqrt{(\omega_u^2 - \omega_e^2)^2 + (2\xi\omega_u\omega_e)^2}} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y). \quad (20)$$

Вводя безразмерные параметры $\bar{q}_0 = q_0 a^3 / D_{11}^{hs}$, $\bar{x} = x/a$, $\bar{y} = y/a$, $\bar{\omega}_e = \omega_e a^2 \sqrt{I_0 / D_{11}^{hs}}$, $\bar{t} = t/P$, где $P = 2\pi / \omega_e$, запишем решение (20) в безразмерной форме

$$\Delta \bar{w}(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{F} \sin(\omega_e P \bar{t} + \varphi)}{\sqrt{(\bar{\omega}_u^2 - \bar{\omega}_e^2)^2 + (2\xi \bar{\omega}_u \bar{\omega}_e)^2}} \sin(\bar{\alpha}_m \bar{x}) \sin(\bar{\beta}_n \bar{y}),$$

где $\bar{F} = 16\bar{q}_0(1 + \bar{\mu}\bar{z}_{mn}) / (mn\pi^2 \bar{R})$; $\bar{\omega}_u = \sqrt{(\bar{A} + \bar{B}) / \bar{R}}$.

3. Результаты численного решения и их обсуждение. Результаты численных расчетов получены при следующих значениях параметров: $E_1 = 1,765$ ТПа, $E_2 = 1,588$ ТПа, $G_{12} = 0,67885$ ТПа, $h = 0,34$ нм, $\nu_{21} = 0,27$, $\nu_{12} = 0,3$, $\rho = 2300$ кг/м³, $\nu_s = 0,16$. На рис. 2–6 используются следующие обозначения: БПН — зависимости, полученные без учета поверхностных напряжений, ПННП — зависимости, полученные с

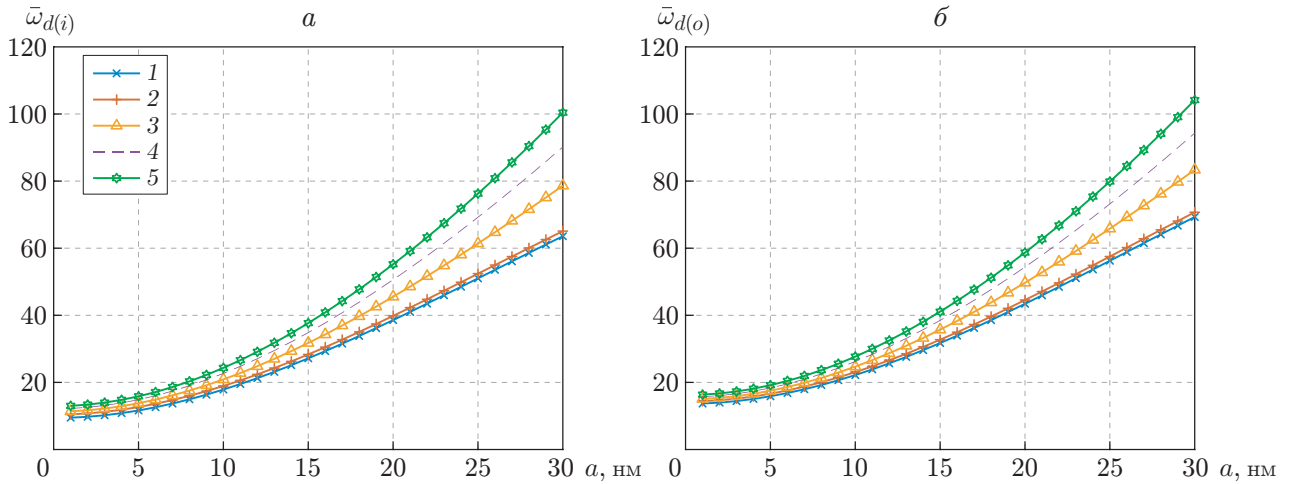


Рис. 2. Зависимости собственной частоты затухающих свободных колебаний, совпадающих (а) и не совпадающих (б) по фазе, от параметра a при $b = 10$ нм, $m = n = 1$, $\bar{k}_w = 10$, $\bar{k}_G = 4$, $\bar{C}_d = 1$, $\bar{\tau}_d = 0,01$, $\bar{\mu} = 0,01$:
 1 — $\bar{\tau}_s = 0$, $\bar{D}_s = 0$ (БПН), 2 — $\bar{\tau}_s = 1$, $\bar{D}_s = 0$ (ПННП), 3 — $\bar{\tau}_s = 1$, $\bar{D}_s = 0,1$ (ПНВП),
 4 — $\bar{\tau}_s = 1$, $\bar{D}_s = 0,2$ (ПНВП), 5 — $\bar{\tau}_s = 1$, $\bar{D}_s = 0,3$ (ПНВП)

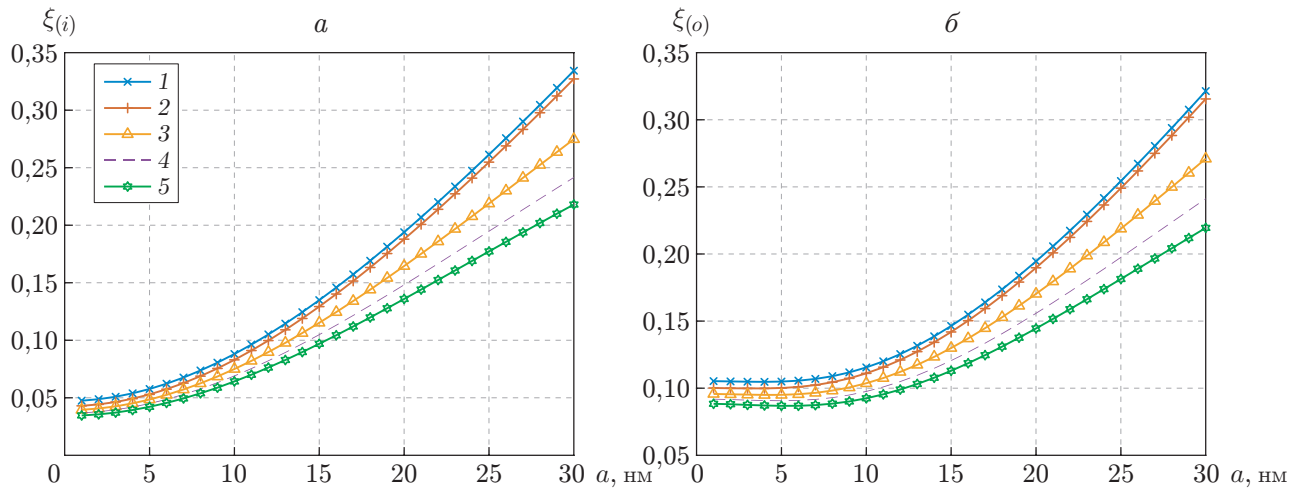


Рис. 3. Зависимости коэффициента затухания свободных колебаний, совпадающих (а) и не совпадающих (б) по фазе, от параметра a при $b = 10$ нм, $m = n = 1$, $\bar{k}_w = 10$, $\bar{k}_G = 4$, $\bar{C}_d = 1$, $\bar{\tau}_d = 0,01$, $\bar{\mu} = 0,01$ (обозначения те же, что на рис. 2)

учетом поверхностных напряжений низшего порядка, ПНВП — зависимости, полученные с учетом поверхностных напряжений высшего порядка.

На рис. 2 приведены зависимости частоты затухающих колебаний, совпадающих и не совпадающих по фазе, от параметра a . В обоих случаях при учете поверхностных напряжений частоты увеличиваются. Влияние на частоты поверхностных напряжений высшего порядка является более существенным, чем влияние поверхностных напряжений низшего порядка.

На рис. 3 приведены зависимости коэффициента затухания свободных колебаний, совпадающих и не совпадающих по фазе, от параметра a . В обоих случаях при учете поверхностных напряжений коэффициент затухания колебаний меньше, чем без учета поверх-

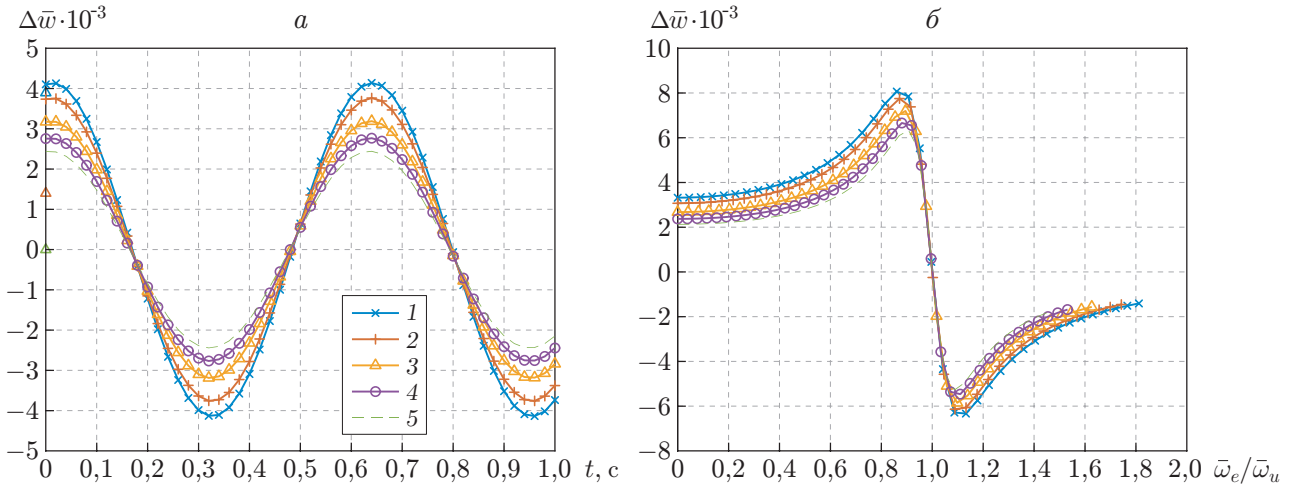


Рис. 4. Зависимости разности смещений графеновых листов от времени (а) и параметра $\bar{\omega}_e/\bar{\omega}_u$ (б) при $a = b = 10$ нм, $\bar{q}_0 = 1$, $m = n = 1$, $\bar{k}_w = 10$, $\bar{k}_G = 4$, $\bar{C}_d = 1$, $\bar{\tau}_d = 0,01$, $\bar{\mu} = 0,01$ (обозначения те же, что на рис. 2)

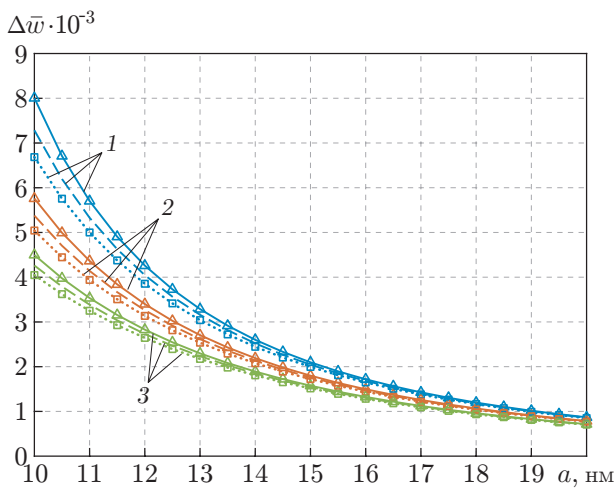


Рис. 5

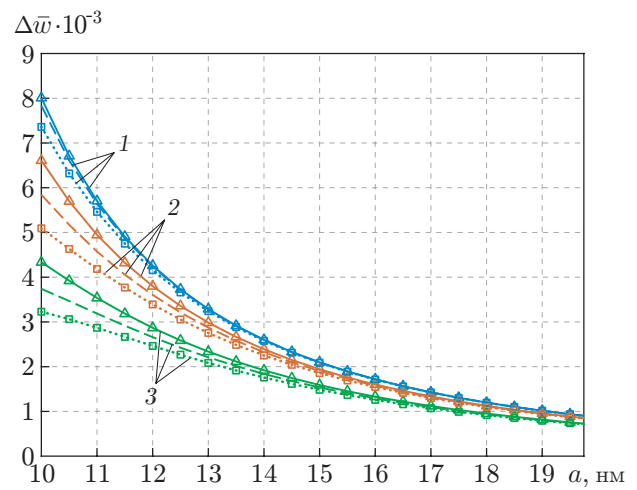


Рис. 6

Рис. 5. Зависимость разности смещений графеновых листов от параметра a при $b = 10$ нм, $\bar{q}_0 = 1$, $m = n = 1$, $\bar{D}_s = 0,1$, $\bar{C}_d = 0$, $\bar{\tau}_s = 1$, $\bar{\mu} = 0,01$, $\bar{\tau}_d = 0$ и различных значениях модуля основания Винклера \bar{k}_w и модуля сдвига \bar{k}_G вязкоупругого материала:

сплошные линии — $\bar{k}_w = 0$, штриховые — $\bar{k}_w = 10$, пунктирные — $\bar{k}_w = 20$; 1 — $\bar{k}_G = 0$, 2 — $\bar{k}_G = 2$, 3 — $\bar{k}_G = 4$

Рис. 6. Зависимость разности смещений графеновых листов от параметра a при $b = 10$ нм, $\bar{q}_0 = 1$, $m = n = 1$, $\bar{k}_s = 0$, $\bar{k}_G = 0$, $\bar{\mu} = 0,01$, $\bar{D}_s = 0,1$, $\bar{\tau}_s = 1$ и различных значениях коэффициентов демпфирования \bar{C}_d и $\bar{\tau}_d$:

сплошные линии — $\bar{C}_d = 0$, штриховые — $\bar{C}_d = 1$, пунктирные — $\bar{C}_d = 2$; 1 — $\bar{\tau}_d = 0$, 2 — $\bar{\tau}_d = 0,02$, 3 — $\bar{\tau}_d = 0,04$

ностных напряжений. Влияние поверхностных напряжений высшего порядка на коэффициент демпфирования является более существенным, чем влияние поверхностных напряжений низшего порядка.

Из анализа зависимостей, приведенных на рис. 4, следует, что наличие поверхностных напряжений приводит к уменьшению разности смещений графеновых листов. Влияние поверхностных напряжений высшего порядка на разность смещений более существенно, чем влияние поверхностных напряжений низшего порядка. Разность смещений достигает максимального значения при значении отношения $\bar{\omega}_e/\bar{\omega}_u$, близком к единице (см. рис. 4, б).

Разность смещений уменьшается с увеличением параметров \bar{k}_w и \bar{k}_G (рис. 5). Параметр k_G оказывает более существенное влияние на разность смещений, чем параметр k_w .

С увеличением коэффициентов демпфирования разность смещений графеновых листов уменьшается (рис. 6). Влияние коэффициента демпфирования конструкции на разность смещений более существенно, чем влияние коэффициента демпфирования материала. Таким образом, из зависимостей, приведенных на рис. 5, 6, следует, что как наличие слоя вязкоупругого материала между графеновыми листами, так и увеличение коэффициента демпфирования конструкции приводят к уменьшению разности смещений графеновых листов.

Заключение. С использованием теории пластин Кирхгофа — Лява и модели поведения материала Кельвина исследованы поперечные колебания системы, состоящей из двух графеновых пластин, соединенных слоем вязкоупругого материала. Получены уравнения свободных и вынужденных колебаний системы с учетом поверхностных напряжений высшего порядка. Получены выражения для частот затухающих колебаний, коэффициента демпфирования и разности смещений графеновых листов в случае шарнирного опирания торцов конструкции. Исследовано влияние поверхностных напряжений, коэффициентов демпфирования конструкции и материала, модулей упругости и сдвига вязкоупругой прослойки на колебания системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Natsuki T., Shi J. X., Ni Q. Q.** Vibration analysis of circular double-layered graphene sheets // J. Appl. Phys. 2012. V. 111, N 4. 044310.
2. **Kordkheili S. A. H., Moshrefzadeh-Sani H.** Mechanical properties of double-layered graphene sheets // Comput. Materials Sci. 2013. V. 69. P. 335–343.
3. **Shi J. X., Ni Q. Q., Lei X. W., Natsuki T.** Study on wave propagation characteristics of double-layer graphene sheets via nonlocal Mindlin — Reissner plate theory. 1 // J. Mech. Sci. 2014. V. 84. P. 25–30.
4. **Radic N., Jeremic D.** A comprehensive study on vibration and buckling of orthotropic double-layered graphene sheets under hygrothermal loading with different boundary conditions // Composites. Pt B. Engng. 2017. V. 128. P. 182–199.
5. **Su Y. J., Wei H., Gao R. G., et al.** Exceptional negative thermal expansion and viscoelastic properties of graphene oxide paper // Carbon. 2012. V. 50, N 8. P. 2804–2809.
6. **Hashemi S. H., Mehrabani H., Ahmadi-Savadkoobi A.** Exact solution for free vibration of coupled double viscoelastic graphene sheets by viscoPasternak medium // Composites. Pt B. Engng. 2015. V. 78. P. 377–383.
7. **Hosseini M., Jamalpoor A., Bahreman M.** Small-scale effects on the free vibrational behavior of embedded viscoelastic double-nanoplate-systems under thermal environment // Acta Astronaut. 2016. V. 129. P. 400–409.

8. **Liu J. C., Zhang Y. Q., Fan L. F.** Nonlocal vibration and biaxial buckling of double-viscoelastic-FGM-nanoplate system with viscoelastic Pasternak medium in between // *Phys. Lett. A*. 2017. V. 381, N 14. P. 1228–1235.
9. **Jalaei M. H., Arani A. G.** Analytical solution for static and dynamic analysis of magnetically affected viscoelastic orthotropic double-layered graphene sheets resting on viscoelastic foundation // *Phys. B*. 2018. V. 530. P. 222–235.
10. **Hosseini M., Jamalpoor A.** Analytical solution for thermomechanical vibration of double-viscoelastic nanoplate-systems made of functionally graded materials // *J. Thermal Stress*. 2015. V. 38, N 12. P. 1428–1456.
11. **Ghorbanpour-Arani A., Shokravi M.** Vibration response of visco-elastically coupled double-layered visco-elastic graphene sheet systems subjected to magnetic field via strain gradient theory considering surface stress effects // *Proc. Inst. Mech. Engrs. Pt N. J. Nanoengng Nanosyst*. 2014. V. 229, N 4. P. 180–190.
12. **Allahyari E., Fadaee M.** Analytical investigation on free vibration of circular double-layer graphene sheets including geometrical defect and surface effects // *Composites. Pt B. Engng*. 2016. V. 85. P. 259–267.
13. **Ebrahimi F., Hosseini S. H. S.** Surface effects on nonlinear dynamics of NEMS consisting of double-layered viscoelastic nanoplates // *Europ. Phys. J. Plus*. 2017. V. 132. P. 172.
14. **Liu F., Rugheimer P., Mateeva E., et al.** Nanomechanics: Response of a strained semiconductor structure // *Nature*. 2002. V. 416. P. 498.
15. **Chiu M. S., Chen T.** Effects of high-order surface stress on static bending behavior of nanowires // *Phys. E*. 2011. V. 44, N 3. P. 714–718.
16. **Pang M., Li Z. L., Zhang Y. Q.** Size-dependent transverse vibration of viscoelastic nanoplates including high-order surface stress effect // *Phys. B*. 2018. V. 545. P. 94–98.

*Поступила в редакцию 17/IV 2020 г.,
после доработки — 8/VI 2020 г.
Принята к публикации 29/VI 2020 г.*
