

УДК 539.376

АСИМПТОТИКА НАПРЯЖЕНИЙ И СКОРОСТЕЙ ДЕФОРМАЦИЙ ВБЛИЗИ ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА В МАТЕРИАЛЕ, ПОВЕДЕНИЕ КОТОРОГО ОПИСЫВАЕТСЯ ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫМ ЗАКОНОМ

Л. В. Степанова

Самарский государственный университет, 443011 Самара
E-mail: lst@ssu.samara.ru

Приводится приближенное решение задачи определения полей напряжений и скоростей деформаций ползучести вблизи вершины трещины поперечного сдвига в материале, поведение которого описывается дробно-линейным законом теории установившейся ползучести. Показано, что вблизи вершины трещины скорости деформаций имеют сингулярность типа $\dot{\epsilon} \sim r^{-\alpha}$, причем показатель сингулярности α меняется дискретно в зависимости от полярного угла, принимая значения 1, 2/3, 1/2.

Ключевые слова: трещина поперечного сдвига, дробно-линейный закон установившейся ползучести, поле напряжений вблизи вершины трещины, асимптотика скоростей деформаций.

Введение. Анализ полей напряжений и деформаций (скоростей деформаций) в окрестности вершины трещины или углового выреза является одной из основных задач механики трещин и механики разрушения. Современная механика деформируемого твердого тела развивается по пути постепенного усложнения и уточнения определяющих соотношений, связывающих напряжения и деформации (скорости деформаций), по мере накопления экспериментальных данных. В теории установившейся ползучести широко используется степенной закон ползучести. Известны также экспоненциальный закон Людвига и закон гиперболического синуса Надаи [1]. В [2, 3] предложены принципиально иные определяющие уравнения теории установившейся ползучести, в которых материальные постоянные имеют ясный физический смысл. Частным случаем предложенных определяющих уравнений является дробно-линейный закон ползучести, в случае одноосного нагружения имеющий вид $\dot{\epsilon} = B\sigma/(\sigma_b - \sigma)$, где $\dot{\epsilon}$ — скорость деформации ползучести; σ — напряжение; B , σ_b — постоянные материала. Постоянная σ_b может трактоваться как некоторая обобщенная характеристика длительной прочности на определенном промежутке времени работы рассматриваемого элемента конструкции. Величину σ_b можно также рассматривать как характеристику мгновенной прочности, определяемую из опытов на одноосное разрушение. В любом случае значение σ_b определяется достаточно надежно и имеет ясный физический смысл. Параметр B является характеристикой, определяющей скорость деформирования. При обработке экспериментальных данных параметры σ_b и B определяются достаточно надежно. Дробно-линейная модель физически более обоснована по сравнению со степенной моделью Бейли — Нортон и имеет ряд преимуществ. Дробно-линейная модель [2, 3] учи-

тывает максимальное предельное напряжение, характеризующее мгновенное разрушение металла при температуре испытаний, и различные характеристики длительной прочности при растяжении и сжатии, а также описывает линейную ползучесть при малых напряжениях. Более того, дробно-линейная модель учитывает наличие ненулевого предела ползучести, ограничивающего снизу диапазон напряжений, в котором развивается процесс ползучести. В настоящее время дробно-линейная модель установившейся ползучести и длительной прочности является предметом многочисленных исследований [4–6].

С точки зрения механики разрушения представляет интерес определение полей напряжений и скоростей деформаций ползучести в окрестности вершин трещин различного типа с использованием дробно-линейной аппроксимации. Напряженно-деформированное состояние вблизи вершины трещины антиплоского сдвига и нормального отрыва в материале, поведение которого описывается дробно-линейным законом ползучести, исследовано в [7, 8]. Проведенный анализ показал, что в окрестности вершины трещины скорости деформаций ползучести сингулярны, причем при приближении к вершине трещины показатель сингулярности меняется дискретно в зависимости от полярного угла.

1. Постановка задачи. Плоское напряженное состояние. Целью настоящего исследования является изучение полей напряжений и скоростей деформаций ползучести в окрестности вершины трещины поперечного сдвига в материале, поведение которого описывается дробно-линейным законом теории установившейся ползучести в условиях плоского напряженного состояния:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{3}{2} \frac{f(\sigma_e)}{\sigma_e} s_{ij}, \quad (1.1)$$

где $f(\sigma_e) = B\sigma_e/(\sigma_b - \sigma_e)$; B, σ_b — материальные константы; $\dot{\epsilon}_{ij}$ — компоненты тензора скоростей деформаций ползучести; s_{ij} — девиатор тензора напряжений; $\sigma_e^2 = 3s_{ij}s_{ij}/2$ — интенсивность напряжений. В случае плоского напряженного состояния определяющие уравнения задачи в полярной системе координат с полюсом в вершине трещины принимают вид

$$\dot{\epsilon}_{rr} = \frac{1}{2} B \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{\sigma_b - \sigma_e}, \quad \dot{\epsilon}_{\theta\theta} = \frac{1}{2} B \frac{2\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}}{\sigma_b - \sigma_e}, \quad \dot{\epsilon}_{r\theta} = \frac{3}{2} B \frac{\sigma_{r\theta}}{\sigma_b - \sigma_e}, \quad (1.2)$$

где $\sigma_e^2 = \sigma_{rr}^2 + \sigma_{\theta\theta}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\theta\theta} + 3\sigma_{r\theta}^2$.

Уравнения равновесия и условие совместности представляются в форме

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} = 0; \quad (1.3)$$

$$2 \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \dot{\epsilon}_{r\theta}}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial^2 \dot{\epsilon}_{rr}}{\partial \theta^2} - r \frac{\partial \dot{\epsilon}_{rr}}{\partial r} + r \frac{\partial^2 (r \dot{\epsilon}_{\theta\theta})}{\partial r^2}. \quad (1.4)$$

Граничными условиями задачи являются условия отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины: $\sigma_{\theta\theta}(r, \pm\pi) = 0, \sigma_{r\theta}(r, \pm\pi) = 0$.

В силу симметрии задачи можно перейти к изучению одной из полуплоскостей, заменяя граничные условия на одном из берегов трещины условиями симметрии при $\theta = 0$: $\sigma_{rr}(r, 0) = 0, \sigma_{\theta\theta}(r, 0) = 0$.

По мере удаления от вершины трещины напряжения значительно уменьшаются, поэтому граничные условия в бесконечно удаленной точке представляют собой условия асимптотического сближения с решением аналогичной задачи для линейно-вязкого материала:

$$\sigma_{rr} = \sqrt{\frac{C^* \sigma_b}{B2\pi r}} \left(-5 \sin \frac{\theta}{2} + 3 \sin \frac{3\theta}{2} \right), \quad \sigma_{\theta\theta} = \sqrt{\frac{C^* \sigma_b}{B2\pi r}} \left(-3 \sin \frac{\theta}{2} - 3 \sin \frac{3\theta}{2} \right),$$

$$\sigma_{r\theta} = \sqrt{\frac{C^* \sigma_b}{B2\pi r}} \left(\cos \frac{\theta}{2} + 3 \cos \frac{3\theta}{2} \right)$$

(C^* — инвариантный интеграл нелинейной механики разрушения). Для определения амплитуды поля напряжений в бесконечно удаленной точке использовалось свойство независимости C^* -интеграла от контура интегрирования. Введя безразмерные величины $\hat{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}/\sigma_b$, $\hat{\epsilon}_{ij} = 2\dot{\epsilon}_{ij}/B$, $\hat{r} = r/L$, $L = C^*/(B\sigma_b)$, определяющие уравнения задачи (1.1) можно представить в виде

$$\hat{\epsilon}_{rr} = \frac{2\hat{\sigma}_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{1 - \hat{\sigma}_e}, \quad \hat{\epsilon}_{\theta\theta} = \frac{2\hat{\sigma}_{\theta\theta} - \hat{\sigma}_{rr}}{1 - \hat{\sigma}_e}, \quad \hat{\epsilon}_{r\theta} = \frac{3\hat{\sigma}_{r\theta}}{1 - \hat{\sigma}_e}. \quad (1.5)$$

В безразмерных переменных граничные условия в бесконечно удаленной точке принимают вид

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{rr} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{r}}} \left(-5 \sin \frac{\theta}{2} + 3 \sin \frac{3\theta}{2} \right), & \hat{\sigma}_{\theta\theta} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{r}}} \left(-3 \sin \frac{\theta}{2} - 3 \sin \frac{3\theta}{2} \right), \\ \hat{\sigma}_{r\theta} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{r}}} \left(\cos \frac{\theta}{2} + 3 \cos \frac{3\theta}{2} \right), & \hat{r} &\rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Уравнения равновесия и условие совместности не меняются. В дальнейшем знак “ \wedge ” опускается.

2. Асимптотический анализ. В определяющих уравнениях (1.1) величина σ_b представляет собой напряжение типа предела прочности (компоненты тензора напряжений не могут превысить данное значение). По аналогии с рассуждениями, проведенными при исследовании задач о трещинах антиплоского сдвига [7] и нормального отрыва [8], можно предположить, что условие, характеризующее наступление предельного состояния $\sigma_e = \sigma_b$ (или в безразмерных переменных $\sigma_e = 1$), реализуется лишь в одной точке — вершине трещины. Поэтому асимптотическое разложение компонент тензора напряжений вблизи устья трещины ($r \rightarrow 0$) можно искать в виде

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sigma_{ij}^{(0)}(\theta) + r^\alpha \sigma_{ij}^{(1)}(\theta) + o(r^\alpha), \quad \sigma_e(r, \theta) = 1 - r^\alpha \sigma^{(1)}(\theta) + o(r^\alpha), \quad (2.1)$$

где $\alpha > 0$; $\sigma_{ij}^{(k)}(\theta)$ — функции, подлежащие определению. Тогда для отыскания главного члена асимптотического разложения компонент тензора напряжений $\sigma_{ij}^{(0)}(\theta)$ используется система уравнений равновесия и условие наступления предельного состояния $\sigma_e = 1$. Следует отметить, что аналогичная система, состоящая из двух дифференциальных уравнений и одного алгебраического, получается при исследовании поля напряжений в окрестности вершины трещины в идеально пластическом материале. Подставляя (2.1) в уравнения равновесия (1.3) и условие предельного состояния, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\frac{d\sigma_{r\theta}^{(0)}}{d\theta} + \sigma_{rr}^{(0)} - \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = 0, \quad \frac{d\sigma_{\theta\theta}^{(0)}}{d\theta} + 2\sigma_{r\theta}^{(0)} = 0$$

и алгебраическое условие

$$(\sigma_{rr}^{(0)})^2 - \sigma_{rr}^{(0)} \sigma_{\theta\theta}^{(0)} + (\sigma_{\theta\theta}^{(0)})^2 + 3(\sigma_{r\theta}^{(0)})^2 = 1. \quad (2.2)$$

Условие предельного состояния (2.2) выполняется, если положить

$$\sigma_{rr}^{(0)} = \cos(\theta + c_1)/\sqrt{3}, \quad \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = 2 \cos(\theta + c_1)/\sqrt{3}, \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = \sin(\theta + c_1)/\sqrt{3}, \quad (2.3)$$

где c_1 — произвольная постоянная. Существует также иное представление компонент тензора напряжений [9, 10], удовлетворяющее условию (2.2):

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^{(0)} &= a + b \cos 2\vartheta(\theta) + c \sin 2\vartheta(\theta), & \sigma_{\theta\theta}^{(0)} &= a - b \cos 2\vartheta(\theta) - c \sin 2\vartheta(\theta), \\ \sigma_{r\theta}^{(0)} &= -b \sin 2\vartheta(\theta) + c \cos 2\vartheta(\theta).\end{aligned}\tag{2.4}$$

Здесь a, b, c — постоянные, для которых выполняется равенство

$$a^2 + 3b^2 + 3c^2 = 1.\tag{2.5}$$

Следует отметить, что найти решение задачи, удовлетворяющее граничным условиям на берегу трещины и условиям симметрии на ее продолжении, используя лишь одно из представлений (2.3) или (2.4), не удастся. Поэтому предполагается, что поле напряжений описывается формулами (2.3) или (2.4) в различных характерных областях полуплоскости $0 \leq \theta \leq \pi$. Границы областей определяются из условий непрерывности компонент тензора напряжений $\sigma_{r\theta}$ и $\sigma_{\theta\theta}$ при переходе через эти границы. Компонента σ_{rr} может претерпевать разрыв. Установлено, что существует три характерные клинообразные области с границами $\theta = \theta_{0a}$ и $\theta = \theta_{0b}$. В области $0 \leq \theta \leq \theta_{0a}$ поле напряжений определяется формулами (2.3), в областях $\theta_{0a} \leq \theta \leq \theta_{0b}$ и $\theta_{0b} \leq \theta \leq \pi$ — формулами (2.4). В секторе $\theta_{0b} \leq \theta \leq \pi$, примыкающем к свободному от нагрузок берегу трещины, напряжения определяются из условий отсутствия поверхностных усилий на верхнем берегу трещины, и, следовательно, постоянные a, b, c известны. Условия непрерывности компонент тензора напряжений $\sigma_{r\theta}$ и $\sigma_{\theta\theta}$ на лучах $\theta = \theta_{0a}$ и $\theta = \theta_{0b}$ выполняются за счет выбора постоянных a, b, c поля напряжений в центральном секторе $\theta_{0a} \leq \theta \leq \theta_{0b}$ и значений θ_{0a}, θ_{0b} . Действительно, на пять неизвестных постоянных $a, b, c, \theta_{0a}, \theta_{0b}$ накладываются пять условий: требование (2.5) и четыре условия, следующие из непрерывности компонент тензора напряжений $\sigma_{r\theta}$ и $\sigma_{\theta\theta}$ при переходе через границы $\theta = \theta_{0a}$ и $\theta = \theta_{0b}$ рассматриваемых областей. Удовлетворяя двум условиям непрерывности компонент тензора при $\theta = \theta_{0b}$ за счет выбора a, b, c в решении для напряжений в секторе $\theta_{0a} \leq \theta \leq \theta_{0b}$ с учетом (2.5), величины углов θ_{0a} и θ_{0b} можно определить из условий непрерывности при $\theta = \theta_{0a}$:

$$\begin{aligned}-(8/\sqrt{3}) \sin \theta_{0a} &= -1 + 3 \cos 2\theta_{0b} - (1 + \cos 2\theta_{0b}) \cos \theta_{ab} - 2 \sin 2\theta_{0b} \sin \theta_{ab}, \\ (4/\sqrt{3}) \cos \theta_{0a} &= -(1 + \cos 2\theta_{0b}) \sin \theta_{ab} + 2 \sin 2\theta_{0b} \cos \theta_{ab}, & \theta_{ab} &= 2(\theta_{0a} - \theta_{0b}).\end{aligned}\tag{2.6}$$

Решение системы уравнений (2.6) разыскивалось численно последовательным перебором точек выбранной сетки квадрата со стороной, равной π , в плоскости $(\theta_{0a}, \theta_{0b})$. В данном случае этот прием более предпочтителен по сравнению с методом наискорейшего спуска, поскольку, во-первых, область поиска корней системы уравнений задана; во-вторых, не требуется выбирать нулевое приближение, что является важным при использовании градиентных методов. Решением системы тригонометрических уравнений (2.6) являются значения $\theta_{0a} = 51,06^\circ$ и $\theta_{0b} = 117,80^\circ$. Графический способ решения представлен на рис. 1. В условиях плоского напряженного состояния в материале, поведение которого описывается дробно-линейным законом теории установившейся ползучести, распределение напряжений в каждой из трех клиновидных областей вблизи вершины трещины поперечного сдвига задается формулами

$$0 \leq \theta \leq \theta_{0a}: \quad \sigma_{rr}^{(0)} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta, \quad \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \theta, \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \theta,$$

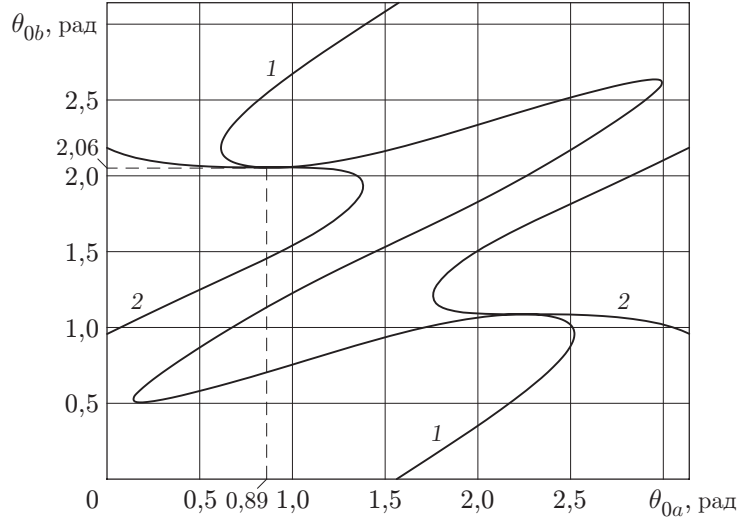


Рис. 1. Графическое решение системы алгебраических уравнений (2.6):

1 — кривая, определяемая первым уравнением системы (2.6); 2 — ветви кривой, определяемой вторым уравнением системы (2.6)

$$\begin{aligned}
 \theta_{0a} \leq \theta \leq \theta_{0b}: \quad & \sigma_{rr}^{(0)} = \frac{1}{4}(-1 + 3 \cos 2\theta_{0b}) + \frac{1}{4}(1 + \cos 2\theta_{0b}) \cos \theta_b + \frac{1}{2} \sin 2\theta_{0b} \sin \theta_b, \\
 & \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = \frac{1}{4}(-1 + 3 \cos 2\theta_{0b}) - \frac{1}{4}(1 + \cos 2\theta_{0b}) \cos \theta_b - \frac{1}{2} \sin 2\theta_{0b} \sin \theta_b, \quad (2.7) \\
 & \sigma_{r\theta}^{(0)} = -\frac{1}{4}(1 + \cos 2\theta_{0b}) \sin \theta_b + \frac{1}{2} \sin 2\theta_{0b} \cos \theta_b, \quad \theta_b = 2(\theta - \theta_{0b}), \\
 \theta_{0b} \leq \theta \leq \pi: \quad & \sigma_{rr}^{(0)} = -\frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta), \quad \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = -\frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta), \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = \frac{1}{2} \sin 2\theta.
 \end{aligned}$$

Полученное распределение напряжений показано на рис. 2. При $\theta = \theta_{0b}$ напряжения σ_{rr} претерпевают разрыв. Приведенное решение можно сравнить с полем напряжений в окрестности вершины для материала, поведение которого описывается степенным законом, связывающим деформации и напряжения: $\dot{\epsilon}_{ij} = 3B\sigma_e^{n-1}s_{ij}/2$ (B, n — постоянные материала), в предельном случае, когда $n \rightarrow \infty$, что соответствует идеально пластическому материалу.

В соответствии с подходом, реализованным в [11, 12], решение разыскивается в виде $\sigma_{ij}(r, \theta) = Kr^{-1/(n+1)}f_{ij}(\theta)$, и для получения распределений компонент тензора напряжений по углу в окрестности вершины трещины используется система ОДУ (или одно нелинейное ОДУ, если использовать функцию напряжений Эри). Устремляя n к бесконечности (при численном расчете обычно полагается $n = 100, 300, 500$), распределения компонент тензора напряжений по углу можно получить другим способом (рис. 3). Сравнение полученных распределений компонент тензора напряжений по углу показывает, что использование обеих схем построения поля напряжений приводит к одному и тому же результату, что служит подтверждением достоверности решения (2.7). Используя распределение напряжений (2.7) и определяющие уравнения (1.5), можно получить главный член асимптотического разложения скоростей деформаций ползучести в окрестности вершины трещины:

$$0 \leq \theta < \theta_{0a}: \quad \dot{\epsilon}_{rr} = 0, \quad \dot{\epsilon}_{\theta\theta} = -\sqrt{3} \frac{\sin \theta}{r^\alpha \sigma_1(\theta)}, \quad \dot{\epsilon}_{r\theta} = \sqrt{3} \frac{\cos \theta}{r^\alpha \sigma_1(\theta)}; \quad (2.8)$$

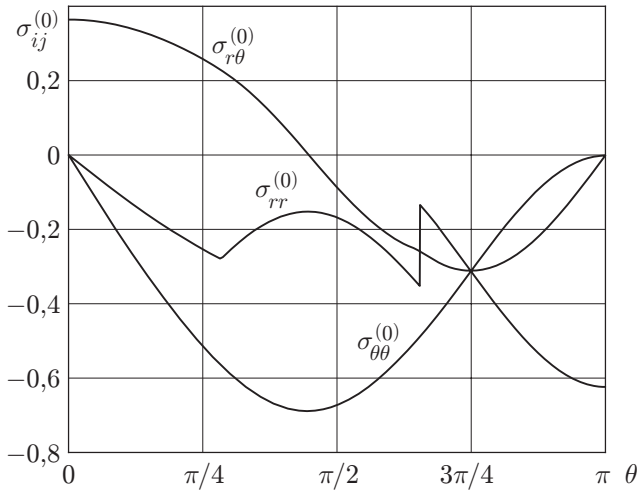


Рис. 2

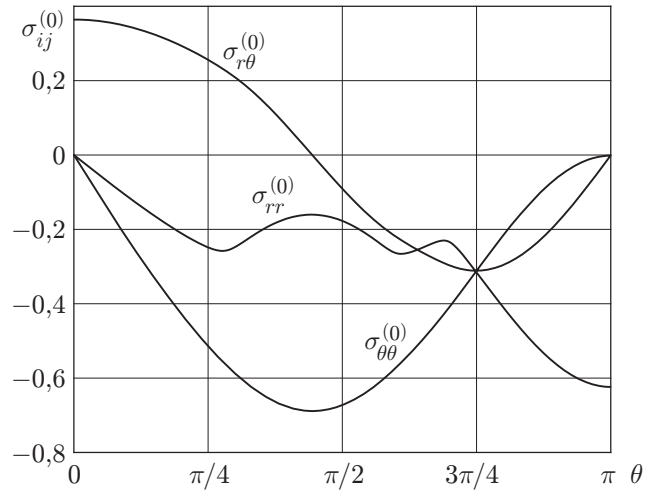


Рис. 3

Рис. 2. Зависимость компонент тензора напряжений от полярного угла при плоском напряженном состоянии (аналитическое решение статически определимой задачи)

Рис. 3. Зависимость компонент тензора напряжений от полярного угла при плоском напряженном состоянии (численное решение задачи для материала, упрочняющегося по степенному закону ($n = 500$))

$$\begin{aligned}
 \theta_{0a} < \theta < \theta_{0b}: \quad \dot{\varepsilon}_{rr} &= \frac{a + 3b \cos \theta_b + 3c \sin \theta_b}{r^\alpha \sigma_2(\theta)}, \quad \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = \frac{a - 3b \cos \theta_b - 3c \sin \theta_b}{r^\alpha \sigma_2(\theta)}, \\
 \dot{\varepsilon}_{r\theta} &= 3 \frac{-b \sin \theta_b + c \cos \theta_b}{r^\alpha \sigma_2(\theta)}, \\
 a &= (-1 + 3 \cos 2\theta_{0b})/4, \quad b = (1 + \cos 2\theta_{0b})/4, \quad c = (1/2) \sin 2\theta_{0b}; \\
 \theta_{0b} < \theta \leq \pi: \quad \dot{\varepsilon}_{rr} &= -\frac{1}{2} \frac{1 + 3 \cos 2\theta}{r^\alpha \sigma_3(\theta)}, \quad \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = -\frac{1}{2} \frac{1 - 3 \cos 2\theta}{r^\alpha \sigma_3(\theta)}, \\
 \dot{\varepsilon}_{r\theta} &= \frac{3}{2} \frac{\sin 2\theta}{r^\alpha \sigma_3(\theta)},
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

где функции $\sigma_i(\theta)$ ($i = 1, 2, 3$) находятся из условия совместности (1.4). Непосредственным вычислением можно показать, что при $0 \leq \theta < \theta_{0a}$ условие совместности выполняется при произвольной функции $\sigma_1(\theta)$, если $\alpha = 1$. При использовании дробно-линейной аппроксимации напряжения в окрестности вершины трещины являются ограниченными величинами, следовательно, в силу инвариантности C^* -интеграла по меньшей мере в одной из трех рассматриваемых областей показатель сингулярности скоростей деформаций ползучести должен быть равен единице.

Следует отметить, что согласно (2.8)–(2.10) скорости деформаций ползучести сингулярны вблизи вершины трещины ($\alpha > 0$). На данном этапе решения показатель сингулярности скоростей деформаций остается неизвестным и для его определения можно использовать следующие рассуждения.

Подобно тому как был проведен анализ при исследовании задач о трещинах антиплоского сдвига и нормального отрыва, асимптотическое решение задачи можно искать на основе асимптотических разложений скоростей перемещений $u_r(r, \theta)$, $u_\theta(r, \theta)$ в окрестности вершины трещины ($r \rightarrow 0$):

$$u_r(r, \theta) = f_0(\theta) + r^\alpha f_1(\theta) + \dots, \quad u_\theta(r, \theta) = g_0(\theta) + r^\alpha g_1(\theta) + \dots \quad (\alpha > 0). \tag{2.11}$$

Асимптотические разложения скоростей перемещений вида (2.11) позволяют описать поле напряжений, ограниченное вблизи кончика трещины, и сингулярное поле скоростей деформаций ползучести:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{rr}(r, \theta) &= r^{\alpha-1} \varepsilon_{rr}^{(1)}(\theta) + \dots, & \dot{\varepsilon}_{\theta\theta}(r, \theta) &= r^{-1} \varepsilon_{\theta\theta}^{(0)}(\theta) + r^{\alpha-1} \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)}(\theta) + \dots, \\ \dot{\varepsilon}_{r\theta}(r, \theta) &= r^{-1} \varepsilon_{r\theta}^{(0)}(\theta) + r^{\alpha-1} \varepsilon_{r\theta}^{(1)}(\theta) + \dots,\end{aligned}\quad (2.12)$$

где

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr}^{(1)}(\theta) &= \alpha f_1(\theta), & \varepsilon_{\theta\theta}^{(0)}(\theta) &= f_0(\theta) + g_0'(\theta), & \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)}(\theta) &= f_1(\theta) + g_1'(\theta), \\ \varepsilon_{r\theta}^{(0)}(\theta) &= [f_0'(\theta) - g_0(\theta)]/2, & \varepsilon_{r\theta}^{(1)}(\theta) &= [f_1'(\theta) + (\alpha - 1)g_1(\theta)]/2.\end{aligned}$$

Функции u_r и u_θ , подлежащие определению, находятся из уравнений равновесия, в которых компоненты тензора напряжений выражены через компоненты тензора скоростей деформаций ползучести с помощью определяющих уравнений задачи (1.5). Подставляя в полученные уравнения асимптотические разложения (2.12) и выделяя коэффициенты при минимальной степени r , имеем следующую систему двух ОДУ:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)} [\varepsilon_{rr}^{(0)} (\varepsilon_{r\theta}^{(0)})' - \varepsilon_{r\theta}^{(0)} (\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)})' - (\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)})^2 - (\varepsilon_{r\theta}^{(0)})^2] &= 0, \\ \varepsilon_{r\theta}^{(0)} [\varepsilon_{rr}^{(0)} (\varepsilon_{r\theta}^{(0)})' - \varepsilon_{r\theta}^{(0)} (\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)})' - (\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)})^2 - (\varepsilon_{r\theta}^{(0)})^2] &= 0.\end{aligned}\quad (2.13)$$

Уравнения системы (2.13) выполняются в следующих случаях: 1) $\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)} \neq 0$, $\varepsilon_{r\theta}^{(0)} \neq 0$, $\varepsilon_{rr}^{(0)} (\varepsilon_{r\theta}^{(0)})' - \varepsilon_{r\theta}^{(0)} (\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)})' - (\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)})^2 - (\varepsilon_{r\theta}^{(0)})^2 = 0$; 2) $\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)} = 0$, $\varepsilon_{r\theta}^{(0)} = 0$.

В первом случае скорости деформаций имеют особенность вида r^{-1} , а компоненты тензора напряжений при $r \rightarrow 0$ стремятся к конечным величинам:

$$\sigma_{\theta\theta} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{2\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)}}{\varepsilon}, \quad \sigma_{rr} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)}}{\varepsilon}, \quad \sigma_{r\theta} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\varepsilon_{r\theta}^{(0)}}{\varepsilon},$$

где $\varepsilon^2 = (\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)})^2 + (\varepsilon_{r\theta}^{(0)})^2$. Неизвестные функции $\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)}$ и $\varepsilon_{r\theta}^{(0)}$ определяются из ОДУ, следующих из уравнений равновесия задачи $(\varepsilon_{r\theta}^{(0)}/\varepsilon)' - \varepsilon_{\theta\theta}^{(0)}/\varepsilon = 0$, $(\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)}/\varepsilon)' + \varepsilon_{r\theta}^{(0)}/\varepsilon = 0$, решениями которых являются функции

$$\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)}(\theta) = \rho(\theta)(-A_1 \sin \theta + A_2 \cos \theta), \quad \varepsilon_{r\theta}^{(0)}(\theta) = \rho(\theta)(A_1 \cos \theta + A_2 \sin \theta)$$

($\rho(\theta)$ — произвольная функция; A_1, A_2 — постоянные интегрирования). Таким образом, в рассматриваемом случае напряжения и скорости деформаций в окрестности вершины трещины представляются в виде

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta} &= 2(-A_1 \sin \theta + A_2 \cos \theta)/\sqrt{3}, & \sigma_{rr} &= (-A_1 \sin \theta + A_2 \cos \theta)/\sqrt{3}, \\ \sigma_{r\theta} &= (A_1 \cos \theta + A_2 \sin \theta)/\sqrt{3},\end{aligned}\quad (2.14)$$

$$\dot{\varepsilon}_{rr} = 0, \quad \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = \frac{\rho(\theta)}{r} (-A_1 \sin \theta + A_2 \cos \theta), \quad \dot{\varepsilon}_{r\theta} = \frac{\rho(\theta)}{r} (A_1 \cos \theta + A_2 \sin \theta).$$

Во втором случае, когда $\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)} = 0$, $\varepsilon_{r\theta}^{(0)} = 0$, выражения для скоростей деформации ползучести в окрестности вершины трещины имеют вид

$$\dot{\varepsilon}_{rr}(r, \theta) = r^{\alpha-1} \varepsilon_{rr}^{(1)} + \dots, \quad \dot{\varepsilon}_{\theta\theta}(r, \theta) = r^{\alpha-1} \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} + \dots, \quad \dot{\varepsilon}_{r\theta}(r, \theta) = r^{\alpha-1} \varepsilon_{r\theta}^{(1)} + \dots \quad (2.15)$$

При $r \rightarrow 0$ компоненты тензора напряжений определяются формулами

$$\sigma_{\theta\theta} = (\varepsilon_{rr}^{(1)} + 2\varepsilon_{\theta\theta}^{(1)})/(\sqrt{3}\varepsilon^{(1)}), \quad \sigma_{rr} = (\varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} + 2\varepsilon_{rr}^{(1)})/(\sqrt{3}\varepsilon^{(1)}), \quad \sigma_{r\theta} = \varepsilon_{r\theta}^{(1)}/(\sqrt{3}\varepsilon^{(1)}),$$

где $(\varepsilon^{(1)})^2 = (\varepsilon_{\theta\theta}^{(1)})^2 + (\varepsilon_{rr}^{(1)})^2 + \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)}\varepsilon_{rr}^{(1)} + (\varepsilon_{r\theta}^{(1)})^2$.

Систему уравнений для определения функций $\varepsilon_{ij}^{(1)}$ образуют уравнения, следующие из уравнений равновесия и условия совместности деформаций и полученные с помощью разложений (2.15). Проводя необходимые вычисления, для компонент тензора напряжений можно получить выражения вида (2.4). Комбинируя представления (2.4) и (2.14) для напряжений и добиваясь выполнения граничных условий на берегах трещины, условий симметрии на ее продолжении и требований непрерывности компонент $\sigma_{\theta\theta}$ и $\sigma_{r\theta}$ на лучах, разделяющих секторы, можно найти распределение напряжений (2.7). Для скоростей деформаций в окрестности вершины трещины справедливы представления

$$\begin{aligned} 0 \leq \theta < \theta_{0a}: \quad \dot{\varepsilon}_{rr} &= 0, \quad \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = -\frac{\rho_1(\theta) \sin \theta}{r}, \quad \dot{\varepsilon}_{r\theta} = \frac{\rho_1(\theta) \cos \theta}{r}, \\ \theta_{0a} < \theta < \theta_{0b}: \quad \dot{\varepsilon}_{rr} &= \rho_2(\theta) \frac{a + 3b \cos \theta_b + 3c \sin \theta_b}{r^{1-\alpha}}, \quad \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = \rho_2(\theta) \frac{a - 3b \cos \theta_b - 3c \sin \theta_b}{r^{1-\alpha}}, \\ \dot{\varepsilon}_{r\theta} &= 3\rho_2(\theta) \frac{-b \sin \theta_b + c \cos \theta_b}{r^{1-\alpha}}, \\ \theta_{0b} < \theta \leq \pi: \quad \dot{\varepsilon}_{rr} &= -\rho_3(\theta) \frac{1 + 3 \cos 2\theta}{r^{1-\alpha}}, \quad \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = -\rho_3(\theta) \frac{1 - 3 \cos 2\theta}{r^{1-\alpha}}, \\ \dot{\varepsilon}_{r\theta} &= 3\rho_3(\theta) \frac{\sin 2\theta}{r^{1-\alpha}}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Асимптотики скоростей деформаций (2.8)–(2.10) и (2.16) представляют собой решение одной и той же задачи и, следовательно, должны совпадать. Сравнение выражений (2.8)–(2.10) и (2.16) показывает, что скорости деформаций имеют сингулярность в окрестности вершины трещины, причем показатель сингулярности меняется дискретно в зависимости от полярного угла θ , принимая значение $\alpha = 1$ при $0 \leq \theta < \theta_{0a}$; в остальных секторах ($\theta_{0a} < \theta < \theta_{0b}$ и $\theta_{0b} < \theta \leq \pi$) показатель сингулярности принимает значение $\alpha = 1/2$ (рис. 4).

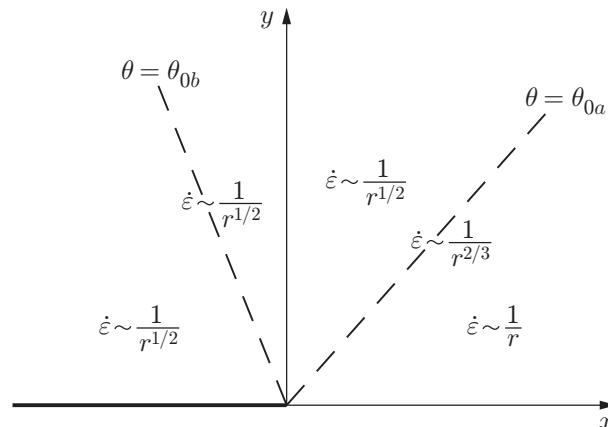


Рис. 4. Дискретное изменение показателя сингулярности скоростей деформаций ползучести в зависимости от полярного угла в окрестности вершины трещины при плоском напряженном состоянии

В интервале $\theta_{0a} < \theta < \theta_{0b}$ функция $\sigma_2(\theta)$ определяется как решение линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами

$$(a + 3b \cos \theta_b + 3c \sin \theta_b)y_2'' + 6(\alpha + 1)(-b \sin \theta_b + c \cos \theta_b)y_2' + \\ + \alpha[\alpha a - 3(\alpha + 2)(b \cos \theta_b + c \sin \theta_b)]y_2 = 0, \quad (2.17)$$

где $y_2 = 1/\sigma_2$. Решение уравнения (2.17) можно представить в виде

$$y_2(\theta) = \left[C_1 \left(\frac{d + 3c - \operatorname{tg} \theta_b}{d - 3c + \operatorname{tg} \theta_b} \right)^{1/4} + C_2 \left(\frac{d + 3c - \operatorname{tg} \theta_b}{d - 3c + \operatorname{tg} \theta_b} \right)^{-1/4} \right] (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_b)^{1/4} \times \\ \times (a + a \operatorname{tg}^2 \theta_b + 3b - 3b \operatorname{tg}^2 \theta_b + 6c \operatorname{tg} \theta_b)^{-1/4},$$

где $d = \sqrt{9b^2 + 9c^2 - a^2}$. Исследование последнего выражения показывает, что асимптотическое разложение скоростей деформаций (2.9) не является равномерно пригодным при $\theta = \theta_{0a}$, поскольку при данном значении полярного угла функция $a + a \operatorname{tg}^2 \theta_b + 3b - 3b \operatorname{tg}^2 \theta_b + 6c \operatorname{tg} \theta_b$, содержащаяся в асимптотике скоростей деформаций, обращается в нуль. Таким образом, асимптотическое разложение (2.9) равномерно пригодна всюду на интервале $\theta_{0a} < \theta \leq \theta_{0b}$, за исключением малой окрестности луча $\theta = \theta_{0a}$. Для определения асимптотики скоростей деформаций на луче $\theta = \theta_{0a}$ следует положить $\theta = \theta_{0a} + r^\mu a$ и рассмотреть окрестность этого луча при выполнении условия непрерывности компонент тензора скоростей деформаций $\dot{\varepsilon}_{\theta\theta}$ и $\dot{\varepsilon}_{r\theta}$. Формулируя условия непрерывности компоненты $\dot{\varepsilon}_{r\theta}$ на луче $\theta = \theta_{0a}$ и рассматривая окрестность этого луча, можно установить, что $\mu = 1/3$ и, следовательно, скорости деформаций ползучести на луче $\theta = \theta_{0a}$ пропорциональны $r^{-2/3}$. При $\theta_{0b} < \theta \leq \pi$ условие совместности позволяет получить ОДУ относительно функции $\sigma_3(\theta)$:

$$(1 + 3 \cos 2\theta)y_3'' - 6(\alpha + 1) \sin 2\theta y_3' + \alpha[\alpha - 3(\alpha + 2) \cos 2\theta]y_3 = 0. \quad (2.18)$$

Здесь $y_3 = y_3(\theta) = 1/\sigma_3(\theta)$. Решением уравнения (2.18) является функция

$$y_3 = (1 + 3 \cos 2\theta)^{-1/(2\alpha)} \left[C_1 \left(\frac{\sin \theta + \sqrt{2} \cos \theta}{-\sin \theta + \sqrt{2} \cos \theta} \right)^{1/(2\alpha)} + C_2 \left(\frac{-\sin \theta + \sqrt{2} \cos \theta}{\sin \theta + \sqrt{2} \cos \theta} \right)^{1/(2\alpha)} \right],$$

не имеющая особенностей при $\theta_{0b} \leq \theta \leq \pi$.

Формулы (2.7)–(2.10) описывают поля напряжений и скоростей деформаций в окрестности вершины трещины. Это ближнее поле необходимо срастить с внешним полем, зависящим от системы внешних нагрузок, приложенных к телу, и геометрии реального образца. Процедуру срачивания можно провести, используя свойство инвариантности C^* -интеграла. При этом следует выбрать два контура, охватывающих вершину трещины, причем один из контуров должен располагаться в окрестности вершины, а значение C^* -интеграла — находиться с помощью решения, справедливого в окрестности вершины (2.4), (2.8)–(2.10); другой контур должен находиться на некотором удалении от вершины трещины, а C^* -интеграл — вычисляться по дальнему полю (1.6). Для рассматриваемой задачи получаем

$$2 \int_0^{\theta_{0a}} \rho_1(\theta) (1 - \sqrt{3} \sin^2 \theta) \cos \theta d\theta = 1.$$

3. Плоское деформированное состояние. Используя развитый выше подход для трещины поперечного сдвига в условиях плоского деформированного состояния, можно

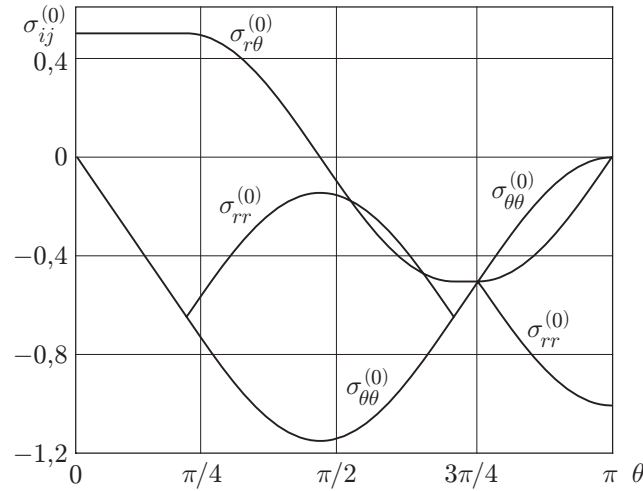


Рис. 5. Зависимость компонент тензора напряжений от полярного угла при плоской деформации (аналитическое решение статически определимой задачи)

найти поле напряжений вблизи вершины трещины:

$$\begin{aligned}
 0 \leq \theta \leq \theta_{0a}: \quad & \theta_{0a} = \pi/8 + 1/4, \quad \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = \sigma_{rr}^{(0)} = -\theta, \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = 1/2, \\
 \theta_{0a} \leq \theta \leq \theta_{0b}: \quad & \theta_{0b} = 5\pi/8 + 1/4, \quad \sigma_{rr}^{(0)} = -1/4 - \pi/8 - (1/2) \cos \Theta, \\
 & \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = -1/4 - \pi/8 + (1/2) \cos \Theta, \\
 & \sigma_{r\theta}^{(0)} = (1/2) \sin \Theta, \quad \Theta(\theta) = 2\theta + \pi/4 - 1/2, \\
 \theta_{0b} \leq \theta \leq 3\pi/4: \quad & \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = \sigma_{rr}^{(0)} = \theta - 1/2 - 3\pi/4, \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = -1/2, \\
 3\pi/4 \leq \theta \leq \pi: \quad & \sigma_{rr}^{(0)} = -(1 + \cos 2\theta)/2, \quad \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = -(1 - \cos 2\theta)/2, \\
 & \sigma_{r\theta}^{(0)} = (1/2) \sin 2\theta.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Поле напряжений (3.1) совпадает с известным полем напряжений в окрестности вершины трещины поперечного сдвига в условиях плоского деформированного состояния в жестком идеально пластическом материале [11] (рис. 5). Используя полученное распределение напряжений (3.1), можно найти компоненты тензора скоростей деформаций вблизи устья трещины:

$$\begin{aligned}
 0 \leq \theta < \theta_{0a}: \quad & \theta_{0a} = \pi/8 + 1/4, \quad \dot{\epsilon}_{rr} = \dot{\epsilon}_{\theta\theta} = 0, \quad \dot{\epsilon}_{r\theta} = 1/(r^\alpha \sigma_1(\theta)), \\
 \theta_{0a} < \theta < \theta_{0b}: \quad & \theta_{0b} = 5\pi/8 + 1/4, \\
 & \dot{\epsilon}_{\theta\theta} = \cos \Theta [D_1 \cos^{-\alpha}(\Theta/2 + \pi/4) + E_1 \sin^{-\alpha}(\Theta/2 + \pi/4)]/r^\alpha, \\
 & \dot{\epsilon}_{r\theta} = \sin \Theta [D_1 \cos^{-\alpha}(\Theta/2 + \pi/4) + E_1 \sin^{-\alpha}(\Theta + \pi/4)]/r^\alpha, \\
 \theta_{0b} < \theta < 3\pi/4: \quad & \dot{\epsilon}_{rr} = \dot{\epsilon}_{\theta\theta} = 0, \quad \dot{\epsilon}_{r\theta} = 1/(r^\alpha \sigma_3(\theta)), \\
 3\pi/4 < \theta \leq \pi: \quad & \dot{\epsilon}_{\theta\theta} = -\dot{\epsilon}_{rr} = \cos 2\theta [D_2 \cos^{-\alpha}(\theta + \pi/4) + E_2 \sin^{-\alpha}(\theta + \pi/4)]/r^\alpha, \\
 & \dot{\epsilon}_{r\theta} = \sin(2\theta) [D_2 \cos^{-\alpha}(\theta + \pi/4) + E_2 \sin^{-\alpha}(\theta + \pi/4)]/r^\alpha.
 \end{aligned}$$

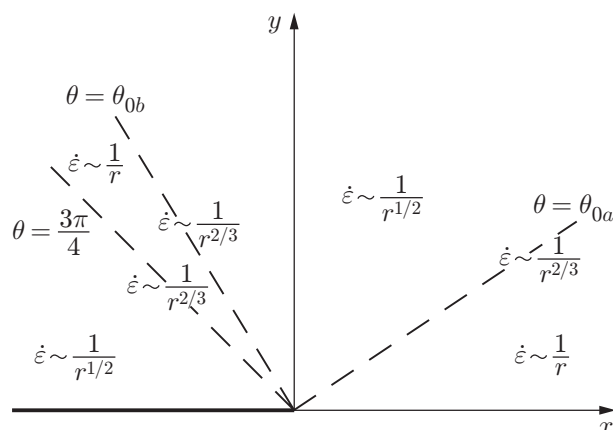


Рис. 6. Дискретное изменение показателя сингулярности скоростей деформаций ползучести в зависимости от полярного угла в окрестности вершины трещины при плоской деформации

Как и в случае плоского напряженного состояния, при $0 \leq \theta < \theta_{0a}$ и $\theta_{0b} < \theta < 3\pi/4$ $\alpha = 1$; при $\theta_{0a} < \theta < \theta_{0b}$ и $3\pi/4 < \theta \leq \pi$ $\alpha = 1/2$. На линиях, разделяющих указанные области $\theta = \theta_{0a}$, $\theta = \theta_{0b}$ и $\theta = 3\pi/4$, показатель сингулярности компонент тензора скоростей деформаций равен $2/3$. Проведенный асимптотический анализ показывает, что особенностью дробно-линейного закона является дискретная зависимость асимптотики скоростей деформаций от полярного угла при приближении к вершине трещины (рис. 6).

4. Выводы и обсуждение результатов. Асимптотический анализ полей напряжений и скоростей деформаций ползучести вблизи вершины трещины поперечного сдвига в условиях плоского напряженного и плоского деформированного состояний при использовании дробно-линейной аппроксимации показал, что вблизи устья трещины поля напряжений задаются различными функциональными зависимостями для разных клинообразных областей изменения полярного угла. Показано, что в предельном случае (когда показатель нелинейности стремится к бесконечности) найденные поля напряжений совпадают с распределением напряжений вблизи кончика трещины в материале, поведение которого описывается степенным законом ползучести, что подтверждает найденное решение статически определимой задачи. Полученное решение позволяет объяснить характер поля деформаций вблизи устья трещины в идеально пластическом материале, поскольку условие достижения предельного состояния $\sigma_e = \sigma_b$ аналогично условию появления пластического течения Мизеса. В отличие от задач теории идеальной пластичности при определении кинематики пластического течения в окрестности вершины трещины, когда можно найти лишь некоторые особенности поля деформаций, в рамках настоящего подхода удастся определить поле скоростей в каждом из секторов.

Полученные решения дополняют существующий класс решений задач о напряженном состоянии в окрестности вершины трещины в материале, поведение которого описывается дробно-линейным соотношением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бойл Дж. Анализ напряжений в конструкциях при ползучести / Дж. Бойл, Дж. Спенс. М.: Мир, 1986.
2. Шестериков С. А., Юмашева М. А. Конкретизация уравнений состояния в теории ползучести // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1984. № 1. С. 86–92.

3. **Шестериков С. А., Лебедев С. Ю., Юмашева М. А.** О длительной прочности // Проблемы механики сплошной среды: К 60-летию со дня рожд. В. П. Мясникова. Владивосток: Ин-т автоматизации и процессов управления ДВО РАН, 1996. С. 80–85.
4. **Аршакуни А. Л., Шестериков С. А.** Прогнозирование длительной прочности жаропрочных металлических материалов // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1994. № 3. С. 126–141.
5. **Аршакуни А. Л.** Прогнозирование длительной прочности металлов // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1997. № 6. С. 126–135.
6. **Кашелкин В. В., Кузнецова И. А., Шестериков С. А.** Метод прогнозирования длительной прочности хромоникелевых аустенитных сталей // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2004. № 1. С. 182–187.
7. **Шестериков С. А., Степанова Л. В.** Анализ напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины в условиях ползучести // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1995. № 1. С. 96–103.
8. **Астафьев В. И., Шестериков С. А., Степанова Л. В.** Асимптотика напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины в условиях ползучести // Вестн. Сам. гос. ун-та. 1995. Спецвыпуск. С. 59–64.
9. **Hutchinson J. W.** Plastic stress and strain fields at a crack tip // J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16. P. 337–349.
10. **Hill R.** On discontinuous plastic states with special reference to localized necking in thin sheets // J. Mech. Phys. Solids. 1952. V. 1. P. 19–30.
11. **Rice J. R., Rosengren G. F.** Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material // J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16. P. 1–12.
12. **Hutchinson J. W.** Singular behaviour at the end of tensile crack in a hardening material // J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16. P. 13–31.

*Поступила в редакцию 14/V 2007 г.,
в окончательном варианте — 1/II 2008 г.*
