

О НЕРЕГУЛЯРНОМ ОТРАЖЕНИИ СЛАБЫХ УДАРНЫХ ВОЛН ОТ ЖЕСТКОЙ СТЕНКИ

Г. П. Шиндяпин

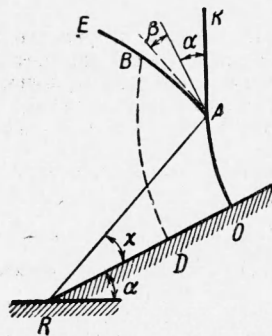
(Саратов)

В нелинейной постановке задача о нерегулярном отражении слабых ударных волн от жесткой стенки впервые рассматривалась в работе О. С. Рыжова и С. А. Христиановича [1]. Исследование течения для углов падения, близких к критическим, проводилось на основе уравнений «очень коротких волн». При этом размеры области резких изменений давления вблизи волны Маха остались неопределенными.

Приведенное в работе А. А. Гриба, О. С. Рыжова и С. А. Христиановича [2] решение системы «коротких волн» для случая, когда отраженную волну можно считать звуковой, описывает течение вблизи волны Маха при малых углах падения. Однако и здесь положение линии, замыкающей область резких изменений давления, осталось произвольным.

В настоящей работе исследуется режим нерегулярного отражения слабых ударных волн согласно теории «коротких волн», найдено частное решение уравнений «коротких волн», удовлетворяющее граничным условиям данной задачи, в том числе и на волне Маха, приведен пример расчета поля скоростей течения и построена картина отражения.

1.1. Как известно [3], задачу о нерегулярном отражении ударной волны можно представить следующей схемой (фиг. 1). Фронт плоской бесконечно длинной ударной волны AK с малым избыточным давлением p_1 подходит к жесткой стенке OR под некоторым углом α , величина которого для ударной волны данной интенсивности отвечает условиям [1], при которых осуществляется нерегулярное отражение ($\alpha < \alpha_*$) [1]. При этом взаимодействие ударных волн с жесткой стенкой приводит к появлению трехскачковой конфигурации, состоящей из падающего фронта AK , вдоль которого избыточное давление постоянно, волны Маха OA , вдоль которого избыточное давление падает от некоторого значения p_0 в основании волны до p_2 в точке A , и фронта отраженной волны AB , где избыточное давление падает от p_2 до p_1 .



Фиг. 1

В цилиндрической системе координат r, ϑ для области $OABD$, следовательно, имеет место интенсивное изменение давления как в радиальном направлении, так и в направлении изменения угла ϑ ; т. е. можно считать, что течение здесь соответствует «короткой волне» [1].

1.2. Пусть проекции вектора скорости на оси цилиндрической системы координат u, v, p — избыточное давление, ρ — плотность, t — время, P_0, ρ_0 — начальные значения давления и плотности, $n = 1, 4$.

Тогда, согласно теории «коротких волн» [1, 2], введем безразмерные функции

$$\begin{aligned} u &= a_0 M_0 \mu = a_0 M, & v &= a_0 \sqrt{1/2(n+1)} V_0 v = a_0 V \\ a &= a_0 [1 + 1/2(n-1) M_0 \alpha], & a_0 &= \sqrt{n P_0 / \rho_0} \end{aligned} \quad (1.1)$$

и перейдем к подвижной системе координат

$$r = a_0 t \left(1 + \frac{n+1}{2} M_0 \delta \right), \quad \vartheta = \theta_0 \sqrt{1/2(n+1)} Y, \quad \tau = \ln t \quad (1.2)$$

Здесь a — скорость звука, a_0 — начальная скорость звука, M_0, V_0, θ_0 — характерные значения M, V, ϑ , причем они малы по сравнению с единицей, а μ, ν, α, δ — величины порядка единицы. Положим

$$V_0 = M_0 \sqrt{M_0}, \quad \theta_0 = \sqrt{M_0}$$

Уравнения движения и уравнение неразрывности после отбрасывания малых величин примут для случая плоскопараллельных течений, явно не зависящих от времени, вид [1]

$$(\mu - \delta) \frac{\partial \mu}{\partial \delta} + \frac{1}{2} \frac{\partial \nu}{\partial Y} + \frac{1}{2} \mu = 0, \quad \frac{\partial \nu}{\partial \delta} - \frac{\partial \mu}{\partial Y} = 0, \quad M = \frac{p}{nP_0} \quad (1.3)$$

Переход от цилиндрической системы координат к декартовой осуществляется по формулам

$$\begin{aligned} x &= a_0 t [1 + 1/2(n+1) M_0 X] \\ y &= a_0 t \sqrt{1/2(n+1) M_0} Y, \quad \delta = X + 1/2 Y^2 \end{aligned} \quad (1.4)$$

1.3. Введем граничные условия. Пусть фронт с избыточным давлением p распространяется в среде с начальным избыточным давлением p_1 и скоростью q_1 . Согласно [1], скорость распространения фронта волны N и скорость частиц за фронтом q

$$N = a_0 [1 + 1/4(n+1)(M + M_1)], \quad q = a_0 p / P_0 n \quad (1.5)$$

Условие Гюгонио на ударном фронте удовлетворяется автоматически, так как во всем потоке M и p связаны соотношением

$$M = \frac{p}{nP_0} \quad (1.6)$$

Потребуем непрерывности составляющей вектора скорости в направлении, параллельном фронту при переходе через него.

Пусть ψ — угол между нормалью к ударному фронту и направлением радиус-вектора, тогда условие запишется

$$u\psi - v = q_1(\psi + \vartheta + \alpha) \quad (q_1 = a_0 p_1 / P_0 n = u_1) \quad (1.7)$$

Так как $\psi = r^{-1} dr / d\vartheta = \sqrt{1/2(n+1) M_0} d\delta / dY$, то из равенства скоростей распространения фронта ударной волны по радиус-вектору

$$\frac{N}{\cos \psi} = a_0 \left[1 + \frac{n+1}{4} (M + M_1) + \frac{\psi^2}{2} \right], \quad \frac{dr}{dt} = a_0 \left[1 + \frac{n+1}{2} M_0 \delta \right] \quad (1.8)$$

получим

$$\psi = \sqrt{1/2(n+1) M_0} \sqrt{2\delta - (\mu + \mu_1)} \quad (1.9)$$

Окончательно условие (1.7) в обозначениях (1.1) имеет вид

$$(\mu - \mu_1) \sqrt{2\delta - (\mu + \mu_1)} - \nu = \mu_1 (\alpha_0 + Y), \quad \alpha_0 = \alpha [1/2(n+1) M_0]^{-1/2} \quad (1.10)$$

Уравнение фронта волны получим из (1.8)

$$\delta = \frac{\mu + \mu_1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\delta}{dY} \right)^2$$

или, если воспользоваться переходом к декартовой системе (1.4)

$$\frac{dX}{dY} + Y = \sqrt{2\delta - (\mu + \mu_1)} \quad (1.11)$$

$$\delta_A = \frac{1}{8} \left(\frac{\mu_2}{\alpha_0 + \beta_0} \right)^2 + \frac{\mu_2}{4} + \frac{\mu_1}{2} + \frac{1}{8} (\alpha_0 + \beta_0)^2$$

При малых углах падения α , соответствующих нерегулярному отражению, можно с большой точностью считать (фиг. 2) $AG = OG$

$$OG = \frac{\alpha + \chi}{\alpha} r_A - r_0, \quad AG = \frac{\alpha + \chi}{\alpha} \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) r_A - \left[1 - \frac{(\alpha + \chi)^2}{2}\right] r_A$$

Это дает условие

$$2(\delta_A - 1/2) = \chi_0(\alpha_0 + \chi_0) \quad (2.9)$$

Теперь значения $\alpha_0, \beta_0, \delta_A, \chi_0, \mu_2$ должны определиться совместным решением вторых условий (2.2), (2.3), условия (2.5), третьего равенства (2.8) и (2.9).

Из (2.2) и (2.9), исключая δ_A , получим

$$\mu_1 = 1 - \alpha_0(\alpha_0 + \chi_0) \quad (2.10)$$

а исключая χ_0 , имеем

$$\delta_A = \frac{1 + \mu_1^2 + (\alpha_0^2 - 2)\mu_1}{2\alpha_0^2} \quad (2.11)$$

Однако, если из вторых условий (2.2), (2.3) выразить μ_2

$$\mu_2 = (\alpha_0 + \beta_0)(\alpha_0 - \beta_0 + 2\chi_0)$$

и подставить в (2.5), то получим, что нетривиальное решение есть

$$\mu_1 = (\alpha_0 + \beta_0)(\alpha_0 - \beta_0 + 2\chi_0), \quad \text{или } \mu_1 = \mu_2 \quad (2.12)$$

Это означает, согласно (1.16), что AB — фронт звуковой волны

$$X + \frac{1}{2}Y^2 = \delta_A = \mu_1 \quad (2.13)$$

Тогда из вторых условий (2.2), (2.3), (2.4) получим

$$\alpha_0 + \chi_0 = \sqrt{\mu_1}, \quad \chi_0 = \beta_0, \quad \psi_A^0 = \alpha_0 + \chi_0 \quad (2.14)$$

Это вместе с (2.9) дает

$$\alpha_0 = (1 - \mu_1) / \sqrt{\mu_1}, \quad \chi_0 = \beta_0 = (2\mu_1 - 1) / \sqrt{\mu_1} \quad (2.15)$$

2.2. Исследуем зависимости (2.10), (2.11). Вводя обозначения

$$\alpha^\vee = \frac{\alpha}{\sqrt{1/2(n+1)M_1}} = \frac{\alpha_0}{\sqrt{\mu_1}}, \quad \chi^\vee = \frac{\chi}{\sqrt{1/2(n+1)M_1}} = \frac{\chi_0}{\sqrt{\mu_1}}$$

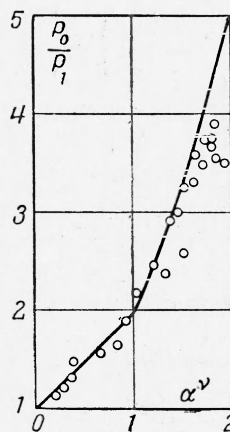
получим

$$\frac{p_0}{p_1} = \frac{1}{\mu_1} = 1 + \alpha^\vee(\alpha^\vee + \chi^\vee), \quad \delta_A = \frac{1 - 2\mu_1 + (1 + \alpha^{\vee 2})\mu_1^2}{2\alpha^{\vee 2}\mu_1} \quad (2.16)$$

а) По первому условию (2.14) имеем $\chi^\vee = 1 - \alpha^\vee > 0$ при $0 \leq \alpha^\vee < 1$; поэтому равенства (2.16) принимают вид

$$p_0 / p_1 = 1 + \alpha^\vee, \quad \delta_A = \mu_1 \quad (2.17)$$

б) Величина $\chi^\vee = 0$ при $\alpha^\vee = 1$, т. е. обращается в нуль [1] при угле падения, равном половине критического угла $\alpha_*^\vee$. Опыты показывают [4], что, действительно, в диапазоне $0.5\alpha_* \leq \alpha \leq \alpha_*$ угол χ очень мал.



Фиг. 3

Тогда при $1 \leq \alpha^V \leq \alpha_*^V = 2$ получим для (2.16)

$$p_0 / p_1 = 1 + \alpha^{V^2}, \quad \delta_A = 1/2 \quad (2.18)$$



Фиг. 4

т. е. область, прилегающая к волне Маха, становится бесконечно малой.

На фиг. 3 дана кривая, показывающая изменение максимального относительного избыточного давления у стенки с изменением угла падения, соответственно формулам (2.17), (2.18).

На фиг. 3 даны также экспериментальные данные, полученные Д. Р. Уайтом [5]. Теперь, имея исходные данные p_1 , α или M_1 , α , определяем основные параметры, характеризующие поток, по формулам (2.14), (2.15), (2.16).

3.1. Для отыскания частных решений уравнений (1.3) воспользуемся классом точных решений, указанных Б. И. Заславским [6], вида

$$\mu = \varphi_2(q) Y^2 + \varphi_1(q), \quad \delta = qY^2 + \chi_1(q), \quad v = \psi_3(q) Y^3 + \psi_1(q) Y$$

где q — параметр. Течение в возмущенной области $OABD$ будет описываться частичным решением

$$\mu = 1/2 q (1 - q) Y^2 + a (q - 1/3)^{-5/3} [q^2 + (b - 1) q + 1/5 (1 - 2b)] + d$$

$$\delta = qY^2 - a (q - 1/3)^{-5/3} [q - 1/5 (1 - 2b)] + d \quad (3.1)$$

$$v = 1/3 q^3 Y^3 - a (q - 1/3)^{-5/3} [q^3 + (1 - 2b) q^2 - (1 - 2b) q + 1/5 (1 - 2b)] Y - dY$$

где a, b, d — произвольные постоянные.

Они должны быть выбраны таким образом, чтобы удовлетворялись условия в точках A и O , а следовательно, и условие непрерывности касательной составляющей вектора скорости при переходе через волну Маха.

В точке A , согласно (2.13), (2.15), (2.4), имеем

$$\delta_A = \mu_1, \quad Y_A = \chi_0 = \frac{2\mu_1 - 1}{V \mu_1}, \quad v_A = -(\mu_1)^{3/2}$$

Это дает

$$\mu_1 = 1/2 q (1 - q_1) Y_A^2 + a (q_1 - 1/3)^{-5/3} [q_1^2 + (b - 1) q_1 + 1/5 (1 - 2b)] + d$$

$$\mu_1 = q_1 Y_A^2 - a (q_1 - 1/3)^{-5/3} [q_1 - 1/5 (1 - 2b)] + d \quad (3.2)$$

$$-(\mu_1)^{3/2} = 1/3 q_1^3 Y_A^3 - a (q_1 - 1/3)^{-5/3} \times$$

$$\times [q_1^3 + (1 - 2b) q_1^2 - (1 - 2b) q_1 + 1/5 (1 - 2b)] Y_A - dY_A$$

В точке O $\mu_0 = 1$, $\delta_0 = 1/2$, $Y_0 = 0$ и для (3.1) получим

$$1 = a (q_0 - 1/3)^{-5/3} [q_0^2 + (b - 1) q_0 + 1/5 (1 - 2b)] + d$$

$$1/2 = -a (q_0 - 1/3)^{-5/3} [q_0 - 1/5 (1 - 2b)] + d \quad (3.3)$$

Имеем пять уравнений для отыскания пяти неизвестных.

Решая эти уравнения совместно, получим

$$b = \frac{Y_A^3 (q_1^2 - 2q_1^3 - 1/3 q_1^4) - 2\mu_1 (Y_A - \mu_1^{1/3}) q_1}{2\mu_1 (Y_A - \mu_1^{1/3}) - 8/3 Y_A^3 q_1^3} \quad (3.4)$$

$$d = \mu_1 - Y_A^2 q_1 + \frac{Y_A^2}{2} \frac{(q_1 + 1) [q_1 - 1/5 (1 - 2b)]}{q_1 + b} \quad (3.5)$$

$$q_0 = \frac{5 + 5b - 10bd + \sqrt{100 b^2 d^2 - 20 [b(1 + 5b) + 2] d + 10b + 25b^2 + 45}}{10(2d - 1)} \quad (3.6)$$

$$a = \frac{Y_A^3}{2} \frac{(q_1 + 1) (q_1 - 1/3)^{5/3}}{(q_1 + b)} - \frac{(q_0 - 1/3)^{5/3}}{2q_0 (q_0 + b)} \quad (3.7)$$

т. е. значения a, b, d, q_0 определились через q_1 .

Значение q_1 получим, решая уравнение (3.7), где q_0 взято по (3.6).

На фиг. 4 дана кривая зависимости q_1 от μ_1 , полученная численным решением уравнения (3.7). При этом для значений μ_1 , стремящихся к 0.5, q_1 стремится к q_0 , и, согласно (3.7), имеем

$$q_1 = \frac{\sqrt{4\mu_1^2 + 1}}{2(2\mu_1 - 1)} - 0.5$$

Этим значениям соответствует пунктирная линия на фиг. 4.

3.2. Уравнение фронта волны Маха

$$\frac{d\delta}{dY} = \sqrt{2\delta - \mu}$$

после подстановки решение (3.1) примет вид

$$\frac{dq}{dY} = \frac{\sqrt{1/2 q (3 + q) Y^2 - a (q - 1/3)^{-5/3} [q^2 + (b + 1) q - 1/5 (1 - 2b)] + d - 2Yq}}{Y^2 + 2/3 a (q - 1/3)^{-5/3} (q + b)} \quad (3.8)$$

Его необходимо проинтегрировать при условии $Y = 0, q = q_0$. Уравнение (3.8) в дальнейшем будем интегрировать численно, выстраивая фронт волны Маха от точки O до A .

3.3. Рассмотрим для примера поток при $M_1 = 0.1, \alpha = 4^\circ$, что соответствует по (2.17) $\mu_1 = 0.833$. Согласно (2.16), (2.14), имеем

$$\alpha_0 = 0.183, \quad Y_A = \chi_0 = \beta_0 = 0.73, \quad \delta_A = 0.833$$

Уравнение (3.7) дает значение $q_1 = 1.09$ (фиг. 4), что позволяет по формулам (3.4), (3.5), (3.6), (3.7) определить

$$a = 0.261, \quad b = 0.236, \quad d = 0.667, \quad q = 2.7$$

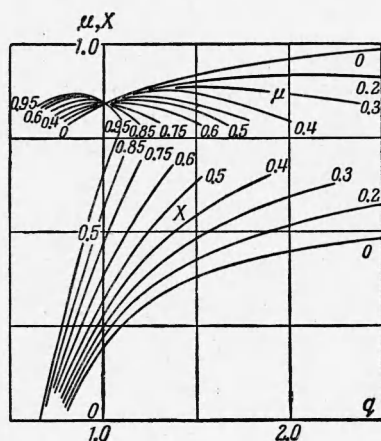
На фиг. 5 показаны поля значений $\mu(q, Y)^\circ, X(q, Y)$, вычисленные по формулам (3.1). Численные индексы вдоль кривых соответствуют значениям Y , при которых проводился расчет.

На фиг. 6 показано поле скоростей $\mu(X, Y)$ (поле равных давлений), согласно данным фиг. 5. На фиг. 6 построены также фронт волны Маха, координаты которого получены численным интегрированием уравнения (3.8), и фронт падающей и отраженной волн. При этом условие непрерывности касательной составляющей вектора скорости при переходе через волну Маха удовлетворяется на всем фронте волны с большой точностью.

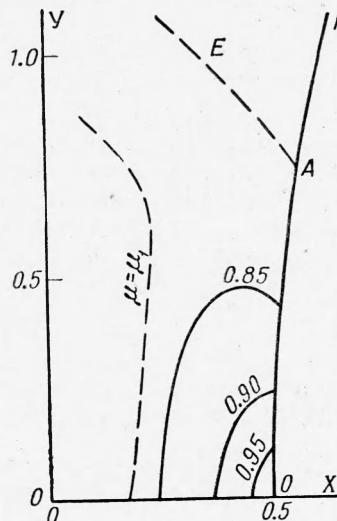
Как видно из полученного распределения скоростей, величина области сильных изменений давления по направлению стенки определилась. Линии равных давлений (скоростей) хорошо согласуются с поведением соответствующих линий равных плотностей по интерферограмме К. Г. Флетчера [7] для подобного течения.

Что касается определения линии $\mu = \mu_1$ со стороны отраженной волны, то ее положение должно быть найдено из условия смыкания данного решения с соответствующим решением в линейной постановке задачи.

В рассматриваемом случае было достаточно выполнение того условия, что на этой линии градиенты давления, плотно-



Фиг. 5



Фиг. 6

сти и скорости частиц малы, так как теперь деформация линии и изменение условий на ней должны слабо влиять на распределение скорости в области больших градиентов.

Автор приносит благодарность С. В. Фальковичу за советы при обсуждении работы.

Поступила 5 X 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Рыжов О. С., Христианович С. А. О нелинейном отражении слабых ударных волн. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 5.
2. Гриб А. А., Рыжов О. С., Христианович С. А. Теория коротких волн. ПМТФ, 1960, № 1.
3. Станюкович К. П. Неустановившиеся течения сплошной среды. Гостехтеоретиздат, 1955.
4. Bleakney W., Taub A. H. Interaction of shock waves. Rev. Mod. Phys., 1944, vol. 21, No. 4.
5. White D. R. An experimental survey of the Mach reflection of shock waves. Proc. second Midwestern Fluid Mech., 1952.
6. Заславский Б. И. Некоторые частные решения уравнений «коротких волн». ПМТФ, 1962, № 1.
7. Fletcher C. H., Taub A. H., Bleakney W. The Mach reflection of shock waves at nearly glancing incidence. Rev. Mod. Phys., 1951, vol. 23, No. 3.