

РАСЧЕТ ЗЕРКАЛА ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ
ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ В ВИДЕ ОТРЕЗКА *Л. Л. Досколович¹, Н. Л. Казанский¹, М. А. Тренина²¹Институт систем обработки изображений РАН, Самара
E-mail: kazansky@smr.ru²Тольяттинский государственный университет, Тольятти

Рассмотрен расчет зеркала для формирования диаграммы направленности в виде линии, представленной векторной функцией одного аргумента. Получено аналитическое решение задачи формирования диаграммы направленности в виде отрезка при точечном источнике. Расчет зеркала сведен к решению обыкновенного дифференциального уравнения, разрешенного относительно производной. Рассчитано зеркало для формирования диаграммы направленности в виде отрезка с угловым размером 120° и сегментированное зеркало для формирования диаграммы направленности в виде контура квадрата, составленного из четырех отрезков.

Введение. Формирование заданных диаграмм направленности (ДН) является актуальным для лазерной оптики, радиофизики и светотехники. Задача формирования заданной ДН состоит в расчете поверхности зеркала из условия, что отраженные лучи имеют заданные направления. Предлагаемая работа посвящена расчету зеркал для формирования ДН в виде линии, которая задается векторной функцией одного аргумента [1–4]:

$$\mathbf{p}(\sigma) = (p_x(\sigma), p_y(\sigma), p_z(\sigma)), \quad |\mathbf{p}(\sigma)| = 1, \quad (1)$$

где $\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$ – некоторый параметр. Термин «ДН в виде линии» введен в работах [1–3] и обусловлен тем, что оптический элемент с направлением лучей (1) формирует на достаточно большом расстоянии изображение на сфере в виде линии (1). Процесс формирования ДН вида (1) зеркалом при точечном (компактном) источнике приведен на рис. 1. Общее решение данной задачи представлено в работах [2–4]. Тем не менее они не содержат законченного аналитического решения актуальной задачи формирования ДН в виде отрезка

$$\mathbf{p}(\sigma) = (p_x(\sigma), 0, p_z(\sigma)), \quad |\mathbf{p}(\sigma)| = 1. \quad (2)$$

* Работа выполнена при поддержке российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» (BRHE), Президента РФ (гранты МД-210.2003.01 и НШ.1007.2003), Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 04-01-96517, № 04-01-90149, № 05-01-08020) и ИНТАС (грант № 04-77-7198).

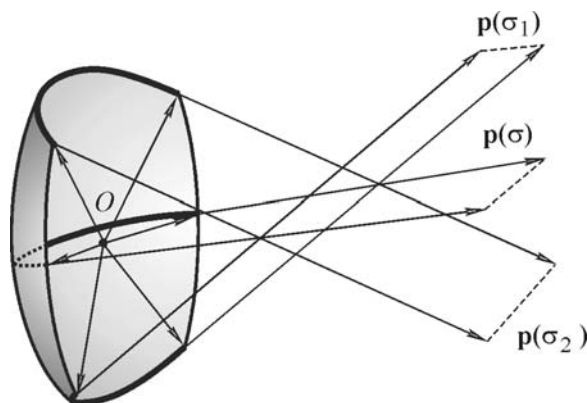


Рис. 1. Формирование ДН в виде линии зеркалом при точечном источнике

Задача формирования ДН (2) имеет большое практическое значение и является эталонной задачей формирования сложных ДН, состоящих из набора отрезков. В данной работе получено аналитическое решение задачи формирования ДН вида (2). Расчет зеркала для формирования ДН (2) сведен к решению обыкновенного дифференциального уравнения относительно производной.

Расчет поверхности зеркала. Для полноты изложения приведем основные результаты задачи расчета зеркала для формирования заданной ДН (1) при точечном источнике [2–4]. Точечный источник расположен в начале координат. Поверхность зеркала для формирования ДН (1) является огибающей семейства параболоидов вращения. Каждый параболоид в семействе преобразует сферический пучок от точечного источника в плоский пучок с направлением $\mathbf{p}(\sigma)$. Соответственно фокусы параболоидов совпадают с началом координат (с точечным источником), а направления осей параболоидов заданы векторной функцией $\mathbf{p}(\sigma)$. Уравнение огибающей поверхности имеет вид [2–4]

$$\mathbf{S}(u, v; \sigma) = \mathbf{e}(u, v) \frac{2f(\sigma)}{1 - (\mathbf{e}(u, v), \mathbf{p}(\sigma))}, \quad (3.1)$$

$$(\mathbf{e}(u, v), \mathbf{a}(\sigma)) = \cos(\alpha(\sigma)), \quad (3.2)$$

где

$$\mathbf{a}(\sigma) = \frac{\mathbf{v}(\sigma)}{|\mathbf{v}(\sigma)|}; \quad \cos(\alpha(\sigma)) = \frac{df(\sigma)}{d\sigma} / |\mathbf{v}(\sigma)|, \quad (4)$$

$$\mathbf{v}(\sigma) = \left(\mathbf{p}(\sigma) \frac{df(\sigma)}{d\sigma} - \frac{d\mathbf{p}(\sigma)}{d\sigma} f(\sigma) \right).$$

Формула (3.1) является уравнением параболоида вращения, где (u, v) – некоторые криволинейные координаты; $\mathbf{e}(u, v)$ – единичный вектор направления; $f(\sigma)$ – фокусное расстояние [2–4]. Формула (3.2) является уравнением круго-

вого конуса с вершиной в начале координат, единичным вектором оси $\mathbf{a}(\sigma)$ и углом при вершине $\alpha(\sigma)$ [2–4]. Уравнения (3.1) и (3.2) позволяют рассматривать поверхность зеркала как семейство кривых $\mathbf{L}(u; \sigma)$, являющихся пересечениями параболоидов с конусами. Лучи от источника, падающие на кривую $\mathbf{L}(u; \sigma)$, лежат на поверхности конуса (3.2), а отраженные от кривой лучи имеют направление $\mathbf{p}(\sigma)$. В декартовых координатах уравнение огибающей поверхности имеет вид [2–4]

$$|\mathbf{M}| - (\mathbf{p}(\sigma), \mathbf{M}) = 2f(\sigma), \quad (5.1)$$

$$\left(\frac{d\mathbf{p}(\sigma)}{d\sigma}, \mathbf{M} \right) = -2 \frac{df(\sigma)}{d\sigma}, \quad (5.2)$$

где $\mathbf{M} = (x, y, z)$. Формулы (5.1) и (5.2) являются уравнениями параболоида вращения и плоскости соответственно. Таким образом, кривые $\mathbf{L}(u; \sigma)$ также соответствуют пересечениям параболоидов вращения (5.1) и плоскостей (5.2). Поскольку плоскости (5.2) параллельны осям параболоидов, то кривые $\mathbf{L}(u; \sigma)$ являются параболами.

Согласно (3.1) и (3.2) огибающая поверхность может быть представлена в виде

$$\mathbf{S}(u, \sigma) = \mathbf{e}(u, \sigma) d(u, \sigma) = \mathbf{e}(u, \sigma) \frac{2f(\sigma)}{1 - (\mathbf{e}(u, \sigma), \mathbf{p}(\sigma))}, \quad (6)$$

где $\mathbf{e}(u, \sigma)$ – единичный вектор луча на поверхности конуса, а функция $d(u, \sigma)$ задает расстояние по направлению $\mathbf{e}(u, \sigma)$ от точечного источника до параболоида [2–4]. Вектор $\mathbf{e}(u, \sigma)$ задан в координатах (u, σ) , где параметр σ определяет конус, а параметр u выделяет луч на поверхности конуса. Функция $f(\sigma)$ в (3.1) и (6) описывает распределение энергии вдоль ДН и рассчитывается из условия формирования заданной интенсивности $I(\sigma)$ на ДН. Функция распределения интенсивности $I(\sigma)$ понимается как предел

$$I(\sigma) = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi(\sigma)}{\Delta\beta}, \quad (7)$$

где $\Delta\Phi(\sigma)$ – световой поток, направляемый в элемент ДН $\Delta\mathbf{p}(\sigma)$ с угловым размером $\Delta\beta = \left| \frac{d\mathbf{p}(\sigma)}{d\sigma} \right| \Delta\sigma$. По построению зеркала световой поток $\Delta\Phi(\sigma)$ равен световому потоку от точечного источника, заключенному между конусами (3.2) при значениях σ и $\sigma + \Delta\sigma$. Согласно (6), (7)

$$I(\sigma) \left| \frac{d\mathbf{p}(\sigma)}{d\sigma} \right| = \int I_0(u, \sigma) \left| \frac{\partial \mathbf{e}(u, \sigma)}{\partial u} \frac{\partial \mathbf{e}(u, \sigma)}{\partial \sigma} \right| du, \quad (8)$$

где $I_0(u, \sigma)$ – интенсивность точечного источника. При заданной функции $I(\sigma)$ функция $f(\sigma)$ находится из уравнения (8). Отметим, что функция $f(\sigma)$ содержится в неявном виде в выражении для вектора $\mathbf{e}(u, \sigma)$. Более конкретный вид уравнения (8) зависит от выбора параметра u и параметризации еди-

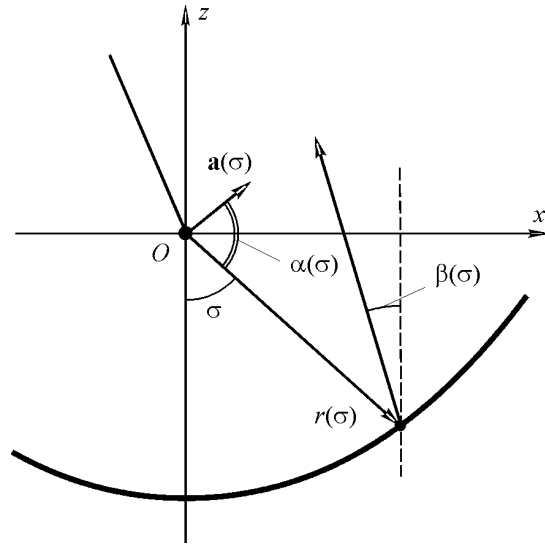


Рис. 2. Цилиндрический профиль для формирования функции лучевого соответствия $\beta(\sigma)$

ничного вектора $\mathbf{e}(u, \sigma)$ в (6). Согласно (3.1)–(6) уравнение (8) является дифференциальным второго порядка относительно функции $f(\sigma)$.

Расчет зеркала для формирования ДН в виде отрезка. Задача формирования ДН в виде отрезка (2) является практически важной. Согласно (6) функция $f(\sigma)$ определяет все характеристики зеркала. Расчет $f(\sigma)$ из условия формирования заданной интенсивности $I(\sigma)$ на ДН является трудной задачей. Работа с функцией $f(\sigma)$ не наглядна с точки зрения контроля геометрических параметров зеркала. Предлагается расчет трехмерной поверхности зеркала $\mathbf{S}(u, \sigma)$ для формирования ДН (2) производить через расчет цилиндрического профиля, являющегося сечением зеркала плоскостью $y=0$. Это позволяет заменить расчет функции $f(\sigma)$ расчетом функции лучевого соответствия, имеющей ясный физический смысл и позволяющей контролировать интенсивность на ДН и геометрические размеры зеркала. Рассмотрим расчет цилиндрического профиля $r(\sigma)$ из условия формирования заданной функции лучевого соответствия, определяющей угол отраженного луча $\beta(\sigma)$ в зависимости от угловой координаты σ падающего луча. Ход лучей, определяющий геометрические параметры задачи, приведен на рис. 2. Угол $\beta(\sigma)$ считается положительным, если отсчитывается от оси z против часовой стрелки, и отрицательным в противном случае. Функция $r(\sigma)$ имеет вид [5]

$$r(\sigma) = r_0 \exp \left(\int_{\sigma_0}^{\sigma} \operatorname{tg}((\xi - \beta(\xi))/2) d\xi \right). \quad (9)$$

Рассмотрим профиль (9) как сечение плоскостью $y=0$ трехмерного зеркала $\mathbf{S}(u, \sigma)$ для формирования ДН в виде отрезка

$$\mathbf{p}(\sigma) = (-\sin(\beta(\sigma)), 0, \cos(\beta(\sigma))), \quad \sigma \in [\sigma_0, \sigma_1]. \quad (10)$$

Определим функцию $f(\sigma)$ из условия, что сечение поверхности $\mathbf{S}(u, \sigma)$ плоскостью $y = 0$ имеет вид (9). Пусть такое сечение получается при $u = 0$, тогда

$$f(\sigma) = r(\sigma) \frac{1 - (\mathbf{e}(0, \sigma), \mathbf{p}(\sigma))}{2} = r(\sigma) \cos^2 \left(\frac{\sigma - \beta(\sigma)}{2} \right). \quad (11)$$

Отмечено, что поверхность зеркала $\mathbf{S}(u, \sigma)$ может быть рассмотрена как семейство парабол $\mathbf{L}(u; \sigma)$, которые являются пересечениями параболоидов (3.1) с конусами (3.2). Найдем параметры этих конусов. Согласно (4) для ДН (2) оси конусов лежат в плоскости XOZ . Прямое использование формулы (4) для расчета осей и углов конусов приводит к громоздким выкладкам. Заметим, что для нахождения направления осей конусов параболы $\mathbf{L}(u; \sigma)$ также являются пересечениями параболоидов (5.1) с плоскостями (5.2) и, следовательно, конусов (3.2) с плоскостями (5.2). В сечении конуса плоскостью получается парабола, если плоскость параллельна образующей конуса. Из этого следует, что сечение конусов лучей плоскостью $y = 0$ дает две прямые, одна из которых содержит луч, падающий на цилиндрический профиль, а вторая – параллельна отраженному лучу (см. рис. 2). Из рис. 2 очевидно соотношение для единичного вектора оси и угла при вершине конуса:

$$\mathbf{a}(\sigma) = (\cos((\sigma + \beta(\sigma))/2), 0, \sin((\sigma + \beta(\sigma))/2)), \quad (12.1)$$

$$\alpha(\sigma) = \pi/2 - (\sigma - \beta(\sigma))/2. \quad (12.2)$$

Проведем расчет функции $\beta(\sigma)$ из условия формирования заданной интенсивности $I(\beta)$ на основе закона сохранения светового потока (8). Согласно (8), (10) получим

$$I(\beta) \frac{d\beta}{d\sigma} = \int I_0(\sigma, u) \left| \frac{\partial \mathbf{e}(u, \sigma)}{\partial u} \frac{\partial \mathbf{e}(u, \sigma)}{\partial \sigma} \right| du, \quad (13)$$

где $\mathbf{e}(u, \sigma)$ – единичный вектор луча на поверхности конуса с параметрами (12.1) и (12.2). Определим параметр u в (6) как полярный угол в плоскости, перпендикулярной оси конуса (12.1). Угол u описывает положение точки на окружности в основании конуса и отсчитывается от плоскости XOZ . В этом случае единичный вектор луча на поверхности конуса имеет вид

$$\mathbf{e}(u, \sigma) = \begin{pmatrix} \sin(\alpha(\sigma)) \cdot \sin(\tau(\sigma)) \cdot \cos(u) + \cos(\alpha(\sigma)) \cdot \cos(\tau(\sigma)) \\ \sin(u) \cdot \sin(\alpha(\sigma)) \\ -\sin(\alpha(\sigma)) \cdot \cos(\tau(\sigma)) \cdot \cos(u) + \cos(\alpha(\sigma)) \cdot \sin(\tau(\sigma)) \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где $\tau(\sigma) = \alpha(\sigma) + \sigma - \pi/2$ – угол между осью конуса и осью Ox . Подставляя

(14) в (13) и проводя преобразования, получим

$$I(\beta(\sigma)) \frac{d\beta(\sigma)}{d\sigma} = \int_0^{g(\sigma, \beta)} I_0(u, \sigma) \sin(\alpha(\sigma)) \left(\cos(u) \frac{d\tau(\sigma)}{d\sigma} - \frac{d\alpha(\sigma)}{d\sigma} \right) du. \quad (15)$$

Здесь верхний предел интегрирования $g(\sigma, \beta)$ есть некоторая функция, определяющая размер зеркала по переменной u . Заменяя в (15) функции $\alpha(\sigma)$ и $\tau(\sigma)$ их представлениями через функцию $\beta(\sigma)$, получим для расчета $\beta(\sigma)$ дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной

$$\frac{d\beta(\sigma)}{d\sigma} = \frac{\cos\left(\frac{\sigma + \beta(\sigma)}{2}\right) [F_1(\sigma, \beta(\sigma)) + F_2(\sigma, \beta(\sigma))]}{2I(\beta(\sigma)) - \cos\left(\frac{\sigma + \beta(\sigma)}{2}\right) [F_1(\sigma, \beta(\sigma)) - F_2(\sigma, \beta(\sigma))]}, \quad (16)$$

где

$$F_1(\sigma, \beta) = \int_0^{g(\sigma, \beta)} I_0(u, \sigma) \cos(u) du, \quad (17)$$

$$F_2(\sigma, \beta) = \int_0^{g(\sigma, \beta)} I_0(u, \sigma) du.$$

Формулы (6), (9), (11), (14), (16) представляют собой законченное аналитическое решение задачи формирования ДН вида (2), (10). С точки зрения численной реализации расчет зеркала сводится к тривиальной операции решения обыкновенного дифференциального уравнения (16), разрешенного относительно производной, и к последующему интегрированию (9).

С использованием полученных формул было рассчитано зеркало для формирования ДН в виде отрезка с угловым размером 120° и равномерной интенсивностью. Следует отметить, что формирование ДН с таким большим угловым размером невозможно ни с помощью рефракционных (преломляющих) оптических элементов, ни с использованием элементов дифракционной оптики. Рассчитанная поверхность зеркала приведена на рис. 3, *a*. Максимальные размеры зеркала вдоль осей координат Ox , Oy , Oz составляют 23,0, 42,5 и 15,0 мм соответственно. Положение точечного источника показано сферой. Источник расположен на 7,5 мм выше вершины поверхности. На рис. 3, *b* представлено расчетное распределение интенсивности, формируемое зеркалом для сферического изотропного источника с радиусом 0,5 мм. Распределение интенсивности приведено в сферических координатах (β, μ) , где β – полярный угол в плоскости XOZ , а угол μ (широта) отсчитывается от плоскости XOZ . Расчет интенсивности проводился с использованием “ray-tracing” алгоритмов, реализованных в рамках программного продукта ASAP_BRO. Результат расчета показывает хорошее качество ДН и подтверждает правильность и работоспособность предложенного метода расчета. Слабая круговая засветка (см. рис. 3, *b*) вызвана прямым светом от источника.

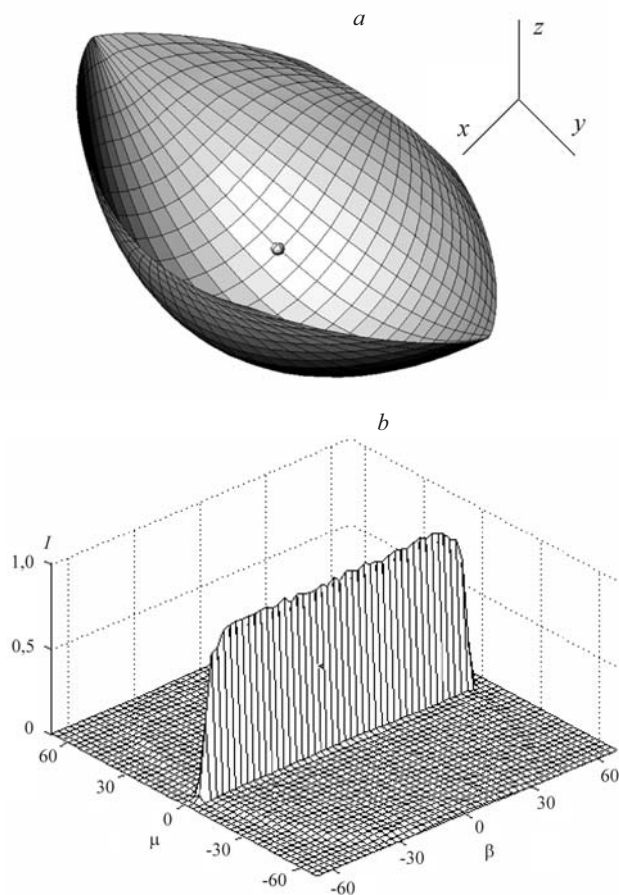


Рис. 3. Результаты расчета зеркала, формирующего ДН в виде отрезка с угловым размером 120° : поверхность зеркала (а), расчетная ДН в сферических координатах (б)

Задача формирования ДН в виде отрезка может рассматриваться как эталонная задача формирования сложной ДН, состоящей из набора отрезков. Для формирования набора отрезков можно использовать сегментированную поверхность, каждый сегмент которой формирует свой отрезок. С применением полученных формул было рассчитано зеркало для формирования ДН в виде контура квадрата с равномерной интенсивностью. Рассчитанная поверхность зеркала (рис. 4, а) состоит из четырех одинаковых сегментов, каждый из которых формирует диаграмму направленности в виде линии. Угловой размер сторон контура квадрата составляет 20° . Положение источника показано сферой. Источник расположен на 3 мм выше вершины поверхности. На рис. 4, б приведено расчетное распределение интенсивности, формируемое зеркалом для сферического изотропного источника с радиусом 0,1 мм. Расчет интенсивности, проведенный без учета прямого света от источника, показывает хорошее качество ДН и демонстрирует возможность расчета зеркал для формирования сложных ДН в виде набора отрезков.

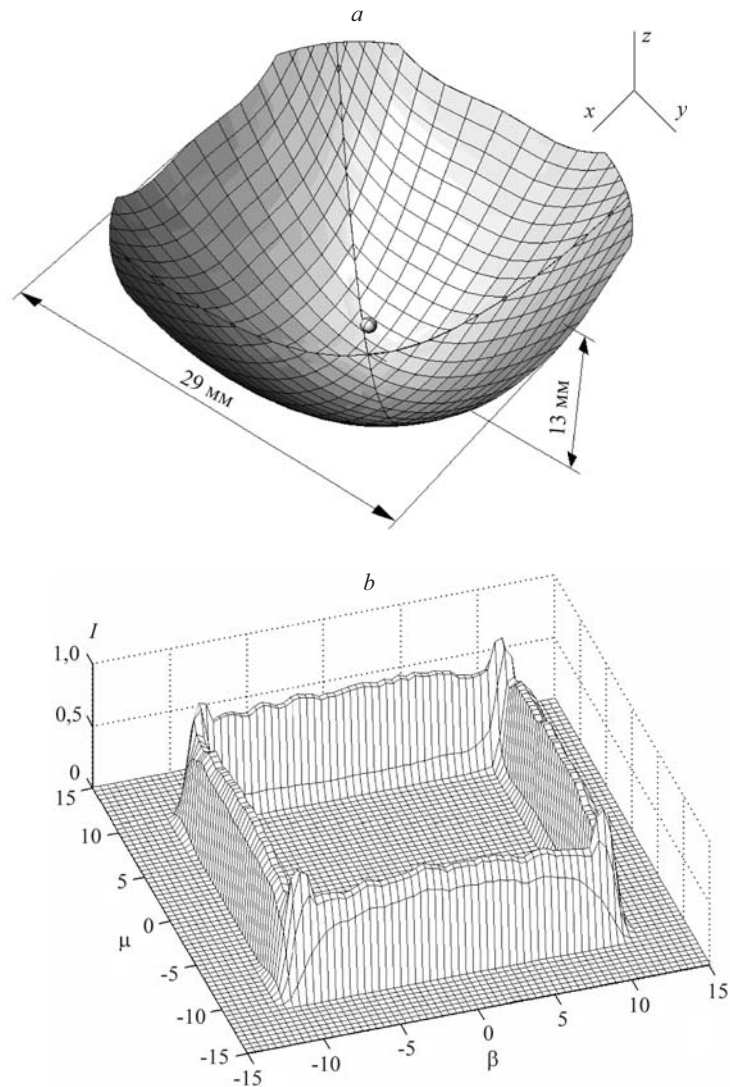


Рис. 4. Результаты расчета зеркала, формирующего ДН в виде контура квадрата при компактном изотропном источнике света: поверхность зеркала (а), расчетная ДН в сферических координатах (б)

Заключение. Получено аналитическое решение задачи расчета зеркала для формирования ДН в виде отрезка с заданным распределением интенсивности. Проведен расчет зеркал для формирования ДН в виде отрезка с угловым размером 120° и в виде контура квадрата, состоящего из четырех отрезков. Приведенные примеры подтверждают правильность изложенного подхода и возможность расчета компактных зеркал для формирования ДН с большим угловым размером и сложных ДН, состоящих из набора отрезков.

Авторы благодарят инженера исследовательского центра фирмы FIAT Stefano Bernard за помощь в моделировании работы зеркал.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Doskolovich L. L., Kazanskiy N. L., Soifer V. A. et al.** A DOE to form a line-shaped directivity diagram // Journ. Modern Opt. 2004. **51**, N 13. P. 1999.
2. **Досколович Л. Л., Казанский Н. Л.** Расчет зеркала для формирования однопараметрической диаграммы направленности излучения // Автометрия. 2004. **40**, № 5. С. 104.
3. **Doskolovich L. L., Kazanskiy N. L., Kharitonov S. I. et al.** Designing reflectors to generate a line-shaped directivity diagram // Journ. Modern Opt. 2005. **52**, N 11. P. 1529.
4. **Досколович Л. Л., Харитонов С. И.** Расчет формы поверхности зеркал для формирования изображения в виде линии // Оптический журнал. 2005. **72**, № 4. С. 34.
5. **Elmer W. B.** Optical design of reflectors. Pt. 2 // Appl. Opt. 1978. **17**, N 7. P. 977.

Поступила в редакцию 27 сентября 2005 г.
