

УДК.532.529:532.517.4

## **Осаждение инерционных частиц из турбулентного потока в каналах при больших числах Рейнольдса \***

**Д.Ф. Сиковский<sup>1,2</sup>**

<sup>1</sup>*Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск*

<sup>2</sup>*Новосибирский государственный университет*

E-mail: dphs@itp.nsc.ru

На основе развитой ранее асимптотической теории турбулентного газодисперсного течения с осаждением частиц в каналах и модели переноса напряжений Рейнольдса дисперсной фазы получено асимптотическое решение задачи об осаждении частиц в пределе больших чисел Рейнольдса. Численные расчеты подтвердили наличие в области перехода от диффузионно-импактного режима осаждения к режиму инерционного замедления явления бифуркации решения, обнаруженного в более ранних исследованиях. Проанализированы особенности аккумуляции частиц в вязком подслое. На основе численного решения получены корреляции для скорости осаждения частиц. Предложены граничные условия типа пристеночных функций для концентрации частиц, использование которых позволяет расширить пределы применимости равновесных эйлеровых моделей по параметру инерционности частиц.

**Ключевые слова:** турбулентность, газодисперсные течения, осаждение частиц, асимптотическая теория.

### **ВВЕДЕНИЕ**

Изучению осаждения аэрозольных частиц и капель из турбулентного потока на стенки каналов и труб посвящено большое количество экспериментальных и численных исследований. Помимо фундаментального значения исследование процессов осаждения частиц из турбулентных потоков актуально для многих приложений в машиностроении, полупроводниковой промышленности, медицине, ядерной энергетике, химической технологии и экологии. Несмотря на более чем полувековую историю исследований и большое количество публикаций, в настоящее время даже упрощенная постановка задачи осаждения частиц с малой концентрацией дисперсной фазы и отсутствием обратного влияния частиц на турбулентность несущей фазы все еще представляет серьезные трудности для решения [1, 2]. Из существующих подходов (эйлерова и лагранжева) наиболее оптимальным для использования в инженерной практике с точки зрения трудоемкости в настоящее время является эйлеров подход, использующий осредненные уравнения переноса фаз, замкнутые с помощью той или иной гипотезы замыкания. В настоящее время

---

\* Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований № 11 ОЭМПУ РАН.

в вычислительной практике инженерных расчетов наиболее широко применяются равновесные эйлеровы модели, в которых используются квазиравновесные соотношения пропорциональности напряжений Рейнольдса дисперсной фазы напряжениям Рейнольдса несущей фазы [1, 2]. Между тем при сопоставимых временах динамической релаксации частицы  $\tau_p$  и лагранжева масштаба времени турбулентности влияние инерции частиц может приводить к заметным отличиям характера пространственных распределений напряжений Рейнольдса дисперсной и несущей фаз. Нелокальность связи между напряжениями Рейнольдса частиц и несущей фазы особенно заметно проявляется при сильной неоднородности напряжений Рейнольдса несущей фазы, имеющей место в пристенной области турбулентного потока. Нелокальность турбулентного переноса в рамках эйлерова подхода может быть приближенно учтена как с помощью алгебраических соотношений, учитывающих эффект памяти [3, 4], так и с помощью более точных нелокальных транспортных моделей переноса напряжений Рейнольдса частиц [2, 5, 6].

Нелокальность турбулентного переноса частиц влияет на характеристики так называемой аккумуляции инерционных частиц в пристенной области турбулентного потока, вызванной турбофорезом [7, 8] частиц из внешней области (ядра потока) с высокой интенсивностью турбулентности в вязкий подслои с малыми поперечными пульсациями скорости несущей фазы. Влияние конвекции и неравновесных эффектов памяти переноса частиц [4] приводит к уменьшению пристенного пика концентрации частиц и его постепенному выхолаживанию с ростом параметра инерционности  $\tau_+ = v_\tau^2 \tau_p / \nu$  ( $v_\tau$  — динамическая скорость,  $\nu$  — кинематическая вязкость несущей фазы) при заметно более ранних значениях параметра  $\tau_+$ , чем в равновесных эйлеровых моделях [1, 9]. Более точная модель [2, 10], учитывающая нелокальный перенос вторых моментов пульсаций скорости частиц, предсказывает новый качественный эффект — появление бифуркации решения при некотором значении  $\tau_+ = \tau_{cr}$ . Согласно приближенному решению задачи в упрощенной постановке [2, 10], при  $\tau_+ < \tau_{cr}$  интенсивность пульсаций частиц вблизи стенки равна нулю, а при  $\tau_+ > \tau_{cr}$  — отлична от нуля, что демонстрирует наличие бифуркации закритического типа. Стоит отметить, что с помощью активно используемого в последнее время метода лагранжева траекторного описания частиц на основе прямого численного моделирования (DNS) турбулентности несущей фазы [11], дающего более детальную информацию, такую бифуркацию решения обнаружить довольно трудно, так как необходимый для этого перебор расчетных вариантов с параметром инерционности  $\tau_+$  в предполагаемой окрестности бифуркации потребовал бы много времени.

В настоящей работе для исследования задачи осаждения частиц из турбулентного потока применяются асимптотическая теория пристенного газодисперсного течения при больших числах Рейнольдса [12] и модель переноса напряжений Рейнольдса частиц [2], учитывающая важные физические эффекты динамики частиц в пристенной турбулентности: влияние эффекта инерционности на лагранжев интегральный временной масштаб взаимодействия частиц с турбулентными вихрями и малость турбулентного числа Рейнольдса вблизи стенки. Асимптотическое решение задачи в пределе больших чисел Рейнольдса в главном приближении имеет гораздо более простую структуру, чем задача в полной постановке, и характеризуется меньшим набором варьируемых параметров, что позволяет более детально проанализировать явление аккумуляции частиц в вязком подслое и его влияние на скорость осаждения. Анализируется явление бифуркации решения при переходе от диффузионно-импактного режима к режиму инерционного замедления.

Предлагаются простые аналитические аппроксимации для скорости осаждения частиц. Полученное решение задачи в области логарифмического слоя использовано для вывода граничных условий типа пристеночных функций для концентрации частиц, позволяющих корректно моделировать задачу осаждения частиц в диффузионно-импактном режиме и частично в режиме инерционного замедления с помощью равновесных эйлеровых моделей.

### 1. ОБЪЕКТ ИССЛЕДОВАНИЯ

Рассматривается турбулентный поток газа в канале или круглой трубе на участке развитого течения со взвешенными монодисперсными частицами, плотность которых много больше плотности несущей фазы. Массовая концентрация частиц предполагается малой, что позволяет пренебречь обратным влиянием дисперсной фазы на турбулентное течение несущей фазы. Для описания движения частиц используется простая модель точечных частиц [2, 11]

$$\dot{\mathbf{v}} = [\mathbf{u}(\mathbf{x}_p, t) - \mathbf{v}] / \tau_p + \mathbf{F}_B, \quad (1)$$

где  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}_p$  — скорость частицы,  $\mathbf{x}_p = \mathbf{x}_p(t)$  — ее координата,  $\mathbf{u}(\mathbf{x}_p, t)$  — скорость несущей среды в точке местонахождения частицы,  $\mathbf{F}_B$  — случайные ускорения частицы под действием броуновского движения несущей среды, существенные для частиц малых размеров и определяемые коррелятором типа гауссова белого шума  $\langle F_{iB}(t)F_{jB}(t') \rangle = 2\delta_{ij}D_B\tau_p^{-2}\delta(t-t')$ , где  $D_B$  — коэффициент броуновской диффузии.

Влиянием гравитационного оседания, подъемной силы, сил Бассэ и присоединенной массы, а также инерционных поправок к закону сопротивления Стокса при конечности числа Рейнольдса обтекания частицы в модели (1) пренебрегается. Диапазон применимости выбранной модели точечных частиц без гравитации для лабораторных течений ( $Re = 2U_m R/\nu \sim 10^4 \div 10^5$ ,  $R \sim 0,1$  м, где  $U_m$  — среднерасходная скорость,  $R$  — радиус трубы или полуширина канала) ограничен размерами частиц, существенно меньшими толщины вязкого подслоя [12]. Поскольку толщина вязкого подслоя в таких течениях имеет порядок нескольких сотен микрон, из практически важных течений, удовлетворяющих этим ограничениям, прежде всего, следует упомянуть аэрозоли и подобные им газодисперсные течения. Для течений других геометрических масштабов границы применимости можно установить из оценок, приведенных в [12].

При столкновении со стенкой частицы претерпевают неупругое соударение и поглощаются без отскока. Коэффициент осаждения частиц, называемый также безразмерной скоростью осаждения,  $V_d^+ = J_w/v_\tau\Phi_m$ , где  $J_w$  — поток дисперсной фазы на стенку,  $\Phi_m$  — среднемассовая объемная концентрация дисперсной фазы на стенке, обычно является малой величиной. Вследствие этого влиянием уменьшения концентрации частиц в продольном направлении из-за осаждения и связанных с этим продольных градиентов концентрации на турбулентный перенос дисперсной фазы можно пренебречь.

### 2. ТЕОРИЯ ПОДОБИЯ ПРИСТЕННЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ГАЗОДИСПЕРСНЫХ ТЕЧЕНИЙ

В ограниченном стенками развитом турбулентном течении с достаточно большим числом Рейнольдса, построенном по динамической скорости и радиусу канала  $R_+ = v_\tau R/\nu \gg 10^2$ , область течения делится на две — внешнюю, занимаю-

шую почти всю область течения, и прилегающую к стенке внутреннюю, или вязкий подслой, толщиной  $l_v \sim 10\nu/v_\tau$ . Согласно принципу подобия турбулентных течений по числу Рейнольдса [13], вязкость не должна оказывать влияния на турбулентный перенос во внешней области. С другой стороны, малость толщины вязкого подслоя по сравнению с остальными характерными геометрическими размерами потока позволяет надеяться, что величина  $\nu/v_\tau$  является единственным масштабом длины для величин потока в области вязкого подслоя. Эти два предположения лежат в основе теории подобия пристенной турбулентности (см. [14–16]), с помощью которой в [12] была построена теория подобия газодисперсных течений. Согласно этой теории, главные приближения (первые члены асимптотических разложений) концентрации дисперсной фазы и статистических моментов пульсаций скорости частиц во внешней области и в области вязкого подслоя соответственно имеют вид:

$$\Phi_{c+} - \Phi_+ = F_p(\eta, St_0), \quad \langle v'_i \dots v'_n \rangle = v_\tau^n \sigma_{p i \dots i_n}^+(\eta, St_0), \quad (2)$$

$$\Phi_+ = \varphi_+(y_+, \tau_+, Sc_B), \quad \langle v'_i \dots v'_n \rangle = v_\tau^n \sigma_{p i \dots i_n}(y_+, \tau_+, Sc_B), \quad (3)$$

где  $\Phi_+ = v_\tau \Phi / J_w$ ,  $\Phi_{c+}$  — безразмерная концентрация частиц на оси канала,  $\eta = y/R$ ,  $y_+ = v_\tau y / \nu$  — растянутые координаты для внешней области и вязкого подслоя соответственно,  $F_p$ ,  $\varphi_+$ ,  $\sigma_{p i \dots i_n}^+$  — универсальные функции,  $Sc_B = \nu / D_B$  — число Шмидта броуновской диффузии,  $\tau_+ = v_\tau^2 \tau_p / \nu$  — безразмерное время релаксации, или параметр инерционности частицы в вязком подслое,  $St_0 = v_\tau \tau_p / R$  — параметр инерционности частицы во внешней области. Параметры инерционности представляют собой отношение времени релаксации частицы к характерному масштабу времени турбулентных пульсаций скорости несущей фазы в рассматриваемой области течения и характеризуют влияние инерционности частиц на динамику дисперсной фазы.

Поскольку  $St_0 = \tau_+ / R_+ \ll 1$  при  $R_+ \gg 1$ , частицы во внешней области при достаточно больших числах Рейнольдса  $R_+$  ведут себя как безинерционные (пассивная примесь). Как показано в [12], в диапазоне расстояний от стенки  $\tau_+ \ll y_+ \ll R_+$  для концентрации частиц выполняется логарифмический закон, аналогичный логарифмическому закону для пассивной примеси

$$\varphi_+ = \frac{Pr_t}{\kappa} \ln y_+ + B_p(\tau_+, Sc_B), \quad \tau_+ \ll y_+ \ll R_+, \quad (4)$$

где  $\kappa = 0,42$  — постоянная Кармана,  $Pr_t = 0,85$  — турбулентное число Прандтля,  $B_p(\tau_+, Sc_B)$  — аддитивный коэффициент логарифмического закона, являющийся универсальной функцией аргументов.

Согласно [15], логарифмический закон (4) является хорошим приближением для профиля концентрации не только в логарифмическом слое, но и во всей внешней области  $\eta = O(1)$  как для круглых труб, так и для плоских каналов

$$\Phi_{c+} - \Phi_+ = F_p(\eta, 0) \approx -\frac{Pr_t}{\kappa} \ln \eta. \quad (5)$$

Сращивание (4) и (5) позволяет найти концентрацию частиц на оси канала

$$\Phi_{c+} = \frac{\text{Pr}_t}{\kappa} \ln R_+ + B_p(\tau_+, \text{Sc}_B) \quad (6)$$

и закон осаждения (детали вывода см. в Приложении)

$$V_d^+ = \left( B_p(\tau_+, \text{Sc}_B) + \frac{\text{Pr}_t}{\kappa} \ln R_+ - \beta_p + \beta_1 \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \right)^{-1}. \quad (7)$$

Выражение (7) уточняет полученное ранее в [12] асимптотическое выражение для коэффициента осаждения.

Для окончательного вычисления коэффициента осаждения, согласно (7), требуется определить функцию  $B_p(\tau_+, \text{Sc}_B)$ . В [12] получены асимптотики этой функции для больших и малых значений параметра инерционности  $\tau_+$ :

$$B_p(\tau_+, \text{Sc}_B) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}(A_{22}T_+)^{1/4}} \text{Sc}_B^4 \frac{\tau_+}{T_+ + \tau_+} [1 + O(\tau_+/T_+)], \quad \tau_+ \ll T_+, \quad (8)$$

$$B_p(\tau_+, \text{Sc}_B) = -\frac{\text{Pr}_t}{\kappa} \ln \tau_+ + C_p + o(1), \quad \tau_+ \gg T_+, \quad (9)$$

где  $T_+ = v_\tau^2 T_L / \nu$ ,  $T_L$  — интегральный масштаб времени нормальной к стенке пульсационной скорости несущей фазы,  $C_p = O(1)$  — универсальная постоянная,  $A_{22}$  — универсальная постоянная в асимптотическом разложении нормальных напряжений Рейнольдса несущей фазы вблизи стенки

$$\sigma_+ = A_{22} y_+^4 + O(y_+^5), \quad y_+ \rightarrow 0, \quad (10)$$

где  $\sigma_+ = \langle u_y^2 \rangle / v_\tau^2$ ,  $\langle u_y^2 \rangle$  — нормальные напряжения Рейнольдса несущей фазы.

Для вычисления функции  $B_p$  во всей области изменения параметра  $\tau_+$  необходимо провести обработку экспериментальных данных по профилям концентрации частиц с целью определения коэффициентов в логарифмическом законе (4), однако, к сожалению, такие данные в современной литературе отсутствуют. Альтернативой экспериментальным данным могут служить данные DNS течений в каналах с осаждающимися частицами [11,17-19], однако эти данные получены для малых чисел Рейнольдса  $R_+ \sim 125 \div 340$ , при которых турбулентность потока не является достаточно развитой для надежного выполнения соотношений подобия (2, 3). Кроме того, из-за трудоемкости метода DNS имеющиеся на сегодняшний день данные получены только для нескольких значений параметра инерционности  $\tau_+$  и числа Шмидта  $\text{Sc}_B$ , что не позволяет надежно определить по ним функцию двух аргументов  $B_p(\tau_+, \text{Sc}_B)$ .

Наиболее удобным выходом из этой ситуации является использование адекватных RANS-моделей (Reynolds-averaged Navier–Stokes) динамики частиц в турбулентном потоке, учитывающих влияние пространственно-временной нелокальности турбулентного переноса дисперсных частиц, вызванной их инерционностью. В данной работе для нахождения функции  $B_p(\tau_+, \text{Sc}_B)$  будет использована основанная на модели движения частиц (1) модель переноса напряжений Рейнольдса

дисперсной фазы [2, 20], замыкающие соотношения которой построены с учетом влияния малости турбулентного числа Рейнольдса в вязком подслое на турбулентный перенос.

### 3. УРАВНЕНИЯ МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА НАПРЯЖЕНИЙ ДИСПЕРСНОЙ ФАЗЫ В ВЯЗКОМ ПОДСЛОЕ

Учитывая малость толщины вязкого подслоя по сравнению с диаметром канала и упомянутую в конце п.1 малость продольных градиентов концентрации дисперсной фазы, задача о динамике частиц в вязком подслое в первом приближении сводится к одномерной, в которой все величины зависят только от  $y_+$  [6, 10]. Далее в этом пункте все уравнения будут приведены в безразмерном виде с использованием единиц стенки  $v_\tau$  и  $\nu$ . Поток частиц через вязкий подслои по нормали к стенке является сохраняющейся величиной

$$V_+ \Phi_+ = -1, \quad (11)$$

где  $V_+ = V/v_\tau$ ,  $V$  — средняя скорость дисперсной фазы по нормали к стенке.

Уравнения переноса для средней скорости и нормальных напряжений Рейнольдса частиц [2] для вязкого подслоя принимают вид

$$V_+ \frac{dV_+}{dy_+} = -\frac{V_+}{\tau_+} - \frac{d\sigma_p^+}{dy_+} - \frac{D_p^+}{\tau_+} \frac{d \ln \Phi_+}{dy_+}, \quad (12)$$

$$V_+ \frac{d\sigma_p^+}{dy_+} = \frac{1}{\Phi_+} \frac{d}{dy_+} \left( \Phi_+ D_p^+ \frac{d\sigma_p^+}{dy_+} \right) + 2 \left[ \frac{1}{Sc_B \tau_+^2} + \frac{f_u \sigma_+ - \sigma_p^+}{\tau_+} - \frac{D_p^+}{\tau_+} \frac{dV_+}{dy_+} \right], \quad (13)$$

где  $\sigma_p^+ = \langle v_p'^2 \rangle / v_\tau^2$  — безразмерные нормальные напряжения Рейнольдса частиц. Коэффициент турбулентной диффузии частиц имеет вид

$$D_p^+ = \tau_+ (\sigma_p^+ - f_u \sigma_+) + \sigma_+ T_+, \quad (14)$$

здесь интегральный временной масштаб взаимодействия частиц с турбулентностью несущей фазы  $T_+$  определяется из соотношения [2]:

$$T_+ = \left\{ 1 + \left[ \frac{3(1+m)^2}{3+2m} - 1 \right] f(\text{St}_E) \right\} T_{L+}, \quad \text{St}_E = \frac{3+2m}{3(1+m)^2} \frac{\tau_+}{T_{L+}}, \quad (15)$$

$m = 0,5$  — структурный параметр,  $T_{L+}$  — лагранжев интегральный масштаб времени нормальных к стенке пульсаций скорости несущей фазы, задаваемый аппроксимацией:

$$T_{L+} = \left[ T_{L0+}^4 + \left( \frac{\kappa y_+}{Pr_t a_{22}} \right)^4 \right]^{1/4}, \quad (16)$$

где  $T_{L0+} = 5$  [12], а  $a_{22} \approx 1,1$  равно пределу нормальных турбулентных напряжений несущей фазы  $\sigma_+$  при  $y_+ \rightarrow \infty$ , или, более точно, в логарифмическом слое  $1 \ll y_+ \ll R_+$  [15].

Выражение (16) хорошо аппроксимирует вычисленный с помощью расчетов методом DNS турбулентного течения в плоском канале [21] лагранжев интегральный временной масштаб для наибольшего значения  $R_+ = 643$  по рекомендуемому в [22] методу (отношение турбулентной вязкости к нормальным турбулентным напряжениям) и удовлетворяет предельному соотношению  $a_{22}T_{L+} \rightarrow \kappa y_+ / \text{Pr}_t$  при  $y_+ \rightarrow \infty$ . Коэффициент увлечения  $f_u$  рассчитывается по выражению:

$$f_u = \frac{2\Omega + z^2}{2\Omega + 2\Omega^2 + z^2}, \quad (17)$$

где  $\Omega = \tau_+ / T_+$ ,  $z = \tau_{T+} / T_+$ , тейлоров масштаб времени  $\tau_{T+}$  рассчитывается:

$$\tau_{T+} = \left( \frac{2(a_{02} + \text{Re}_\lambda) \text{Re}_\lambda}{\sqrt{15}(a_{01} + a_{0\infty} \text{Re}_\lambda) \varepsilon_+} \right)^{1/2}, \quad \text{Re}_\lambda \equiv (15\sigma_+^2 / \varepsilon_+)^{1/2}, \quad (18)$$

здесь  $\varepsilon_+$  — безразмерная удельная диссипация кинетической энергии турбулентности,  $a_{01} = 11$ ,  $a_{02} = 205$ ,  $a_{0\infty} = 7$  [2].

Нормальные напряжения Рейнольдса и диссипация задаются с помощью выражений

$$\sigma_+^{1/2} = 1,05 \tanh \left\{ 0,039 y_+ \left[ 1 - \exp(-y_+ / 3,4) \right] \right\},$$

$$\varepsilon_+ = \left\{ 1 - 0,095 y_+ \exp \left[ - \left( \frac{y_+}{8} \right)^{1,5} \right] \right\} \frac{1 - \exp \left[ - \frac{y_+}{10,6} - \left( \frac{y_+}{20} \right)^2 \right]}{0,41 y_+}, \quad (19)$$

хорошо аппроксимирующих результаты расчетов методом DNS турбулентного течения в плоском канале [21] для  $R_+ = 643$ .

Аппроксимация (19) соответствует значениям коэффициентов в (10, 16)  $a_{22} = 1,1$ ,  $A_{22} = 1,45 \cdot 10^{-4}$ . Необходимо отметить, что выбранное в настоящей работе значение  $A_{22}$ , основанное на данных DNS, более чем в два раза превышает рассчитанное на основе экспериментальных данных [23] значение  $A_{22} = 6 \cdot 10^{-5}$ , использованное в предыдущей работе [12].

На внешней границе вязкого подслоя в качестве граничных условий для нормальных напряжений Рейнольдса дисперсной фазы ставится условие однородности:

$$d\sigma_p^+ / dy_+ \rightarrow 0, \quad y_+ \rightarrow \infty. \quad (20)$$

Это условие вытекает из квазиравновесного соотношения  $\sigma_p^+ \rightarrow f_u \sigma_+$ , следующего из (13) при  $y_+ \rightarrow \infty$ .

В качестве граничных условий на стенке для скорости и нормальных турбулентных напряжений частиц в [2] рекомендуется использовать условия, получен-

ные на основе гипотезы о бинормальном распределении плотности вероятностей скоростей частиц в окрестности полностью поглощающей частицы стенки

$$V = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \langle v_p^2 \rangle^{1/2}, \quad \langle v_p^3 \rangle = -\sqrt{\frac{8}{\pi}} \langle v_p^2 \rangle^{3/2}, \quad (21)$$

где скобки обозначают статистические моменты скорости частиц (нецентрированные моменты). Соответствующие (21) соотношения для моментов пульсаций скорости частиц (центрированных моментов) имеют вид

$$V = -\sqrt{\frac{2}{\pi-2}} \langle v_p'^2 \rangle^{1/2}, \quad \langle v_p'^3 \rangle = -\frac{\sqrt{2}(4-\pi)}{(\pi-2)^{3/2}} \langle v_p'^2 \rangle^{3/2}, \quad y=0. \quad (22)$$

Выражая третий момент пульсаций скорости частиц с помощью градиентной модели [2]

$$\langle v_p'^3 \rangle = -\tau_p \langle v_p'^2 \rangle \frac{\partial \langle v_p'^2 \rangle}{\partial y}$$

и переходя к безразмерным переменным, из (22) можно получить следующие граничные условия:

$$V_+ = -\left(\frac{2\sigma_p^+}{\pi-2}\right)^{1/2}, \quad \tau_+ \frac{d\sigma_p^+}{dy_+} = -\frac{\sqrt{2}(4-\pi)}{(\pi-2)^{3/2}} (\sigma_p^+)^{1/2}, \quad y_+ = 0. \quad (23)$$

Уравнения (11–13) с учетом соотношений (14–19) и граничных условий (20–23) решались численно с помощью конечно-разностного метода 2-го порядка точности на подробной сетке (601 расчетный узел) со сгущением в пристенной области для лучшего разрешения. Уравнение (13) решалось методом установления (введением в левую часть производной по времени и решении полученных конечно-разностных уравнений маршевым методом с помощью неявной схемы), начиная с некоторого начального приближения для  $\sigma_p^+$  и  $V_+$ . Уравнение для концентрации, полученное из уравнений (11, 12), на каждом шаге по времени решалось численным интегрированием. После достижения сходимости численного решения аддитивный коэффициент  $B_p(\tau_+, Sc_B)$  вычислялся с помощью соотношения (4) по расчетной концентрации частиц в последней точке расчетной области.

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

На рис. 1 представлены зависимости аддитивного коэффициента  $B_p(\tau_+, Sc_B)$  от параметра инерционности  $\tau_+$  для двух чисел Шмидта  $Sc_B = 10^4$  и  $10^6$ . Как видно из рис. 1, *a*, для малоинерционных частиц при  $\tau_+ < 1$  величина  $B_p(\tau_+, Sc_B)$  практически совпадает с асимптотическим выражением (8). При больших значениях параметра инерционности аддитивный коэффициент  $B_p(\tau_+, Sc_B)$  хорошо описывается асимптотической зависимостью (9) для инерционных частиц, если взять  $C_p \approx 1$  (рис. 1, *b*). Заметное отклонение от асимптотической теории происходит в переходной области  $1 < \tau_+ < 15$ , причем переход от режима осаждения малоинерционных частиц к режиму осаждения инерционных частиц происходит скачкообразным образом. Наиболее интересным является обнаруженный гистерезис

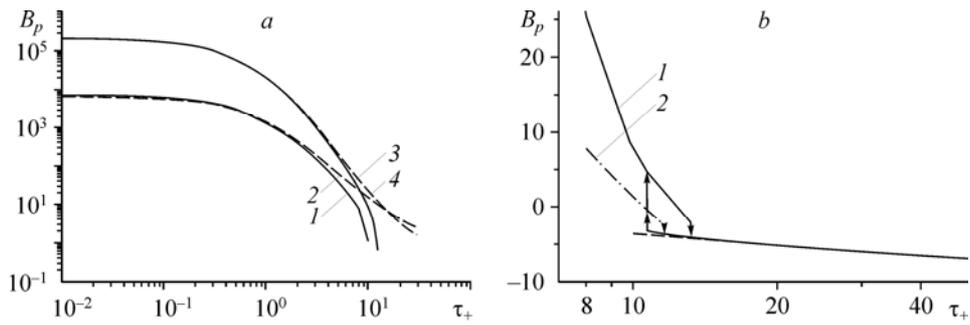


Рис. 1. Зависимость  $B_p(\tau_+, Sc_B)$  от  $\tau_+$  для малоинерционных (а) и инерционных (б) частиц. а — расчет и асимптотика (8) для  $Sc_B = 10^4$  (1, 2),  $10^6$  — (3, 4), б — расчет для  $Sc_B = 10^4, 10^6$  (1, 2), пунктирная линия — асимптотика (9).

зис численного решения в интервале  $\tau_{cr1} < \tau_+ < \tau_{cr2}$ , где  $\tau_{cr1} = 10,7$ ,  $\tau_{cr2} = 11,65$  для частиц с  $Sc_B = 10^4$  и  $\tau_{cr1} = 10,7$ ,  $\tau_{cr2} = 13,2$  для частиц с  $Sc_B = 10^6$  (рис. 1, б). В интервале  $\tau_{cr1} < \tau_+ < \tau_{cr2}$  для одного значения  $\tau_+$  можно получить два устойчивых численных решения задачи (11–19), (20, 23), отличающихся между собой начальным приближением для нормального напряжения Рейнольдса частиц  $\sigma_{p0}^+(y_+)$ . При задании в качестве начального приближения для  $\sigma_{p0}^+$  локально-равновесного распределения ([2, 10])

$$\sigma_{p0}^+(y_+) = \sigma_{pe}^+(y_+) = f_u \sigma_+(y_+) + (1/Sc_B \tau_+) \quad (24)$$

получается решение, соответствующее верхним кривым рис. 1, б. При задании начального приближения в виде

$$\sigma_{p0}^+(y) = (1 - \alpha) \sigma_{pe}^+(y) + \alpha \sigma_{pe}^+(\infty), \quad (25)$$

где  $\alpha \sim 0,2$ , получается решение, соответствующее нижней кривой рис. 1, б.

Начальные приближения (24, 25) отличаются друг от друга величиной нормального напряжения Рейнольдса частиц на стенке: для (24) она близка к нулю, а для (25) отличается от нуля. Возможно, именно это отличие является решающим для выбора одного из двух возможных численных решений, однако для окончательного подтверждения этого предположения требуется более глубокий анализ, выходящий за рамки данной работы. Характер кривых на рис. 1, б позволяет предположить, что в задаче (11–19, 20, 23) имеет место бифуркация решения.

В пользу этого предположения также свидетельствует поведение расчетных распределений напряжений Рейнольдса дисперсной фазы, приведенные на рис. 2. Из рис. 2, а видно, что при  $\tau_+ < \tau_{cr2}$  распределение нормальных напряжений Рейнольдса частиц близко к равновесному (24). Вблизи стенки напряжение Рейнольдса в соответствии с (24) стремится к величине, определяемой броуновскими флуктуациями:

$$\sigma_{pe}^+(0) = (Sc_B \tau_+)^{-1}. \quad (26)$$

При значениях  $\tau_+ > \tau_{cr2}$  и выше нормальные напряжения Рейнольдса частиц в глубине вязкого подслоя ( $y_+ < 1$ ) резко возрастают от весьма малых величин (26) до величин  $\sim 0,1$ , при этом их величина не зависит от числа Шмидта броуновской диффузии. На рис. 2, б показано стремление распределения нормальных напряжений

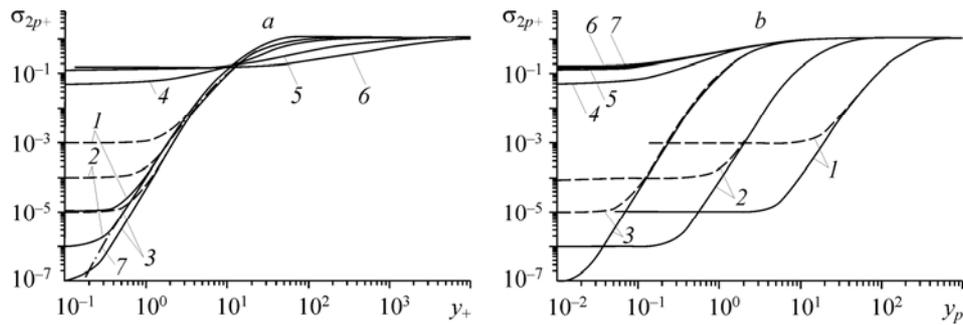


Рис. 2. Распределения нормальных напряжений Рейнольдса частиц.

$a$  — зависимость от  $y_+$ :  $\tau_+ = 0,1$  (1), 1 (2), 10 (3), 25 (4), 100 (5), 500 (6), нормальные напряжения Рейнольдса несущей фазы (7),  $b$  — зависимость от  $y_p$ :  $\tau_+ = 0,1$  (1), 1 (2), 10 (3), 25 (4), 100 (5), 500 (6), 7 — асимптотика (27). Сплошные линии —  $Sc_B = 10^6$ , пунктирные линии —  $Sc_B = 10^4$ .

Рейнольдса частиц при росте параметра инерционности  $\tau_+$  к полученному в [12] закону подобия для распределения напряжений Рейнольдса инерционных частиц  $\sigma_p^+ = T_{22}(y_p)$ , где  $y_p = y_+/\tau_+$ ,  $T_{22}$  — универсальная функция, хорошо аппроксимируемая выражением

$$T_{22}(y_p) = \frac{0,16 + 0,46y_p + 0,022y_p^2}{1 + 0,48y_p + 0,02y_p^2}. \quad (27)$$

Бифуркационный характер зависимости величины нормальных напряжений Рейнольдса частиц на стенке  $\sigma_{pw}^+ = \sigma_p^+(0, \tau_+, Sc_B)$  от параметра инерционности демонстрирует рис. 3. Кривые зависимости  $\sigma_{pw}^+$  от  $\tau_+$  состоят из двух частей: нижней ветви  $\tau_+ < \tau_{cr2}$ , которая практически совпадает с квазиравновесным значением (26) и верхней ветви  $\tau_+ > \tau_{cr1}$  (рис. 3,  $a$ ). Характерной особенностью верхней ветви является независимость решения от коэффициента броуновской диффузии в соответствии с соображениями, приведенными в [12]. При больших значениях  $\tau_+$  в соответствии с (27) величина  $\sigma_{pw}^+$  стремится к предельному значению, равному  $T_{22}(0) \approx 0,16$ . Более подробно окрестность точки бифуркации показана на рис. 3,  $b$ . Нижняя ветвь кривых соответствует численному решению с начальными условиями (24), верхняя ветвь — с начальными условиями (25).

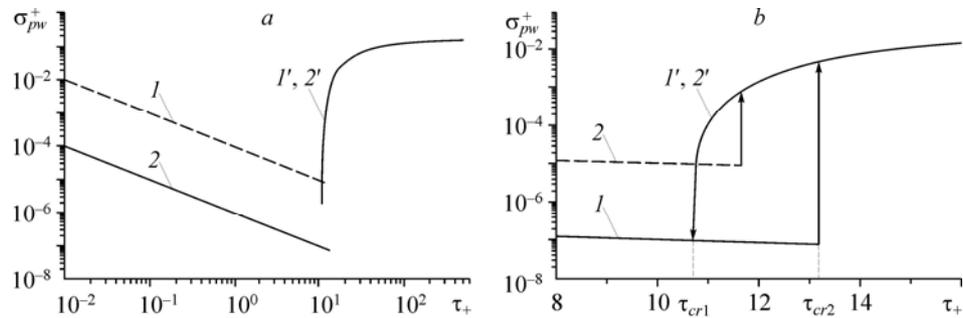


Рис. 3. Зависимость нормального напряжения Рейнольдса частиц на стенке от параметра инерционности. Распределения нормальных напряжений Рейнольдса частиц.

Общий план ( $a$ ), окрестность точки бифуркации ( $b$ ).  $Sc_B = 10^4$  (1, 1'),  $10^6$  (2, 2').

В окрестности точки бифуркации также наблюдается резкое изменение концентрации частиц в вязком подслое. На рис. 4, *a* приведены профили концентрации, обезразмеренной в единицах стенки (3), для тех же значений параметра инерционности, что и на рис. 2. При  $\tau_+ > 1$  отчетливо проявляется эффект аккумуляции частиц в вязком подслое, вызванный влиянием силы турбофореза. Согласно результатам [12] для малоинерционных частиц  $\tau_+ \ll 10$  максимум пристенного пика концентрации частиц должен располагаться в области  $y_+ = O(\text{Sc}_B^{-1/4})$  и иметь величину  $\Phi_+ = O(\text{Sc}_B^{3/4})$ . В соответствии с этим на рис. 4, *a* величина пристенного максимума концентрации растет с увеличением числа Шмидта броуновской диффузии, а его местоположение сдвигается ближе к стенке. Как показано в численных расчетах по аналогичной модели полной задачи динамики частиц в канале при отсутствии броуновской диффузии ( $\text{Sc}_B = \infty$ ) [2, 20], профиль концентрации вблизи стенки становится сингулярным ( $\Phi_+ \rightarrow \infty$ ), поэтому учет броуновской диффузии служит в данном случае полезным регуляризирующим фактором для численного решения. Как видно из рис. 4, *a*, эффект аккумуляции наиболее сильно выражен при значении параметра инерционности  $\tau_+ = 10$ , ближайшем к точке бифуркации. На рис. 4, *b* показано, что концентрация частиц при  $\tau_+ \rightarrow \infty$  стремится к полученному в [12] закону подобия  $\Phi_+ = \Phi_p(y_p)$ , где  $\Phi_p$  — универсальная функция, хорошо аппроксимируемая выражением:

$$\Phi_+ = \Phi_p(y_p) = 2,02 \ln(2 + y_p) + 1,23 + 0,5 \exp(-7y_p). \quad (28)$$

При  $y_p > 7$  или  $y_+ > 7\tau_+$  выражение (28) практически совпадает с асимптотикой (4, 9), поэтому расстояние до стенки  $y_+ = 7\tau_+$  можно считать границей, начиная с которой частицы ведут себя, как безинерционные.

Объяснить наблюдаемую в расчетах перестройку решения можно с помощью соображений, опирающихся на понятие пути торможения частицы в вязком подслое [12]. Путь торможения  $l_p = v_\tau \tau_p$  равен расстоянию, пройденному в неподвижной окружающей среде частицей с начальной скоростью  $v_\tau$ . Область вязкого подслоя характеризуется малостью поперечных пульсаций скорости несущей фазы, а скорость частиц, вовлеченных в турбулентное движение во внешней области, имеет порядок  $v_\tau$ , поэтому путь торможения представляет собой характерную

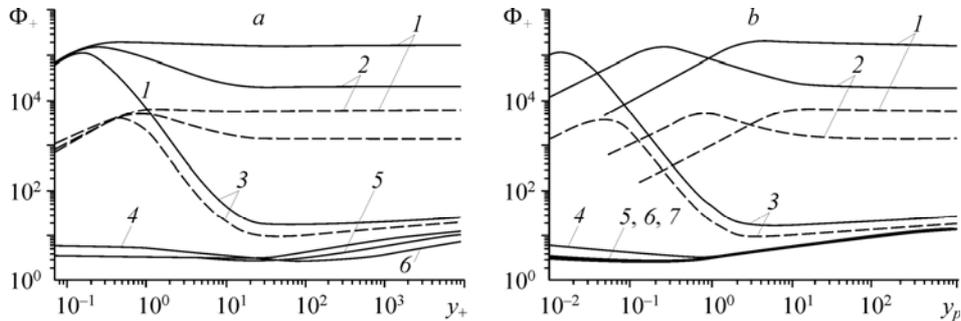


Рис. 4. Распределения концентрации частиц. Обозначения те же, что и на рис. 2, 7 — асимптотика (28).

глубину, на которую внедряются в вязкий подслой частицы из внешней области. Соотношение пути торможения и толщины вязкого подслоя играет важную роль для понимания динамики частиц в вязком подслое и, в частности, процессов аккумуляции частиц. В единицах стенки путь торможения совпадает с параметром инерционности  $\tau_+$ , а толщина вязкого подслоя  $l_{v+}$  имеет порядок 10. Для малоинерционных частиц с  $\tau_+ \ll 10$  путь торможения частиц много меньше как толщины вязкого подслоя, так и размеров турбулентных вихрей, и частицы в основном пассивно следуют за несущей фазой, слабо проникая в вязкий подслой из внешней области. При этом пульсации частиц в окрестности стенки малы и определяются броуновскими флуктуациями (26), а скорости осаждения невелики. Для инерционных частиц с  $\tau_+ \gg 10$  путь торможения намного превышает толщину вязкого подслоя и вовлеченные в турбулентное движение частицы проникают в вязкий подслой вплоть до стенки, благодаря чему пульсации скоростей частиц вблизи стенки и скорость осаждения заметно возрастают. Наиболее интересна ситуация в области промежуточных значений  $\tau_+ \sim 10$ , когда частицы имеют достаточную инерцию для того, чтобы проникнуть в вязкий подслой, но недостаточно длинный путь торможения для того, чтобы достичь стенки. В этом случае происходит накопление (аккумуляция) потерявших скорость частиц в вязком подслое, но перенос и осаждение частиц происходят в основном за счет броуновской диффузии и турбофореза.

Наблюдаемая в расчетах перестройка решения в области  $\tau_{cr1} < \tau_+ < \tau_{cr2}$  согласуется с приведенными выше качественными соображениями, однако бифуркационный характер перестройки представляется достаточно необычным явлением для процессов переноса в развитом турбулентном течении. Тем не менее, наличие бифуркации закритического типа (о докритических и закритических бифуркациях см. [24]) в решении уравнений модели переноса напряжений Рейнольдса частиц в вязком подслое было показано в [2, 10] с помощью приближенного аналитического решения задачи в упрощенной постановке со ступенчатым распределением напряжений Рейнольдса несущей фазы. Похожее явление закритической бифуркации для структурной функции — второго момента относительной скорости движения частиц — при некотором критическом значении параметра инерционности обнаружено в [25] при решении задачи об относительной дисперсии и кластеризации частиц в однородной изотропной турбулентности на основе модели замыкания второго порядка. Поведение нормальных напряжений Рейнольдса частиц на рис. 3, *b* имеет сходство с бифуркацией докритического типа к конечно-амплитудному состоянию (точка  $\tau_+ = \tau_{cr2}$ ), встречающейся во многих задачах устойчивости гидродинамических течений [24] и сопровождающейся гистерезисом решения. Можно предполагать, что возникновение вместо закритической бифуркации в численном решении задачи (11–19, 20, 23) бифуркации докритического типа и гистерезиса связано с нарушениями симметрии, вносимыми конечно-разностной дискретизацией, хотя необходимо отметить, что какой-либо существенной зависимости результатов от размера шага сетки в расчетах не наблюдалось. Исследование этого вопроса выходит за рамки данной работы, но представляет интерес для разработки математических моделей и численных алгоритмов моделирования турбулентных течений с инерционными частицами, способных избежать описанного выше нежелательного явления гистерезиса численного решения.

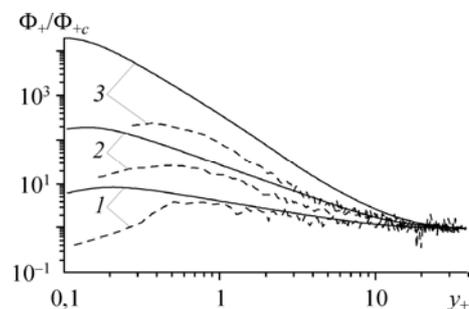
Необходимо отметить, что в ряде работ значение параметра инерционности  $\tau_+ \sim 10$  упоминается в качестве границы диффузионно-импактного режима осаждения (diffusion-impaction regime) и режима инерционного замедления (inertia-

moderated regime) [26]. Существование бифуркации решения задачи (11–19, 20, 23) в районе  $\tau_+ = \tau_{cr1}, \tau_{cr2}$  можно трактовать как наличие не плавной, а резкой границы между этими двумя режимами.

Как упоминалось выше в п. 2, в настоящее время отсутствуют экспериментальные данные по профилям концентраций и пульсаций скорости частиц в турбулентных дисперсных потоках в каналах. В качестве альтернативы физическому эксперименту в последнее время в теории турбулентных дисперсных течений активно предлагается численный эксперимент, основанный на методе DNS и лагранжевом траекторном описании дисперсной фазы [11]. Однако имеющиеся DNS расчеты турбулентных дисперсных течений с осаждающимися частицами обладают двумя недостатками. Первый связан с низкими числами Рейнольдса моделируемых течений  $R_+ \sim 125 \div 300$ , при которых турбулентность несущей фазы еще нельзя назвать развитой для уверенного применения изложенной выше асимптотической теории. В частности, один из ключевых параметров задачи — распределение нормальных напряжений Рейнольдса несущей фазы — при таких числах Рейнольдса на 15–20 % ниже, чем предельное распределение (19) для  $R_+ \rightarrow \infty$ . Второй серьезный недостаток — во всех имеющихся DNS расчетах не был достигнут статистически стационарный режим для концентрации частиц, особенно в области вязкого подслоя [17–19]. Поэтому сравнение с данными DNS моделирования можно проводить лишь с целью подтвердить качественные тенденции той или иной модели, не надеясь на количественное соответствие.

На рис. 5, 6 представлены сравнения рассчитанных профилей концентрации частиц с имеющимися в литературе данными DNS в плоском канале с  $R_+ = v_\tau h / \nu = 125$  [17] (рис. 5) и  $R_+ = 150$  (рис. 6) [19]. На этих рисунках расчетная концентрация отнесена к концентрации в центре канала  $\Phi_{c+}$ , т. е. при  $y_+ = R_+$ , рассчитываемой по (6). В целом можно отметить качественное соответствие данных расчета с данными DNS при  $\tau_+ < 10$ . При низком числе Рейнольдса  $R_+ \sim 150$  для частиц с  $\tau_+ > 10$  влиянием инерции на частицы во внешней области течения пренебречь нельзя, поэтому расчет по асимптотической теории расходится с результатами DNS. Стоит отметить и расхождения результатов DNS [17] и [19] между собой. В работе [17] соответствующий максимальному эффекту аккумуляции частиц наибольший пик их концентрации вблизи стенки наблюдался при  $\tau_+ = 10$ , что хорошо согласуется с результатами настоящей работы (см. рис. 4) и с результатами работ [2, 4, 20]. В DNS [19] максимальный эффект аккумуляции частиц наблюдается при  $\tau_+ = 25$ . Кроме того, в [19] даже при  $\tau_+ = 125$  величина нормальной к стенке компоненты пульсационной скорости частиц была равна нулю, что противоречит результатам других авторов [27–29]. Причины такого расхождения не очень понятны и, вероятно, связаны со слишком коротким временем расчета в [19] и отсутствием стационарной статистики концентрации частиц.

Рис. 5. Распределения концентрации частиц, отнесенной к концентрации на оси канала. Данные DNS [17] — пунктирные линии, расчет — сплошные линии,  $\tau_+ = 0,1$  (1), 3 (2), 10 (3),  $Sc_B = 1,84 \cdot 10^6$  (1),  $3,30 \cdot 10^6$  (2),  $6,15 \cdot 10^6$  (3).



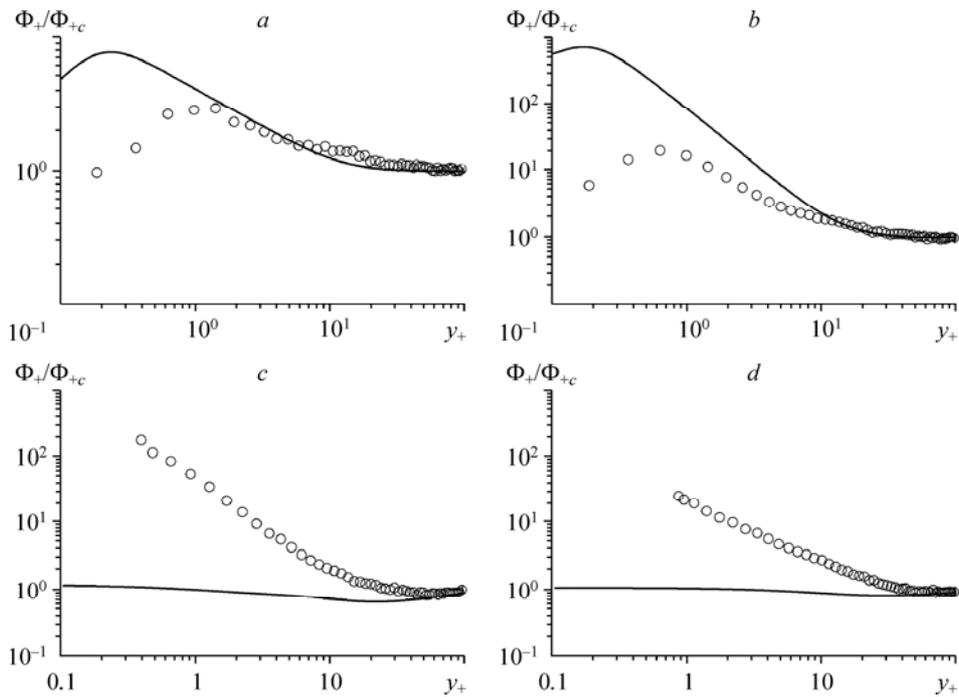


Рис. 6. Распределения концентрации частиц, отнесенной к концентрации на оси канала. Данные DNS [19] ( $Sc_B = \infty$ ) — символы, расчет при  $Sc_B = 10^6$ ,  $\tau_+ = 1$  (a),  $\tau_+ = 5$  (b),  $\tau_+ = 25$  (c),  $\tau_+ = 125$  (d) — сплошные линии.

На рис. 7, a приведена скорость осаждения, рассчитанная по (7) с использованием (П. 8, 9) (см. Приложение) для ряда возрастающих чисел Рейнольдса  $R_+$ . Так же, как и для аддитивного коэффициента  $B_p(\tau_+, Sc_B)$ , в зависимости скорости осаждения от параметра инерционности  $\tau_+$  наблюдается гистерезис в диапазоне  $\tau_{cr1} < \tau_+ < \tau_{cr2}$ . Кривую осаждения можно разделить на две ветви: левую ( $\tau_+ < \tau_{cr2}$ ), соответствующую малым, квазиравновесным значениям нормальных напряжений Рейнольдса частиц на стенке (кривые 1, 2 на рис. 3, b), и правую ( $\tau_{cr1} < \tau_+$ ), для которой нормальные напряжения Рейнольдса частиц на стенке заметно отличны от нуля (кривые 1', 2' на рис. 3, b). При этом левая ветвь кривой осаждения при  $\tau_+ < 10$  практически не зависит от  $R_+$  и от геометрии течения (плоский канал или круглая труба) и определяется величиной числа Шмидта броуновской диффузии  $Sc_B$ . Правая ветвь не зависит от  $Sc_B$  и более чувствительна к геометрии течения, хотя с ростом числа Рейнольдса зависит от нее слабее. Ниже будет показано, что граница применимости рассматриваемой асимптотической теории соответствует значению  $\tau_+ \sim 0,03R_+$ , поэтому не все части представленных кривых являются физически значимыми. Так, например, для числа Рейнольдса  $R_+ = 150$ , характерного для большинства современных расчетов методом DNS [11, 17–19], использовать предложенную теорию можно лишь до значений  $\tau_+ \sim 5$ . Для сравнения на рис. 7, a приведена эмпирическая корреляция [30]

$$V_d^+ = 3,25 \cdot 10^{-4} \tau_+^2, \quad 0,2 < \tau_+ < 22,9,$$

$$V_d^+ = 0,17, \quad 22,9 < \tau_+ < 14827, \quad (29)$$

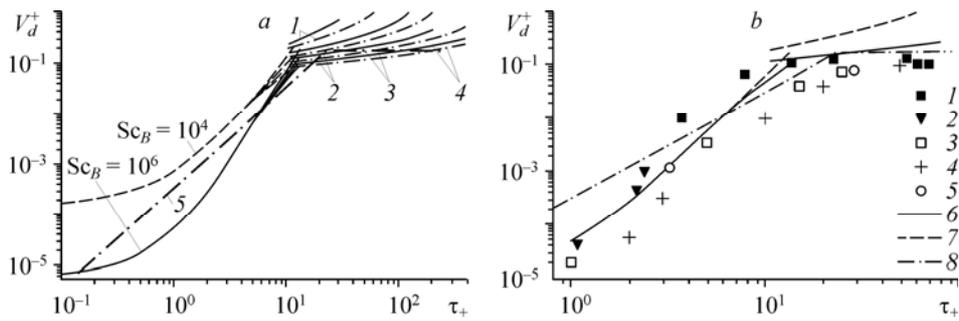


Рис. 7. Зависимость скорости осаждения от параметра инерционности частиц.

*a* — расчет:  $R_+ = 150$  (1), 500 (2), 1500 (3), 5000 (4), эмпирическая корреляция (29) (5), сплошная и пунктирная линии — круглая труба (6, 7), штрих-пунктирная линия — плоский канал (8); *b* — сплошная линия — расчет для круглой трубы  $Sc_B = 10^6$ ,  $R_+ = 1300$ , пунктирная линия — расчет для плоского канала  $Sc_B = 10^6$ ,  $R_+ = 150$ , штрих-пунктирная линия — эмпирическая корреляция (29), 1 — данные [32] ( $Sc_B = 0,8 \div 4 \cdot 10^6$ ,  $R_+ = 1300$ ), 2 — данные [31] ( $Sc_B = 1,3 \cdot 10^6$ ,  $R_+ = 400 \div 1300$ ), 3 — данные DNS [19] ( $Sc_B = \infty$ ,  $R_+ = 150$ ), 4 — данные DNS [17] ( $Sc_B = 0,18 \div 1,4 \cdot 10^7$ ,  $R_+ = 125$ ), 5 — данные DNS [18] ( $Sc_B = \infty$ ,  $R_+ = 337$ ).

полученная в результате обобщения практически всех известных к тому времени экспериментальных данных.

Как видно из рис. 7, *a*, хотя результаты расчетов по асимптотической теории и корреляция (29) сравнительно близки друг к другу, они принципиально отличаются друг от друга в области диффузионно-импактного режима осаждения  $0,1 < \tau_+ < 10$ . Согласно результатам [12] и настоящей работы, скорость осаждения в диффузионно-импактном режиме зависит от коэффициента броуновской диффузии, что не отражено в (29). По-видимому, именно неучет броуновской диффузии наряду с сильным влиянием плохо контролируемой в эксперименте полидисперсности частиц [17] приводит к значительному разбросу экспериментальных данных по скорости осаждения частиц в диффузионно-импактном режиме, обработанных в координатах  $V_d^+ = V_d^+(\tau_+)$  [30]. В связи с этим результаты расчетов в области диффузионно-импактного режима более удобно сравнивать с данными DNS, свободных от влияния полидисперсности.

На рис. 7, *b* результаты расчетов скорости осаждения для частиц с  $Sc_B = 10^6$  сравниваются с данными DNS [17–19] и с экспериментальными данными [31, 32]. Предсказываемая моделью (7, 11–19, 20, 23) зависимость  $V_d^+(\tau_+)$  удовлетворительно согласуется как с экспериментальными данными [32], полученными для достаточно большого числа Рейнольдса  $R_+ = 1300$ , так и с данными DNS. Однако в силу малости числа Рейнольдса ( $R_+ = 125 \div 337$ ) в DNS область значений  $\tau_+ \sim 5 \div 10$ , как упоминалось выше, находится на границе применимости рассматриваемой теории, основанной на слабом влиянии инерции частиц во внешней области. При малых  $R_+$  влияние инерции начинает замедлять пульсационное движение частиц во внешней области, что проявляется в наблюдаемом на рис. 7, *b* занижении данных DNS по сравнению с расчетом по (7).

**5. ЗАКОН ОСАЖДЕНИЯ И ПРИСТЕНОЧНАЯ ФУНКЦИЯ  
ДЛЯ КОНЦЕНТРАЦИИ ЧАСТИЦ**

Полученные в результате решения задачи (11–19, 20, 23) зависимости для аддитивного коэффициента  $B_p(\tau_+, Sc_B)$  в диапазоне чисел Шмидта броуновской диффузии  $10^3 < Sc_B < 10^9$  хорошо аппроксимируются выражениями:

$$B_p(\tau_+, Sc_B) = Sc_B^{0,75-\tau_+/(5+\tau_+)} \Psi(\tau_+, \ln Sc_B), \quad \tau_+ < \tau_{cr2}, \quad (30)$$

$$B_p(\tau_+, Sc_B) = 1 - 2,024 \ln \tau_+, \quad \tau_+ > \tau_{cr1}, \quad (31)$$

где

$$\Psi(\tau_+, \ln Sc_B) = 6,8 \left[ 1 - (0,16 - 6,5 \cdot 10^{-3} \ln Sc_B) \tau_+ + 8 \cdot 10^{-3} \tau_+^2 - 7,5 \cdot 10^{-4} \tau_+^3 \right].$$

Выражения (7), (30), (31) представляют собой аппроксимацию закона осаждения. Используя (П. 8, 9), а также основанную на законе Блазиуса аппроксимацию закона трения  $\sqrt{\lambda/8} = R_+^{-1/7}/7$  [33], можно записать аппроксимацию закона осаждения для диффузионно-импактного режима  $\tau_+ < \tau_{cr2}$ :

$$V_d^+ = \left[ Sc_B^{0,75-\tau_+/(5+\tau_+)} \Psi(\tau_+, \ln Sc_B) + 2,024 \ln R_+ - 2,2 + 0,9 R_+^{-1/7} \right]^{-1} —$$

для плоского канала,

(32)

$$V_d^+ = \left[ Sc_B^{0,75-\tau_+/(5+\tau_+)} \Psi(\tau_+, \ln Sc_B) + 2,024 \ln R_+ - 3,3 + 1,1 R_+^{-1/7} \right]^{-1} — \text{ для круглой трубы}$$

и для инерционного режима  $\tau_+ > \tau_{cr1}$ :

$$V_d^+ = \left( 2,024 \ln \frac{R_+}{\tau_+} - 1,2 + 0,9 R_+^{-1/7} \right)^{-1} — \text{ для плоского канала,} \quad (33)$$

$$V_d^+ = \left( 2,024 \ln \frac{R_+}{\tau_+} - 2,3 + 1,1 R_+^{-1/7} \right)^{-1} — \text{ для круглой трубы.}$$

Полученные результаты для концентрации частиц можно использовать для постановки граничных условий при численных расчетах турбулентных газодисперсных потоков с помощью метода пристеночных функций [34]. В этом методе, основанном на упомянутой выше теории подобия пристенной турбулентности, граничные условия для величин потока ставятся не на стенке, а в пределах логарифмического слоя  $1 \ll y_+ \ll R_+$  или, по более точным оценкам,  $30 < y_+ < 0,2R_+$ . Область применимости логарифмического закона для концентрации частиц (4) внутри логарифмического подслоя, как было показано выше в п.4, находится при  $y_+ > 7\tau_+$ . Поэтому удобно располагать ближайший к стенке расчетный узел на таком расстоянии  $y_{1+}$ , что  $\max\{7\tau_+, 30\} < y_{1+} < 0,2R_+$ . В этом случае выражение (4) с учетом (30, 31) можно использовать в качестве граничного условия для концентрации частиц. Область  $\max\{7\tau_+, 30\} < y_{1+} < 0,2R_+$  существует только при условии  $\tau_+ < 0,03R_+$ . При  $\tau_+ > 0,03R_+$  влияние инерции частиц проникает во внешнюю область течения, что приводит к уменьшению вовлечения частиц в турбулентное движение и вызванному в связи с этим снижению скорости осаждения (с чем и связано название: режим инерционного замедления).

В области  $y > y_{1+}$  частицы ведут себя, как безинерционные [12] и для статистических моментов пульсаций скорости частиц с хорошей точностью можно использовать квазиравновесные соотношения [2,5]. Для нахождения концентрации частиц в области  $y > y_{1+}$  успешно используются равновесные эйлеровы модели для малоинерционных частиц, например, диффузионно-инерционная модель [34–37]. Таким образом, можно корректно моделировать течения инерционных частиц с параметром инерционности  $\tau_+ < 0,03R_+$  с помощью равновесных эйлеровых моделей, используя граничное условие (4), в котором через аддитивный коэффициент  $B_p(\tau_+, Sc_B)$  учтены эффекты инерционности частиц. Так, например, многие практически значимые газодисперсные потоки в каналах используются при числах Рейнольдса  $Re = 20000 \div 1000000$  ( $R_+ = 600 \div 20000$ ). Использовать равновесную эйлерову модель для расчета таких течений можно для частиц с  $\tau_+ = 20 \div 500$ , т. е. практически вплоть до верхней границы применимости модели точечных частиц без гравитации (1) [12]. Приведенные соображения объясняют успешное применение диффузионно-инерционной модели с пристеночными функциями для расчетов распространения и осаждения частиц в различных турбулентных течениях [34–37].

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе теории подобия пристенных турбулентных газодисперсных течений [12] и дифференциальной модели переноса напряжений Рейнольдса частиц [2] рассмотрена задача осаждения частиц из турбулентного газодисперсного потока в каналах при значениях параметра инерционности  $\tau_+ < 0,03R_+$ . Поскольку влияние инерции частиц с такими параметрами инерционности не выходит за пределы пристенной области (вязкий подслои + логарифмический слой), то во внешней области потока скорость частиц практически совпадает со скоростью несущей фазы, а напряжения Рейнольдса дисперсной фазы во внешней области в первом приближении совпадают с напряжениями Рейнольдса несущей фазы. Для концентрации частиц во внешней области справедливы известные законы подобия для профилей концентрации и температуры в пристенных турбулентных течениях [14, 15]. Задача нахождения скорости осаждения частиц сводится к нахождению аддитивного коэффициента в логарифмическом законе (4), который находится из решения одномерной задачи динамики частиц в вязком подслое.

Численное решение задачи показало наличие резкой границы между двумя режимами осаждения: диффузионно-импактным и режимом инерционного замедления. Диффузионно-импактный режим наблюдается при значениях параметра инерционности  $\tau_+$ , меньших критического значения  $\tau_{cr2}$ , величина которого зависит от числа Шмидта броуновской диффузии ( $\tau_{cr2} = 11,65$  для  $Sc_B = 10^4$  и  $\tau_{cr2} = 13,2$  для  $Sc_B = 10^6$ ), при этом характеризуется определяемыми броуновской диффузией малыми квазиравновесными величинами нормальных напряжений Рейнольдса частиц на стенке и малыми скоростями осаждения. Режим инерционного замедления наблюдается при значениях параметра инерционности, больших критического значения  $\tau_{cr1}$ , величина которого в настоящих расчетах ( $\tau_{cr1} = 10,7$ ) оказалась не зависящей от  $Sc_B$ , и отличается заметными величинами нормальных напряжений Рейнольдса частиц на стенке ( $\sim 0,1$  от их значения в ядре потока) и заметно большими скоростями осаждения. Перестройка решения от одного режима к другому имеет характер бифуркации, существование которой было

показано ранее в [2, 10]. Однако в отличие от обнаруженной в [2,10] закритической бифуркации при одном критическом значении параметра инерционности, в численном решении, полученном в настоящей работе, имеет место докритическая бифуркация, сопровождаемая гистерезисом решения в сравнительно небольшом диапазоне  $\tau_{cr1} < \tau_+ < \tau_{cr2}$ . Докритическая бифуркация наблюдается также и в зависимости скорости осаждения частиц от параметра инерционности. Появление докритической бифуркации вместо закритической может быть связано как с особенностями используемой модели переноса напряжений Рейнольдса частиц, так и с эффектами конечно-разностной дискретизации задачи и требует более подробного исследования. В частности, представляло бы большой интерес подтверждение явления бифуркации статистических характеристик дисперсной фазы в численном моделировании методом DNS задачи осаждения частиц с помощью лагранжева подхода. При этом необходимо учитывать, что в отличие от рассмотренного выше решения, справедливого в пределе больших чисел Рейнольдса, критическое значение параметра инерционности в точке бифуркации для задачи с характерным для DNS невысоким числом Рейнольдса может, вообще говоря, зависеть от числа Рейнольдса.

Показано что в диффузионно-импактном режиме при приближении к точке бифуркации наблюдается наиболее сильный эффект аккумуляции частиц в вязком подслое. С помощью аппроксимации численного решения получены корреляции для скорости осаждения частиц в диффузионно-импактном режиме и режиме инерционного замедления для газодисперсных течений в плоском канале и круглой трубе, хорошо согласующиеся с имеющимися экспериментальными данными и данными DNS расчетов. Получены выражения для граничных условий типа пристеночных функций, связывающих концентрацию частиц и поток осаждающихся на стенку частиц, позволяющие использовать равновесные эйлеровы модели турбулентного переноса малоинерционных частиц для расчета частиц с параметром инерционности  $\tau_+ < 0,03R_+$ , что при достаточно больших числах Рейнольдса может достигать значения нескольких сотен.

Автор благодарит Л.И. Зайчика за внимание к данной работе и полезные обсуждения.

## *Приложение*

Для вычисления коэффициента осаждения необходимо определить среднюю массовую концентрацию частиц, определяемую соотношением:

$$\Phi_m = \frac{(k+1)}{R^{k+1}U_m} \int_0^R (R-y)^k U(y) \Phi(y) dy, \quad (\text{П. 1})$$

где  $k = 0,1$  для плоского канала и трубы соответственно,  $U$  — продольная скорость несущей фазы,  $U_m$  — среднерасходная скорость, вычисляемая по формуле:

$$U_m = \frac{(k+1)}{R^{k+1}} \int_0^R (R-y)^k U(y) dy. \quad (\text{П. 2})$$

Как показано в [15], основной вклад в интегралы (П. 1, 2) дает внешняя область, а вкладом тонкого вязкого подслоя можно пренебречь. Поэтому для вычисления (П. 1, 2) можно использовать выражение (5) и закон дефекта скорости Кармана [15]:

$$U_+ = U_{c+} - F(\eta), \quad (\text{П. 3})$$

где  $U_{c+}$  — скорость на оси канала в единицах стенки.

Из (П. 2, 3) следует, что

$$U_{m+} = U_{c+} - \beta, \quad \beta = (k+1) \int_0^1 (1-\eta)^k F(\eta) d\eta, \quad (\text{П. 4})$$

$$\Phi_{m+} = \Phi_{c+} - \beta_p + \beta_1 U_{m+}^{-1} = \Phi_{c+} - \beta_p + \beta_1 \sqrt{(\lambda/8)},$$

$$\beta_1 = (k+1) \int_0^1 (1-\eta)^k F(\eta) F_p(\eta, 0) d\eta - \beta \beta_p, \quad (\text{П. 5})$$

где  $\lambda = 8(\nu_\tau/U_m)^2$  — коэффициент сопротивления.

Для вычисления постоянных  $\beta$ ,  $\beta_p$ ,  $\beta_1$  можно воспользоваться либо экспериментальными данными, либо подходящей обобщающей их эмпирической формулой. В качестве последних можно выбрать рекомендованные в [15] выражения:

$$F(\eta) = -2,44 \ln \eta + 0,68 - 4,48 \eta^2 + 3,8 \eta^3 \quad \text{— для плоского канала,} \quad (\text{П. 6})$$

$$F(\eta) = -2,5 \ln \eta + 0,8 - 4,9 \eta^2 + 4,1 \eta^3 \quad \text{— для круглой трубы.} \quad (\text{П. 7})$$

Подставляя (5), (П. 6), (П. 7) в (П. 4), (П. 5), получим:

$$\beta = 2,6, \quad \beta_p = 2,2, \quad \beta_1 = 6 \quad \text{— для плоского канала,} \quad (\text{П. 8})$$

$$\beta = 4,1, \quad \beta_p = 3,3, \quad \beta_1 = 7,6 \quad \text{— для круглой трубы.} \quad (\text{П. 9})$$

Учитывая связь безразмерной концентрации на оси и коэффициента осаждения  $V_d^+ = \Phi_{m+}^{-1}$ , из (6) и (П. 4) следует закон осаждения (7).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Guha A.** Transport and deposition of particles in turbulent and laminar flows // *Ann. Rev. Fluid Mechanics*. 2008. Vol. 40. P. 311–341.
2. **Зайчик Л.И., Алипченков В.М.** Статистические модели движения частиц в турбулентной жидкости. М.: Физматлит, 2007. 308 с.
3. **Shin M., Lee J.W.** Memory effect in the Eulerian particle deposition in a fully developed turbulent channel flow // *J. Aerosol Sci.* 2001. Vol. 32. P. 675–693.
4. **Shin M., Kim D.S., Lee J.W.** Deposition of inertia-dominated particles inside a turbulent boundary layer // *Inter. J. Multiphase Flow*. 2003. Vol. 29. P. 893–926.
5. **Derevich I.V.** Statistical modelling of mass transfer in turbulent two-phase dispersed flows. 1. Model development // *Inter. J. Heat and Mass Transfer*. 2000. Vol. 43, No. 19. P. 3709–3723.
6. **Derevich I.V.** Statistical modelling of mass transfer in turbulent two-phase dispersed flows. 2. Calculation results // *Inter. J. Heat and Mass Transfer*. 2000. Vol. 43, No. 19. P. 3725–3734.
7. **Caporali M., Tampieri F., Trombetti F., Vittori O.** Transfer of particles in nonisotropic air turbulence // *J. Atmos. Sci.* 1975. Vol. 32. P. 565–568.
8. **Reeks M.W.** The transport of discrete particles in inhomogeneous turbulence // *J. Aerosol Sci.* 1983. Vol. 14, No. 6. P. 729–739.
9. **Young J.B., Leeming A.D.** A theory of particle deposition in turbulent pipe flow // *J. Fluid Mech.* 1997. Vol. 340. P. 129–159.
10. **Гусев И.Н., Зайчик Л.И.** Моделирование динамики частиц в пристеночной области газодисперсного турбулентного потока // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа*. 1991. № 1. С. 50–60.
11. **Soldati A., Marchioli S.** Physics and modelling of turbulent particle deposition and entrainment: Review of a systematic study // *Inter. J. Multiphase Flow*. 2009. Vol. 35, No. 9. P. 827–839.
12. **Сиковский Д.Ф.** Закономерности осаждения частиц из турбулентного газодисперсного потока в каналах // *Известия РАН. Механика жидкости и газа*. 2010. № 1. С. 84–95
13. **Townsend A.A.** *The Structure of Turbulent Shear Flow*. Cambridge: Univ. Press, 1956. 315 p.
14. **Монин А.С., Яглом А.М.** *Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Ч. 1.* М.: Наука, 1965. 639 с.

15. **Кадер Б.А., Яглом А.М.** Законы подобия для пристенных турбулентных течений // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНТИ, 1980. Т. 15. С. 81–155.
16. **Lundgren T.S.** Asymptotic analysis of the constant pressure turbulent boundary layer // Phys. Fluids. 2007. Vol. 19, No. 5. P. 055105–1–7
17. **Chen M., McLaughlin J.B.** A new correlation for the aerosol deposition rate in vertical ducts // J. Colloid and Interface Sci. 1995. Vol. 169. P. 437–455.
18. **Marchioli C., Giusti M., Salvetti M.V., Soldati A.** Direct numerical simulation of particle wall transfer and deposition in upward turbulent pipe flow // Inter. J. Multiphase Flow. 2003. Vol. 29, No. 6. P. 1017–1038.
19. **Marchioli C., Picciotto M., Soldati A.** Influence of gravity and lift on particle velocity statistics and transfer rates in turbulent vertical channel flow // Inter. J. Multiphase Flow. 2007. Vol. 33, No.3. P. 227–251.
20. **Алипченков В.М., Зайчик Л.И.** Моделирование турбулентного движения частиц в вертикальном канале // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2006. № 4. С. 50–65.
21. **Iwamoto K.** Database of Fully Developed Channel Flow // THTLab Inter. Report ILR-0201. Department of Mechanical Engng, University of Tokyo, June 2002.
22. **Oesterlé B., Zaichik L.I.** On Lagrangian time scales and particle dispersion modeling in equilibrium turbulent shear flows // Phys. Fluids. 2004. Vol. 16, No. 9. P. 3374–3384.
23. **Son J.S., Hanratty T.J.** Limiting relation for the eddy diffusivity close to a wall // AIChE Journal. 1967. Vol. 13, No. 4. P. 689–696.
24. **Schmid P.J., Henningson D.S.** Stability and transition in shear flows. 3rd ed. N.Y.: Springer, 2001. 558 p.
25. **Zaichik L.I., Alipchenkov V.M.** Refinement of the probability density function model for preferential concentration of aerosol particles in isotropic turbulence // Phys. Fluids. 2007. Vol. 19, No. 11. P. 113308–1–12.
26. **Sippola M.R., Nazaroff W.W.** Particle deposition from turbulent flow: review of published research and its applicability to ventilation ducts in commercial buildings // Lawrence Berkeley National Laboratory Report LBNL-51432, June 2002.
27. **Wang Q., Squires K.D.** Large eddy simulation of particle-laden turbulent channel flow // Phys. Fluids. 1996. Vol. 8, No. 5. P. 1207–1223.
28. **Rouson D.W.I., Eaton J.K.** Direct numerical simulation of particles interacting with a turbulent channel flow // Proc. 7th Workshop on Two-Phase Flow Predictions. Erlangen, Germany, 1994.
29. **Fukagata K., Zahrai S., Bark F.H.** Force balance in a turbulent particulate channel flow // Inter. J. Multiphase Flow. 1998. Vol. 24, No. 6. P. 867–887.
30. **McCoy D.D., Hanratty T.J.** Rate of deposition of droplets in annular two-phase flow // Inter. J. Multiphase Flow. 1977. Vol. 3, No. 4. P. 319–331.
31. **Wells A.C., Chamberlain A.C.** Transport of small particles to vertical surfaces // Brit. J. Appl. Phys. 1967. Vol. 18, No. 12. P. 1793–1799.
32. **Liu B.Y.H., Agarwal J.K.** Experimental observation of aerosol deposition in turbulent flow // J. Aerosol Sci. 1974. Vol. 5, No. 2. P. 145–155.
33. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.
34. **Волков Э.П., Зайчик Л.И., Першуков В.А.** Моделирование горения твердого топлива. М.: Наука, 1994. 320 с.
35. **Nerisson P., Ricciardi L., Simonin O., Fazileabasse J.** Modelling aerosol transport and deposition in a ventilated room // 6th Inter. Conf. Multiphase Flow, ICMF 2007. Leipzig, Germany, 2007. Paper PS3-5.
36. **Дробышевский Н.И., Зайчик Л.И., Мукин Р.В., Стрижов В.Ф., Филиппов А.С.** Развитие и применение диффузионно-инерционной модели для расчета газодисперсных турбулентных течений // Теплофизика и аэромеханика. 2009. Т. 16. № 4. С. 553–572.
37. **Demenkov A.G., Plyushin V.B., Sikovsky D.Ph., Strizhov V.F., Zaichik L.I.** Development of diffusion-inertia model for particle deposition in turbulent flows // J. of Engng Thermophysics. 2009. Vol. 18, No. 1. P. 39–48.

*Статья поступила в редакцию 15 июня 2010 г.*