

СОЛИТОНЫ НА СТЕКАЮЩЕЙ ЖИДКОЙ ПЛЕНКЕ

Л. Н. Маурин, А. А. Точигин

(Иваново)

Изучаются одномерные уединенные волны (солитоны), могущие двигаться на поверхности тонкого слоя вязкой жидкости, стекающей по вертикальной плоскости. По-видимому, первое (экспериментальное) описание таких волн дано в [1]; в дальнейшем производились количественные измерения их характеристик [2, 3] и делались попытки объяснить их теоретически, в [4—6] обсуждалась природа таких волн и были указаны некоторые их свойства, в [7] проводилась точка зрения на стационарный солитон как предельное (при уменьшении волнового числа) решение квазигармонического типа.

Ниже проведен качественный анализ эволюции нестационарного солитона и на этой основе объясняется его форма; приближенно вычислены основные характеристики стационарного солитона (амплитуды, скорости); проведено сравнение с экспериментальными данными.

1. Уравнение для волн на вертикально стекающей пленке вязкой жидкости при небольших числах Рейнольдса хорошо известно, оно может быть получено разными способами и в предположении длинных слабонелинейных волн приводится к виду

$$(1.1) \quad \varphi_t + 3\varphi_x + \varphi\varphi_x + \operatorname{Re} \varphi_{xx} + W\varphi_{xxxx} = 0,$$

где $\varphi = 6(h - \langle h \rangle) / \langle h \rangle$; h — локальная толщина пленки; $\langle h \rangle$ — средняя по длине толщина пленки; t — безразмерное время; x — безразмерная вертикальная (вниз) координата (масштабом для измерения длины служит $\langle h \rangle$, масштабом для измерения времени — $3\nu g^{-1} \langle h \rangle^{-1}$, ν — вязкость, g — ускорение тяжести); $\operatorname{Re} = 2g \langle h \rangle^3 / 5\nu^2$ — число Рейнольдса; $W = \sigma / \rho g \langle h \rangle^2$ — число Вебера (σ — коэффициент поверхностного натяжения, ρ — плотность жидкости).

Вместе с уравнениями Бюргерса и Кортевега-де-Вриза уравнение (1.1) принадлежит к числу так называемых нелинейных эволюционных уравнений. Общей для таких уравнений является трактовка величин φ и $\varphi^2/2$ как плотности импульса и плотности энергии (эта трактовка связана с галилеевой инвариантностью нелинейных эволюционных уравнений). Ограничиваясь в дальнейшем рассмотрением лишь уединенных волн (солитонов), для которых $\varphi \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$, причем существуют интегралы типа

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(x, t) dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_x^2(x, t) dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{xx}^2(x, t) dx,$$

получим из (1.1) законы изменения импульса и энергии: $\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi dx = 0$, $\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi^2}{2} dx = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2 dx -$

$- W \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{xx}^2 dx$. Видно, что член $\operatorname{Re} \varphi_{xx}$ в уравнении (1.1) описывает

пропорциональную числу Рейнольдса накачку энергии в волну, а член $W\varphi_{xxxx}$ — диссипацию энергии, причем накачка энергии происходит на низких частотах, а диссипация — на высоких.

Используем теперь импульс солитона для определения понятия скорости: определим скорость солитона как скорость распространения импульса (для солитона, являющегося образованием, локализованным в

пространстве и сильно размазанным по спектру волновых чисел и к тому же обменивающимся энергией со средой посредством накачки и диссипации, определение скорости как групповой скорости, связанной с распространением энергии, уже не представляется удачным). Определяя положение импульса как $\bar{x} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x \varphi dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi dx}$, получим (используя (1.1)) следующее выражение для скорости солитона:

$$v_s = \frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x \varphi_t dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi dx} = 3 + \frac{1}{2} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi dx}.$$

Заметим, что определение скорости волнового пакета как скорости распространения импульса для линеаризованных спектрально-узких волновых пакетов приводит к обычной групповой скорости. Действительно, рассмотрим возмущение, имеющее вид спектрально-узкого волнового пакета с несущим волновым числом k_0 : $\varphi(x, t) = A(x, t) \exp(-ik_0 x + i\omega_0 t)$, где $A(x, t)$ — медленно меняющаяся (убывающая при $x \rightarrow \pm\infty$) амплитуда. Разлагая $A(x, t)$ в интеграл Фурье, получим

$$\varphi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(k) e^{i(k-k_0)x - i(\omega(k) - \omega_0)t} dk.$$

Имеем далее

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{dt} &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x \varphi_t dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi dx} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(k) e^{-i(\omega - \omega_0)t} dk \int_{-\infty}^{\infty} x e^{i(k-k_0)x} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(k) e^{-i(\omega - \omega_0)t} dk \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k_0)x} dx} = \\ &= \frac{-2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(k) e^{-i(\omega - \omega_0)t} \delta(k - k_0) dk}{2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(k) e^{-i(\omega - \omega_0)t} \delta(k - k_0) dk} = \\ &= i \frac{\alpha'(k_0)}{\alpha(k_0)} + t \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем $v_s = d\bar{x}/dt = d\omega/dk|_{k=k_0}$.

Возвращаясь к обсуждению свойств солитонов уравнения (1.1), заметим, что в силу сохранения величины $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi dx$ можно ввести инвариантную во времени классификацию солитонов: назовем солитон положительным (отрицательным), если его импульс (имеющий геометрический смысл площади) положителен (отрицателен). При этом из указанного выше выражения v_s для скорости солитона следует, что для положительного солитона $v_s > 3$, а для отрицательного — $v_s < 3$. Пересчитываем (1.1) на систему отсчета $\xi = x - 3t$

$$(1.2) \quad \varphi_t + \varphi \varphi_\xi + \operatorname{Re} \varphi_{\xi\xi} + W \varphi_{\xi\xi\xi\xi} = 0.$$

Видно, что (1.2) инвариантно относительно преобразования $\xi \rightarrow -\xi$, $\varphi \rightarrow -\varphi$. Так как это преобразование переводит положительный солитон в отрицательный, то, таким образом, отрицательный солитон есть просто инверсия (в системе осей $\xi = x - 3t$ и $y = \langle h \rangle$) положительного солитона. Поэтому ниже для определенности рассматривается положительный солитон.

Проведем теперь качественный анализ роли отдельных членов уравнения (1.2) в эволюции (положительного) солитона, рассматривая их как слагаемые, дающие вклад в φ_t . Для этого рассмотрим уравнения

$$(1.3) \quad \varphi_t + \varphi\varphi_\xi = 0, \quad \varphi_t + \operatorname{Re} \varphi_{\xi\xi} = 0, \quad \varphi_t + W\varphi_{\xi\xi\xi} = 0.$$

Первое из этих уравнений описывает простую волну $\varphi = f(\xi - \varphi t)$. Движение такой волны сопровождается увеличением крутизны переднего (в системе ξ) фронта и уменьшением крутизны заднего фронта.

Если $\varphi(t_0, \xi) \geq 0$, то передним фронтом будет правый фронт (положительная простая волна движется вправо). Этим определена роль члена $\varphi\varphi_\xi$.

Второе из уравнений (1.3) описывает диффузию с отрицательным коэффициентом. Поэтому член $\operatorname{Re} \varphi_{\xi\xi}$ приводит к монотонному росту градиентов в волне (именно он отвечает за неустойчивость тривиального решения $\varphi \equiv 0$).

Для выявления роли члена $W\varphi_{\xi\xi\xi}$ рассмотрим третье из уравнений

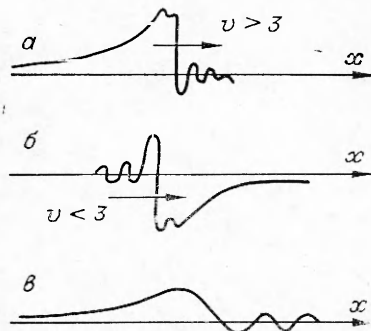
$$(1.3). \text{ Его решение имеет вид } \varphi(\xi, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(k) \exp(-ik\xi - Wk^4 t) dk,$$

$\alpha(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi, 0) \exp(ik\xi) d\xi$. Используя метод стационарной фазы, получим асимптотику при больших ξ (и больших t)

$$(1.4) \quad \varphi(\xi, t) = \sqrt{\frac{8}{3\pi}} (4Wt\xi^2)^{-1/6} \operatorname{Real} \left\{ \alpha \left[\frac{\xi^{1/3} e^{-i\pi/6}}{(4Wt)^{1/3}} \right] \exp \left[-\frac{3}{8} \left(1 + i\sqrt{3} \right) \xi^{4/3} (4Wt)^{-1/3} + i\theta \right] \right\}.$$

Из (1.4) видно, что член $W\varphi_{\xi\xi\xi}$ приводит к уменьшению функции φ и ее градиентов, однако (что важно подчеркнуть) это уменьшение в отличие от диффузии носит не монотонный характер, а имеет вид затухающих (по обе стороны) осцилляций. А также видно, что фаза этих осцилляций постоянна при $\xi^{4/3} t^{-1/3} = \operatorname{const}$ и, значит, фазовая скорость осцилляций равна $\dot{\xi} \sim t^{-3/4}$. Так как t предполагается большим, то осцилляции практически не движутся относительно солитона.

Совместное действие всех рассмотренных членов в (1.2) представляется таким, что при возникновении достаточно крупноамплитудного (но пологого) возмущения $\varphi(t_0, \xi) \geq 0$ определяющую роль в его эволюции сначала играет член $\varphi\varphi_\xi$, деформирующий это возмущение таким образом, что передний (в системе ξ) (правый) фронт его становится крутым, а задний (левый) еще более пологим. Как только крутизна переднего фронта станет достаточно большой, в местах большой крутизны становятся существенными дисперсионные члены $\operatorname{Re} \varphi_{\xi\xi}$ и $W\varphi_{\xi\xi\xi}$, действия которых неодинаковы: если первый из них стремится увеличить градиенты φ , то второй, наоборот, уменьшает эти градиенты. В конечном счете именно действие члена $W\varphi_{\xi\xi\xi}$ стабилизирует крутизну фронта волны и препятствует ее опрокидыванию.



Ф и г. 1

жестся один и тот же — правый фронт волны, и в связи со сказанным выше со временем солитон приобретает форму, изображенную на фиг. 1, а. В случае $\varphi(t_0, \xi) \leq 0$ возмущение движется влево относительно системы отсчета ξ так, что его крутым фронтом будет левый фронт. В системе отсчета x этот фронт является задним фронтом солитона. Так как дисперсионное размывание имеет место только на крутом фронте, то в отрицательном солитоне будет размываться задний фронт (фиг. 1, б).

Изложенные соображения согласуются с результатами экспериментальных наблюдений [1—3]. Однако опыты указывают с большой определенностью на существование положительных, а не отрицательных солитонов. По-видимому, это следует объяснить тем, что ярко выраженный солитон (как это видно из опытов) имеет большую амплитуду, в несколько раз превышающую среднюю толщину пленки. Это возможно только для положительных солитонов (в отрицательных солитонах амплитуда, разумеется, не может превышать средней толщины пленки, иначе возникает прилипание к стенке; будучи малоамплитудными, отрицательные солитоны не могут проявить себя на фоне крупноамплитудных положительных солитонов).

2. Отмеченный выше физический механизм накачки энергии на низких частотах и диссипации на высоких частотах в принципе способен обеспечить постоянство энергии, что позволяет надеяться на возможность стационарного движения солитона, т. е. такого решения уравнения (1.1), при котором $\varphi(x, t) = \varphi(x - ct)$. Для стационарного движения (1.1) принимает вид

$$(2.1) \quad -c\varphi' + 3\varphi' + \varphi\varphi' + \operatorname{Re} \varphi'' + W\varphi^{1v} = 0, \quad (\dots)' = d/du, \\ u = x - ct.$$

Интегрируя это уравнение с граничным условием $\varphi \rightarrow 0$ при $u \rightarrow -\infty$ (или $u \rightarrow +\infty$), получим

$$(2.2) \quad (3 - c)\varphi + \varphi^2/2 + \operatorname{Re} \varphi' + W\varphi''' = 0, \quad \varphi \rightarrow 0 \text{ при } u \rightarrow \pm\infty.$$

Отсюда — два соотношения для стационарного солитона

$$(2.3) \quad (3 - c) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi du + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2 du = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left(3 - c + \frac{\varphi}{2}\right) \varphi^2 du = 0.$$

Из второго соотношения (2.3) следует знакопеременность скобки (3 —

Так как, кроме того, этот член порождает (неподвижные) затухающие вдоль ξ осцилляции, то эти осцилляции и заполняют участок переднего фронта (на пологом заднем фронте волны малость градиентов позволяет пренебречь влиянием дисперсионных членов, поэтому там, в частности, не возникает и осцилляции).

Так как в случае $\varphi(t_0, \xi) \geq 0$ скорость распространения возмущения положительна в системе $\xi = x - 3t$, то он движется вправо как относительно лабораторной системы отсчета x , так и относительно системы ξ . Поэтому в обеих системах отсчета передним фронтом ока-

— $c + \varphi/2$), а так как при $u \rightarrow \pm\infty$ $\varphi \rightarrow 0$, то, значит, $\sup |\varphi| > 2|c - 3|$. Вводя амплитуду солитона $A = \sup |\varphi - 0|$, получим

$$(2.4) \quad A > 2|c - 3|.$$

Из первого соотношения (2.3) следует, что при $|c - 3| \rightarrow 0$ $\varphi \rightarrow 0$. Введем поэтому новые переменные $\psi = \varphi/2(c - 3)$ и $\tau = u \operatorname{Re}^{1/2} W^{-1/2}$. Перепишем задачу (2.2) в новых переменных

$$(2.5) \quad \ddot{\psi} + \dot{\psi} - \mu\psi(1 - \psi) = 0, \quad \psi \rightarrow 0 \text{ при } \tau \rightarrow \pm\infty, \quad (\dot{}) = d/d\tau, \\ \mu = (c - 3)W^{1/2}\operatorname{Re}^{-3/2}.$$

Изложим соображения, говорящие в пользу того, что при $\mu \rightarrow 0$ (2.5) имеется монотонное решение, не являющееся солитоном. Действительно, как видно из (2.5), функция ψ_0 , удовлетворяющая уравнению $\dot{\psi}_0 = \mu\psi_0(1 - \psi_0)$, будет при $\mu \rightarrow 0$ с точностью до члена $\sim \mu^3$ удовлетворять и уравнению (2.5), что позволяет надеяться на то, что при $\mu \rightarrow 0$ решение (2.5) асимптотически переходит в решение уравнения $\dot{\psi} = \mu\psi(1 - \psi)$, являющееся монотонным решением несолитонного типа. На самом деле это означает, что решение задачи (2.5) при $\mu \rightarrow 0$ можно искать в форме асимптотического разложения по степеням μ : $\psi = \psi_0 + \mu\psi_1 + \mu^2\psi_2 + \dots$, причем начальный член разложения удовлетворяет уравнению $\dot{\psi} = \mu\psi_0(1 - \psi_0)$. Для построения такого разложения удобно перейти к координатам фазовой плоскости ψ и $z = d\psi/ds$, где $s = \mu\tau$. В этих координатах задача (2.5), начальное приближение и асимптотическое разложение принимают соответственно вид

$$(2.5') \quad z = \frac{\psi(1 - \psi)}{1 + \mu^2 \frac{d^2}{d\psi^2} \left(\frac{z^2}{2} \right)}, \quad z(0) = 0, \quad z_0 = \psi(1 - \psi), \quad z = z_0 + \mu^2 z_2 + \mu^4 z_4 + \dots$$

Вычисление коэффициентов разложения z_n непосредственно из (2.5') затруднительно. Поэтому, предполагая, что такое разложение при $\mu \rightarrow 0$ сходится к функции, имеющей конечную производную $(z^2/2)d^2/d\psi^2$, и замечая, что в этом случае правая часть уравнения (2.5') является аналитической функцией от μ^2 и, значит, разложима в сходящийся ряд по степеням μ^2 , имеем $z = \psi(1 - \psi) \left[1 - \mu^2 \frac{d^2}{d\psi^2} \left(\frac{z^2}{2} \right) \right] + o(\mu^4)$ или после возведения в квадрат

$$(2.5'') \quad z^2 = \psi^2(1 - \psi)^2 \left[1 - \mu^2 \frac{d^2}{d\psi^2} (z^2) \right] + o(\mu^4).$$

Уравнение (2.5'') линейно относительно функции $\Phi = z^2$ и имеет решение, асимптотически стремящееся (при $\mu \rightarrow 0$) к функции $\Phi_0 = \psi^2(1 - \psi)^2$, т. е. имеет конечную производную $d^2\Phi/d\psi^2$, что и обеспечивает переход от (2.5') к (2.5''). Не останавливаясь на решении уравнения (2.5''), отметим только, что оно может быть построено методом ВКБ.

Сказанное подтверждается прямым интегрированием уравнения (2.5') с начальными условиями $z(0) = 0$, $dz/d\psi|_{\psi=0} = \lambda/\mu$ ($\mu \ll 1$, $\lambda + \lambda^3 = \mu$). При этом оказалось, что указанное монотонное решение перестает существовать при $\mu = \mu_0 \approx 0,2$. Так что если существует решение (2.5) в форме

солитона, то для него $\mu \equiv |c - 3| W^{1/2} Re^{-3/2} > \mu_0 \approx 0,2$. Используя (2.4), получим отсюда нижнюю грань значений амплитуды стационарного солитона

$$(2.6) \quad A > 2\mu_0 W^{-1/2} Re^{3/2}$$

(для водяной пленки $W^{-1/2} Re^{3/2} \approx 0,025 Re^{11/6}$, $A > (Re/10)^{11/6}$). Из (2.6) видно, что амплитуды солитонов быстро растут с ростом числа Рейнольдса и становятся заметными ($A \sim 1$) при $Re \sim W^{1/3}$ (для воды при $Re \approx 10$).

Проведем теперь, следуя работе [6], приближенное решение задачи (2.5) для стационарного солитона (т. е. при $\mu > \mu_0 \approx 0,2$), используя при этом аналог метода Галеркина. Для определенности будем считать $\mu \sim (c - 3) > 0$ (случай отрицательных μ — отрицательных солитонов — сводится, как было указано выше, к случаю положительных солитонов зеркальным отражением координат).

Видим, что (2.5) обладает асимптотиками $\psi \rightarrow 0$ следующего вида: $\psi \sim \exp \lambda \tau$, $\tau \rightarrow -\infty$ и $\psi \sim \exp\left(-\frac{\lambda \tau}{2}\right) \sin(\omega \tau + \delta)$, $\tau \rightarrow +\infty$, где λ — положительный корень уравнения

$$(2.7) \quad \lambda^3 + \lambda = \mu, \quad \omega = \sqrt{1 + (3/4)\lambda^2}.$$

Эти асимптотики имеют нужный («солитонный») вид (см. фиг. 1, в, где изображен типичный солитон, наблюдаемый экспериментально). Таким образом, требуется найти решение уравнения (2.5), обладающее указанными асимптотиками. Составим из асимптотик функцию Галеркина следующим образом:

$$(2.8) \quad \psi = A \exp \lambda \tau \cdot H(\tau) + B \exp\left(-\frac{\lambda \tau}{2}\right) \sin \omega \tau \cdot H(-\tau).$$

Здесь $H(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau < 0, \\ 0, & \tau > 0 \end{cases}$ — функция Хевисайда; вследствие однородности задачи по τ можно выбирать начало отсчета $\tau = 0$ таким образом, чтобы начальная фаза (правой) осциллирующей асимптотики равнялась нулю (что и сделано).

Коэффициенты A и B (из которых A играет роль амплитуды солитона) определим из интегральных соотношений (2.3), которые в новых переменных имеют вид

$$(2.9) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2 d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^3 d\tau.$$

Подставляя (2.8) в (2.9) и вводя обозначение $\alpha = \omega B/A$, получаем следующую алгебраическую систему для α и A :

$$(2.10) \quad \frac{1}{\lambda} + \frac{\alpha}{1 + \lambda^2} = \frac{A}{2\lambda} \left(1 + \frac{\alpha^2}{1 + \lambda^2} \right), \quad 1 + \frac{\alpha^2}{1 + \lambda^2} = \frac{2}{3} \lambda A \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{2\alpha^3}{(1 + \lambda^2)(1 + 3\lambda^2)} \right).$$

Эта система решается для каждого λ . При этом находим $A(\lambda)$. Для про-

ведения вычислений вместо α и λ удобно (на время) ввести новые параметры: $\lambda = \text{sh } \xi$, $\alpha = -\beta \text{ ch } \xi$. Система (2.10) принимает тогда вид

$$1 - \beta \text{ th } \xi = \frac{A}{2} (1 + \beta^2), \quad 1 + \beta^2 = \frac{2}{3} A \left(1 - \frac{2\beta^3 \text{ th } \xi}{1 + 2 \text{ th}^2 \xi} \right).$$

Опуская элементарные вычисления, приведем результат, согласно которому величина A оказывается практически постоянной (не зависящей от λ)

$$(2.11) \quad \text{при } \mu \rightarrow 0 \quad A \rightarrow 1,72, \quad \text{при } \mu = 0,8 \quad A = 1,62, \quad \text{при } \mu > 1,5 \\ A \approx 1,56.$$

Так как амплитуда солитона $A = A_\psi$ в переменных ψ связана с размерной амплитудой \tilde{A} соотношениями $A = A_\psi = A_\psi / 2(c - 3) = 6\tilde{A} / (\langle h \rangle 2(\tilde{c}/\tilde{u} - 3))$, где \tilde{c} — размерная скорость солитона; $\langle \tilde{u} \rangle$ — средняя по сечению скорость жидкости в пленке (служащая единицей измерения скоростей), то получаем отсюда

$$(2.12) \quad \tilde{c} = 3 \langle \tilde{u} \rangle + \frac{3}{A} \frac{\langle \tilde{u} \rangle}{\langle h \rangle} \tilde{A},$$

где $\langle \tilde{u} \rangle = \langle Q \rangle / \langle h \rangle = g \langle h^2 \rangle / 3\nu$.

Как уже было сказано, величина A оказывается практически постоянной. Но тогда из (2.12) следует линейная зависимость скорости солитона от амплитуды. Этот результат согласуется с данными работ [2, 3]. Для количественного сравнения (2.12) с опытными данными эти последние следует взять при возможно малых числах Рейнольдса (выше уже указывалось, что (1.1) справедливо при малых числах Рейнольдса). Из [2, 3] были взяты данные для самого малого из приведенных там чисел Рейнольдса (для числа Рейнольдса, соответствующего $\langle Q \rangle / \nu = 4$, $\nu = 11,2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$). При этом $\langle h \rangle = 5,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ и $\langle \tilde{u} \rangle / \langle h \rangle \approx 150 \text{ 1/с}$. Подставляя это в (2.12) и подставляя туда же A из (2.11), получим

$$(2.13) \quad \tilde{c} \approx 0,24 + 0,3(10^3 \tilde{A})$$

(\tilde{A} , м, \tilde{c} , м/с). Для сравнения с экспериментом кривая (2.13) приведена на фиг. 2 вместе с опытными данными, взятыми из работы [2] (см. график А на фиг. 10, в).

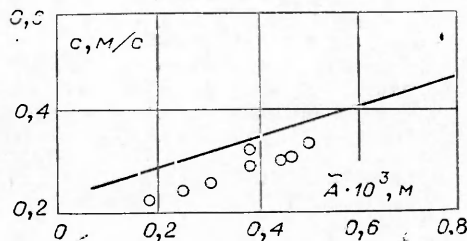
Таким образом, имеем следующие результаты:

1) при каждом значении средней толщины пленки (или, что то же самое, числа Рейнольдса) существует однопараметрическое семейство стационарных солитонов, типичный вид которых представлен на фиг. 1, в. В качестве параметра семейства можно выбрать либо μ (или λ), либо амплитуду, либо скорость;

2) амплитуды солитонов семейства при каждом значении Re ограничены снизу;

3) скорость движения солитона пропорциональна амплитуде;

4) с увеличением числа Рейнольдса амплитуды солитонов быстро рас-



Ф и г. 2

тут и при $Re \approx 10$ (для воды) становятся сравнимыми с толщиной пленки.

В заключение надо сказать, что солитон сам должен быть неустойчив в своей плоской (асимптотической, невозмущенной) части в силу тех же механизмов, которые делают неустойчивым плоский нуссельтовский режим пленки. Вследствие этой неустойчивости в хвосте и предвестнике солитона должны развиваться возмущения. Так как в основной (центральной) части движение имеет вид солитона, что свидетельствует о том, что солитон при тех числах Рейнольдса, когда он наблюдается, является конкурентоспособным и подавляет квазигармонические волны, то естественно ожидать, что и возмущения асимптот солитона разовьются, в свою очередь, в солитоны и т. д., что приведет в конечном счете к образованию нерегулярной системы солитонов. Именно такая картина практически и наблюдалась в работах [1—3] в тех случаях, когда солитоны не возбуждались искусственно. Вместе с тем в ряде опытов [1—3] искусственно создавались регулярные совокупности солитонов. Предполагая, что такие совокупности могут двигаться стационарно (со скоростью c), имеем для них уравнение (2.1). Интегрируем (2.1) один раз

$$(2.14) \quad (3 - c)\varphi + \varphi^2/2 + Re \varphi' + W\varphi''' = \text{const.}$$

Умножая (2.14) на φ и усредняя по x (величина $\varphi\varphi''$ при этом исчезнет, так как является полной производной), получим $(3 - c)\langle\varphi^2\rangle + (1/2)\langle\varphi^3\rangle = \text{const}\langle\varphi\rangle = 0$ (учтено, что $\langle\varphi\rangle = \langle h/\langle h\rangle - 1\rangle \equiv 0$). Отсюда

$$(2.15) \quad c = 3 + \frac{1}{2} \frac{\langle\varphi^3\rangle}{\langle\varphi^2\rangle} = 3 \left(1 + \frac{\langle\tilde{\varphi}^3\rangle}{\langle\tilde{\varphi}^2\rangle} \right).$$

Как и все полученные выше результаты, формула (2.15) справедлива при небольших числах Рейнольдса.

Авторы выражают благодарность И. Р. Шрейберу за стимулирующую дискуссию и В. Е. Накорякову, Б. Г. Покусаеву за внимание и интерес к работе.

Поступила 4 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Капица П. Л., Капица С. П. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости. — ЖЭТФ, 1949, 19, вып. 2.
2. Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Троян Е. Н., Алексеенко С. В. Течение тонких пленок жидкости. — В кн.: Волновые процессы в двухфазных системах. Новосибирск, изд. Ин-та теплофизики СО АН СССР, 1975.
3. Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Алексеенко С. В. Стационарные двумерные катящиеся волны на вертикальной пленке жидкости. — ИФЖ, 1976, т. 30, № 5.
4. Накоряков В. Е., Шрейбер И. Р. Волны на поверхности тонкого слоя вязкой жидкости. — ПМТФ, 1973, № 2.
5. Маурин Л. Н. К вопросу о типах движений поверхности вертикально стекающей пленки. — В кн.: Тезисы доклада на II Всесоюзной конференции «Современные проблемы тепловой конвекции». Пермь, 1975.
6. Маурин Л. Н., Одишария Г. Э., Точигин А. А. Уединенная волна на стекающей жидкой пленке. — В кн.: Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах. Новосибирск, 1977.
7. Шкадов В. Я. Уединенные волны в слое вязкой жидкости. — «Изв. АН СССР. МЖГ», 1977, № 1.