

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РАВНОВЕСНЫХ ТРЕЩИН,
ОБРАЗУЮЩИХСЯ ПРИ ХРУПКОМ РАЗРУШЕНИИ

Г. И. Баренблатт

(Москва)

В данной статье с единой общей точки зрения излагаются представления об основных постановках задач теории равновесных трещин и достигнутых в ней результатах. Теория трещин представляет собой достаточно новую область механики, так что сводные монографии по этому вопросу отсутствуют. Поэтому представилось целесообразным основы теории изложить более подробно.

В первом и втором разделахается введение и краткий очерк развития теории равновесных трещин. В третьем разделе рассматривается структура края равновесной трещины в хрупком теле. В четвертом разделе приводятся основные гипотезы и дается общая постановка задачи о равновесных трещинах; обсуждаются имеющиеся экспериментальные подтверждения теории трещин. В пятом разделе рассматривается ряд частных задач теории равновесных трещин; обсуждаются вопросы устойчивости трещин. Наконец, в шестом разделе разбирается важная для теории трещин задача о расклинивании и кратко излагаются результаты, относящиеся к динамике трещин.

При написании работы автор стремился избежать повторения имеющихся сводных изложений тех или иных аспектов хрупкого разрушения. По своему характеру обзор касается собственно теории трещин — математической теории хрупкого разрушения. В связи с этим имеющиеся обширные экспериментальные исследования затрагиваются лишь поскольку они необходимы для подтверждения излагаемой теории и выяснения пределов ее применимости. Экспериментальные исследования хрупкого разрушения, в отличие от математической теории, не раз обсуждались в соответствующих обзорах и монографиях. Вместе с тем здесь не обсуждаются, или почти не обсуждаются вопросы, связанные исключительно с математической техникой решения задач теории упругости. Здесь не рассматривается также образование трещин. Стремясь провести все изложение с единой точки зрения, автор при изложении отдельных конкретных результатов других исследователей иногда допускал отклонения от оригинальной трактовки.

Автор благодарен Я. Б. Зельдовичу и Ю. Н. Работнову (Академия наук СССР) и С. С. Григоряну (МГУ) за постоянный интерес и внимание к его работе по трещинам и ряд ценных советов. Он с благодарностью вспоминает полезные дискуссии с С. А. Христиановичем (Академия наук СССР). Автор считает своим долгом выразить благодарность профессору Г. Кюрти, ответственному редактору издания *Advances in Applied Mechanics* и профессору Г. Г. Черному (МГУ) за любезное содействие при написании этой работы. Автор с признательностью отмечает также помочь И. А. Маркузона при составлении библиографии к настоящему обзору.

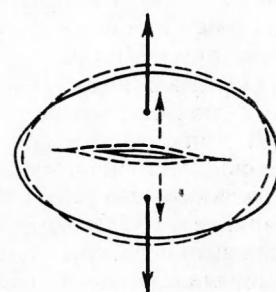
I. ВВЕДЕНИЕ

Предметом теории равновесных трещин является изучение равновесия твердых тел при наличии в них трещин.

Рассмотрим твердое тело, в котором имеются трещины (фиг. 1), находящиеся в равновесии под действием некоторой системы нагрузок.

Тело предполагается способным выдерживать любые конечные напряжения и идеально хрупким, т. е. сохраняющим свойство линейной упругости вплоть до разрушения; возможность использования модели идеально хрупкого тела для реальных материалов будет обсуждена ниже.

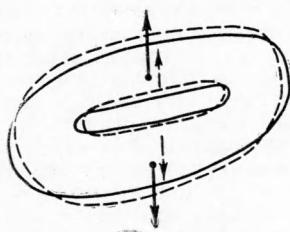
Раскрытие трещины (расстояние между противоположными берегами) всегда много меньше продольных ее размеров. Поэтому трещины можно рассматривать как поверхности разрыва сплошности материала, т. е. поверхности разрыва вектора смещений.



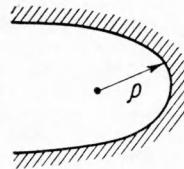
Фиг. 1

В дальнейшем, если не оговаривается противное, рассматриваются плоские трещины нормального разрыва, т. е. ограниченные замкнутыми кривыми (контурами трещин) куски плоскости, на которых претерпевают разрыв лишь нормальные составляющие вектора смещений. Рассмотрение случая, когда на поверхности разрыва в идеально хрупком теле претерпевают разрыв касательные компоненты смещений, можно выполнить теми же средствами, что и для трещин нормального разрыва.

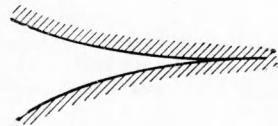
Казалось бы, исследование равновесия упругих тел с трещинами можно проводить обычными методами теории упругости, как это делается для тел с полостями (фиг. 2). Однако между этими двумя проблемами существует принципиальное отличие. Форма полостей даже при значительном изменении нагрузки, действующей на тело, претерпевает лишь небольшие изменения. В то же время трещины, поверхность которых также составляет часть границы тела, могут сильно расширяться даже при небольшом увеличении действующей на тело нагрузки (ср. фиг. 1 и 2, пунктиром обозначены добавочные нагрузки и соответствующие положения границ тела).



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Таким образом, для задач теории трещин не выполняется одна из основных предпосылок классической линейной теории упругости — предположение о малости изменения границ тела при нагружении, позволяющее считать, что граничные условия выполняются на поверхности недеформированного тела. Это делает задачу равновесия тела с трещинами в отличие от традиционных задач теории упругости существенно нелинейной. Из условия равновесия в задачах теории трещин требуется определять уже не только распределение напряжений и деформаций, но и границу области, в которой строится решение уравнений равновесия.

Как известно, нелинейные задачи такого типа («задачи с неизвестными границами») уже давно встречались в различных отделах математической физики. Достаточно назвать теорию струй и теорию волн конечной амплитуды в гидродинамике, теорию обтекания тел при наличии ударных волн в газодинамике, задачу Стефана о промерзании в теории теплопроводности и др. Главная трудность этих задач связана с отысканием границы области, в которой ищется решение. Точно так же основной задачей в теории равновесных трещин является определение поверхностей трещин приложении данной нагрузки.

Дифференциальные уравнения равновесия и обычные граничные условия теории упругости принципиально не могут дать решения этой задачи без привлечения дополнительных соображений. Это видно из того, что формально оказывается возможным построить решение уравнений, удовлетворяющее обычным граничным условиям, *как бы ни задавались поверхности трещин*. Анализ получаемых при этом формальных решений показывает, что, вообще говоря, нормальные к поверхности трещины растягивающие напряжения σ на контуре трещины получаются согласно этим решениям бесконечными. Точнее, вблизи произвольной точки контура трещины

$$\sigma = \frac{N}{V_s} + \text{конечная величина} \quad (1.1)$$

Здесь s — расстояние точки тела, лежащей в плоскости трещины, от контура трещины, N — «коэффициент интенсивности напряжений» — величина, зависящая от приложенных нагрузок, формы контуров трещин и координат рассматриваемой точки контура, но не зависящая от s . При этом форма нормального сечения деформированной поверхности трещины вблизи контура получается неестественно закругленной (как на фиг. 3, или несколько иначе, подробнее см. ниже).

Однако, вообще говоря, существуют такие исключительные контуры трещин, для которых напряжения на краях трещин при данной нагрузке оказываются конечными ($N = 0$), и в то же время противоположные берега трещин плавно смыкаются на границах, так что форма сечения поверхности трещины вблизи края имеет вид, изображенный на фиг. 4. Можно показать, что для таких контуров (и только для них) энергия, освобождающаяся при малом изменении контура трещины в окрестности данной его точки, равна нулю. Отсюда следует, что только такие контуры могут ограничивать равновесные трещины.

Таким образом, когда все нагрузки, действующие на тело, заданы, задача теории равновесных трещин формулируется следующим образом. Для данного расположения начальных трещин и данной системы сил, действующих на тело, требуется найти напряжения, деформации и контуры трещин в рассматриваемом упругом теле так, чтобы удовлетворить дифференциальным уравнениям равновесия, граничным условиям и обеспечить конечность напряжений или, что то же, плавное смыкание противоположных берегов на контурах трещин. Если не задавать расположения начальных трещин, то, так как в силу принятой модели тело способно выдержать любые конечные напряжения, поставленная задача имеет неоднозначное решение. Это естественно, так как при одной и той же нагрузке в одном и том же теле может не быть трещин вовсе, может быть одна трещина, две и т. д.

В общем случае искривленных трещин их форма определяется не только существующей в данный момент нагрузкой, но и историей процесса нагружения тела. Однако, если симметрия тела и приложенных монотонно возрастающих нагрузок обеспечивает развитие плоских трещин, то контуры трещин определяются только текущей нагрузкой. Все имеющиеся в настоящее время в теории трещин результаты соответствуют частным случаям этой упрощенной постановки задачи.

В данную систему сил, действующих на тело, следует включать, вообще говоря, не только приложенные к телу нагрузки. Это показывает следующий пример. Попытаемся определить контур равновесной трещины в случае нагрузок, изображенных на фиг. 1. Если, в соответствии с обычным для теории упругости подходом, как и в случае полости, изображенной на фиг. 2, считать поверхность трещины свободной от напряжений, то получится парадоксальный результат: как бы ни был выбран контур трещины, всегда растягивающие напряжения на ее краю получаются бесконечно большими. Стало быть, равновесной трещины не существует: при сколь угодно малой разрывающей нагрузке тело, имеющее трещину, разрывается пополам!

Такое явное несоответствие действительности объясняется весьма просто. Примитивно используя модель упругого тела, мы не учли всех сил, действующих на тело. Оказывается, — и в этом тоже одно из главных отличий задач теории трещин от традиционных задач теории упругости, — для построения адекватной теории трещин необходимо учесть молекулярные силы сцепления, действующие вблизи контура трещины, там, где расстояние между противоположными берегами трещины мало, и они сильно притягивают друг друга.

Хотя учет сил сцепления в принципе и решает дело, он серьезно усложняет исследование. Трудность заключается в том, что ни распределение сил сцепления по поверхности трещины, ни даже зависимость интенсив-

ности этих сил от расстояния между противоположными берегами трещины не известны. Кроме того, распределение сил сцепления зависит, вообще говоря, от приложенных нагрузок. Однако, если трещины не слишком малы, то из этого затруднения существует выход. Дело в том, что интенсивность сил сцепления с увеличением расстояния между противоположными берегами очень быстро достигает большой максимальной величины, приближающейся к модулю Юнга, и затем быстро убывает, пройдя этот максимум. Поэтому можно принять два упрощающих предположения.

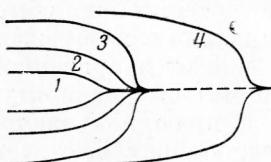
Первое из них состоит в том, что площадь части поверхности трещины, на которой действуют силы сцепления, можно считать пренебрежимо малой сравнительно со всей площадью поверхности трещины.

Согласно второму предположению, форма поверхности трещины (и, следовательно, локальное распределение сил сцепления) вблизи точек контура, в которых силы сцепления имеют максимальную интенсивность, не зависит от приложенной нагрузки¹.

Интенсивность сил сцепления имеет максимально возможное для данного материала при данных условиях значение, например, во всех точках контура трещины, образованной при первичном разрыве материала в процессе увеличения нагрузки. Для большинства реальных материалов при обычных условиях трещины необратимы. Если необратимая трещина создана при помощи искусственного надреза без последующего расширения, или получилась при уменьшении нагрузки из трещины, существовавшей при большей нагрузке, то интенсивность сил сцепления на контуре трещины будет меньше максимально возможной. Действующие на поверхности трещины силы сцепления компенсируют приложенные разрывающие нагрузки и обеспечивают конечность напряжений и плавность смыкания берегов трещины. С увеличением разрывающих нагрузок силы сцепления возрастают, приспособляясь в этом смысле к возрастающим растягивающим напряжениям. При этом, пока не достигается максимально возможная интенсивность сил сцепления на контуре трещины, трещина дальше не расширяется. Только по достижении максимальной возможной интенсивности сил сцепления на ее контуре трещина начинает развиваться².

Последовательное развитие края трещины при увеличении растягивающей нагрузки схематически изображено на фиг. 5.

Если использовать первое из сделанных выше предположений, то в условия, определяющие положение контуров трещины, молекулярные силы сцепления войдут только в виде интеграла



Фиг. 5

$$K = \int_0^d \frac{G(t) dt}{\sqrt{t}} \quad (1.2)$$

Здесь $G(t)$ — интенсивность сил сцепления, действующих вблизи края трещины, t — расстояние вдоль поверхности трещины, отсчитываемое по нормали от ее контура, d — ширина области, где действуют силы сцепления. Для точек контура, в которых применимо второе предположение, этот интеграл представляет собой при данных условиях (температура, состав и давление окружающей атмосферы и т. п.) константу данного материала, определяющую его сопротивление образованию трещин.

¹ Ш. А. Сергазиев очень удачно сравнил трещины, для которых выполняются эти предположения, с распространенными застежками «молния».

² Вполне аналогичное положение возникает при движении тела по шероховатой горизонтальной поверхности под действием горизонтальной силы. Движение тела начинается только после того, как сила превзойдет максимальную возможную для данного тела и данной поверхности силу трения.

Как можно показать, величина K связана простым соотношением с поверхностным напряжением материала T_0 , модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν

$$K^2 = \frac{\pi ET_0}{1 - \nu^2} \quad (1.3)$$

Далее, для всех точек контура трещины, в которых интенсивность сил сцепления максимальна, коэффициент интенсивности напряжений N , входящий в (1.1) и вычисленный без учета сил сцепления, равен K/π .

Для всех точек контура трещины, в которых интенсивность сил сцепления не достигла максимальной, коэффициент интенсивности напряжений, вычисленный без учета сил сцепления, меньше K/π .

Приведенные соображения достаточно выясняют характер проявления сил сцепления в данной задаче, так что можно сформулировать основную задачу теории равновесных трещин¹. В случае, когда симметрия тела, начальных трещин и действующих монотонно возрастающих нагрузок обеспечивает развитие системы плоских трещин, эта задача ставится следующим образом.

Пусть в теле задана некоторая система контуров начальных трещин. Требуется найти соответствующие данной нагрузке поля напряжений, смещений и систему контуров плоских трещин, окружающих контуры начальных трещин (и, быть может, на некоторой части совпадающих с ними).

Математически дело сводится к построению такой системы контуров, чтобы коэффициент интенсивности N разрывающего напряжения, вычисленный без учета сил сцепления, во всех точках контуров, не лежащих на контурах начальных трещин, был равен K/π и не превосходил K/π во всех точках контуров, лежащих на контурах начальных трещин.

Предложенная формулировка задачи исключает из непосредственного рассмотрения молекулярные силы сцепления (они входят только через константу K). Поэтому доставляемые решением этой задачи поля напряжений и деформаций не будут соответствовать действительности в некоторой малой окрестности контуров трещин.

Очевидно, что когда трещины обратимы или когда приложенная нагрузка достаточно велика для того, чтобы контуры всех трещин вышли за пределы контуров начальных трещин, форма последних перестает иметь значение.

Равновесное состояние, соответствующее максимально возможной интенсивности сил сцепления хотя бы в одной точке контура трещины, может быть устойчивым или неустойчивым. В зависимости от этого, дальнейшее развитие трещины при повышении нагрузки идет различным образом. В случае устойчивого равновесия, при медленном повышении нагрузки происходит медленный, квазистатический переход трещины от одного равновесного состояния к другому. Если равновесие неустойчиво, то при малейшем превышении равновесной нагрузки начинается быстрое развитие трещины, носящее динамический характер. В некоторых случаях, когда не существует соседних устойчивых равновесных состояний, это приводит к полному разрыву тела. Развитие теории трещин сложилось так, что до недавнего времени рассматривались в основном именно задачи последнего типа, поэтому иногда условие начала развития трещины отождествляется с условием полного разрушения тела. Следует отчетливо представлять, что положение, когда это действительно так, будет частным случаем, практическое значение которого не нужно преувеличивать.

¹ Такие общие формулировки задач представляются полезными, несмотря на то, что их общее решение в эффективной форме далеко превосходит возможности современной математики. Наличие общих постановок задач помогает уяснить значение отдельных конкретных решений и трудности, возникающие при развитии теории.

Ниже, после краткого очерка развития математической теории трещин, излагаются общие основы теории равновесных трещин и результаты решения наиболее характерных конкретных задач этой теории, рассмотренных к настоящему времени. В конце статьи кратко рассматриваются динамические задачи теории трещин.

II. ОЧЕРК РАЗВИТИЯ ТЕОРИИ РАВНОВЕСНЫХ ТРЕЩИН

Исследования в области теории трещин были начаты около пятидесяти лет назад работой Инглиса [1]. В рамках классической теории упругости в этой работе была решена задача о равновесии бесконечного тела с изолированной эллиптической полостью (в частности, с прямолинейным разрезом) в однородном поле напряжений. В работе Н. И. Мусхелишвили [2], также в рамках классической теории упругости, было получено в более простой и эффективной форме решение задачи равновесия бесконечного тела с эллиптической полостью в произвольном поле напряжений.

Однако, несмотря на их большое значение для последующих исследований, работы [1, 2] еще не создали собственно теории трещин. Полученные в этих работах решения обладали двумя трудно объяснимыми свойствами.

Во-первых, длина трещины при заданной нагрузке оказывалась неопределенной — можно было построить решение при произвольном значении этого параметра. В то же время повседневный опыт подсказывал, что размеры имеющихся в теле трещин как-то связаны с приложенными к телу растягивающими нагрузками. С увеличением нагрузки имеющиеся в теле трещины сначала не расширяются, пока нагрузка мала; при достижении некоторой нагрузки они начинают расширяться, причем это расширение происходит по-разному, в зависимости от способа приложения нагрузки. В некоторых случаях трещины быстро развиваются вплоть до полного разрыва тела при сохранении постоянной нагрузки, в других — развиваются медленно, останавливаясь, как только прекращается повышение нагрузки. Далее, так как раскрытие трещины обычно мало сравнимо с ее продольными размерами, трещину естественно представлять в виде разреза. Но при этом растягивающие напряжения на концах трещины в задаче Инглиса оказываются бесконечно большими; *вообще говоря*, это же обстоятельство имеет место и в задаче, рассмотренной Н. И. Мусхелишвили. Ясно, что решения, в которых получаются бесконечные растягивающие напряжения на краю трещины, неприемлемы для любой физически корректной модели хрупкого тела.

Таким образом, непосредственное применение классической схемы теории упругости к проблеме трещин привело к постановке задачи, которая неполна и дает физически неприемлемые решения.

Работы Гриффитса [3, 4] справедливо считаются основополагающими для теории трещин хрупкого разрушения. В них была впервые выдвинута важная идея о том, что для построения адекватной теории трещин необходимо усовершенствовать принимаемую модель хрупкого тела, введя в рассмотрение молекулярные силы сцепления, действующие вблизи края трещины.

Гриффитс рассматривал следующую задачу. В бесконечном хрупком теле, растягиваемом на бесконечности однородным напряжением ρ_0 , имеется прямолинейная трещина определенного размера $2l$. Требуется определить критическое значение напряжения ρ_0 , при достижении которого трещина начинает расширяться.

Молекулярные силы сцепления рассматривались Гриффитсом как силы поверхностного натяжения, являющиеся внутренними силами для данного тела; их воздействием на поля напряжений и деформаций он пренебрегал.

При этом условии изменение ΔF свободной энергии («полной потенциальной энергии» по терминологии Гриффитса) хрупкого тела с трещиной сравнительно с тем же телом при тех же нагрузках, но без трещины, равно разности поверхностной энергии трещины U и уменьшения упругой

энергии тела за счет образования трещины W . Для того чтобы данная трещина разрасталась, необходимо, чтобы при увеличении размера трещины $2l$ изменение свободной энергии тела ΔF не возрастало. Таким образом, параметры критического, равновесного состояния находятся из условия

$$\frac{\partial (U - W)}{\partial l} = 0 \quad (2.1)$$

Но поверхностная энергия трещины U равна произведению площади поверхности трещины на энергию T_0 , затрачиваемую при образовании единицы поверхности трещины. Величину T_0 —поверхностное напряжение—при определенных достаточно общих предположениях можно считать постоянной для данного материала при данных условиях. Поэтому определение критической нагрузки по Гриффитсу приводится к нахождению величины $\partial W / \partial l$ —«скорости освобождения упругой энергии». Для исследованного им простейшего случая Гриффитс вычислил эту величину, используя результаты Инглиса [1], и получил соотношения, определяющие критические значения разрывающего напряжения, в виде

$$p_0 = \sqrt{\frac{2ET_0}{\pi(1-v^2)l}}, \quad p_0 = \sqrt{\frac{2ET_0}{\pi l}} \quad (2.2)$$

соответственно для условий плоской деформации и плоского напряженного состояния.

В теоретической части работы Гриффитса имеются также результаты, относящиеся к исследованию структуры трещины вблизи ее концов. Это исследование проводится Гриффитсом на основе классического решения теории упругости, построенного без учета сил сцепления. Естественно при этом, что если трещину считать разрезом, то растягивающие напряжения на концах трещины оказываются бесконечно большими. Чтобы избавиться от бесконечного растягивающего напряжения в концах трещины, Гриффитс сделал попытку усовершенствовать свое описание трещины, считая ее эллиптической полостью с конечным радиусом кривизны r на конце (фиг. 3). Однако, по его же оценкам, величина радиуса кривизны в конце трещины оказалась порядка межатомных расстояний, что явно указывает на некорректность подхода: во всяком исследовании, основанном на концепции сплошной среды, расстояния порядка межатомных нельзя считать конечными.

Этот раздел работы Гриффитса является недостаточным по следующей причине. Несмотря на то, что при определении равновесных размеров трещины можно пренебречь влиянием молекулярных сил сцепления на поле напряжений и деформаций, этого нельзя делать при исследовании структуры трещины вблизи ее концов. Порядок расстояний, на которых оказывается влияние сил сцепления, сравним с расстояниями, на протяжении которых существенно меняется форма трещины. Поэтому данный Гриффитсом анализ структуры краев трещин в значительной мере не может быть признан правильным. В частности, как будет подробно показано ниже, неправилен вывод Гриффитса о закругленной форме трещин вблизи концов.

Эта сторона дела, имеющая, очевидно, принципиальное значение, оставалась не ясной до недавнего времени и приводила в ряде случаев к неправильному истолкованию результатов Гриффитса [5].

Помимо отмеченного здесь принципиального недостатка, в теоретической части работы [3] имелись некоторые неточности в вычислениях. Вскоре после выхода этой работы Смекал [6] опубликовал обстоятельный комментарий к ней, содержащий также весьма интересное общее обсуждение проблемы хрупкого разрушения и исправляющий упомянутые неточности. В последующей работе Вольфа [7] было дано более четкое и

простое изложение результатов Гриффитса, а также проведены аналогичные вычисления для несколько других (но также однородных) напряженных состояний. В [7] обсуждалась также связь теории разрушения Гриффитса с ранее предложенными теориями прочности.

В работе И. В. Обреимова [8] в связи с его опытами по расщеплению слюды исследовался отрыв тонкой стружки от тела скользящим по его поверхности расщепляющим клином, касающимся стружки в одной точке. Применяя приближенные методы теории тонких балок, И. В. Обреимов при помощи аналогичного работе Гриффитса энергетического подхода установил соотношение, связывающее параметры формы трещины с поверхностным напряжением. Работа [8] была впоследствии продолжена многими исследователями [9–12].

Определение скорости освобождения упругой энергии $\partial W / \partial l$ для более сложных, нежели однородное, полей растягивающих напряжений или для других конфигураций трещин упиралось в значительные математические трудности. Исследования Вестергарда [13], Снеддона [14, 15], Снеддона и Эллиота [16], Уильямса [17] выяснили распределение напряжений и деформаций вблизи поверхностей разрыва смещений. Наряду с классическими работами Мусхелишвили [2, 18, 19] исследования Вестергарда и Снеддона составили математическую основу последующих работ по теории трещин. Однако условий равновесия для новых частных случаев и тем более для сколько-нибудь общего случая нагружения в этих работах получено не было.

В работах Зака [20], Уилмора [21], Бови [22] были получены условия равновесия для некоторых новых частных случаев нагружения и расположения трещин. Прямое применение энергетического метода в этих работах потребовало преодоления значительных вычислительных трудностей. Ввиду того, что состояния равновесия в рассмотренных в [20–22] задачах являются неустойчивыми и единственными, условия равновесия для них совпадают с условиями полного разрушения тела.

Важным этапом для теории трещин явились работы Ирвина [23] и Орована [24], в которых была развита концепция квазихрупкого разрушения. Ирвин и Орован обратили внимание на то, что ряд материалов, проявляющих себя как весьма пластичные при стандартных испытаниях на растяжение, при образовании трещин разрушаются по «квазихрупкому» механизму. Это означает, что возникающие пластические деформации сосредотачиваются в очень узком слое вблизи поверхности трещины. Для таких случаев, как показали Ирвин и Орован, можно использовать теорию хрупкого разрушения Гриффитса, вводя вместо поверхностного напряжения эффективную плотность поверхностной энергии. Эта величина, помимо удельной работы разрыва внутренних связей, — поверхностного напряжения — включает в себя удельную работу, затрачиваемую на пластические деформации в приповерхностном слое трещины, иногда на несколько порядков превышающую поверхностное напряжение.

Представление о квазихрупком разрушении значительно расширило область применимости теории хрупкого разрушения, и, несомненно, послужило одной из основных причин оживления интереса к этой проблеме в последнее время. Ирвин, Орован и другие авторы опубликовали ряд работ [23–32], посвященных развитию обобщенной теории хрупкого разрушения, исследованию пределов ее применимости и анализу экспериментальных данных с точки зрения этой теории. Следует отметить статью Бюкнера [33], в которой был проведен весьма общий энергетический анализ хрупкого и квазихрупкого разрушения на основе теоретической схемы Гриффитса — Ирвина — Орована.

Во всех перечисленных работах оставался невыясненным вопрос о структуре трещины вблизи ее контура. В весьма интересной работе [34], посвященной физико-химическому анализу процессов деформации, П. А. Ребиндер впервые высказал мысль о клиновидной форме трещины

на ее концах и о необходимости соответствующего усовершенствования теории Гриффитса. Эллиот [35], Мотт [36] и Я. И. Френкель [5] при анализе формы трещины исходили из представления о трещине бесконечной длины между двумя сплошными блоками разрываемого материала, до образования трещины отстоящими одна от другой на нормальном межатомном расстоянии.

В [35] блоки считались полубесконечными. Исходя из классического решения задачи теории упругости для прямолинейной [1] и дискообразной [20] трещин размером $2c$ в однородном поле разрывающих напряжений r в [35] было вычислено распределение нормальных напряжений σ_y и поперечных смещений v точек плоскостей, отстоящих от плоскости трещины на расстоянии, равном половине нормального межатомного расстояния. Зависимость $\sigma_y(2v)$, содержащая в виде параметров r и c , отождествлялась с зависимостью молекулярных сил сцепления от расстояния; интегрированием этой функции определялось поверхностное натяжение, которое, таким образом, оказывалось связанным с r и c . Полученную связь автор отождествлял с условием разрушения; это условие оказалось, естественно, отличающимся от гриффитсовского. Найденное распределение поперечных смещений отождествлялось с формой трещины.

Такой подход недостаточен по следующим причинам. Формальное применение аппарата классической теории упругости для определения напряжений и деформаций вблизи края трещины в [35] неоправдано, так как при применении этого аппарата все расстояния, даже те, которые считаются малыми, должны быть велики сравнительно с межатомными. Кроме того, нужно учесть, что силы сцепления действуют не только внутри тела, но и на части поверхности трещины. Как будет подробно показано ниже, учет этого обстоятельства приводит к тому, что края трещины имеют заостренную форму, а не закругленную и что на краях трещины бесконечная концентрация напряжения отсутствует. Таким образом, распределения напряжений и смещений вблизи края поверхности трещины существенно отличаются от соответствующих распределений, полученных согласно решениям Инглиса [1] и Зака [20], в которых поверхность трещин предполагалась свободной от напряжений. Заметим, что убывание кривой $\sigma_y(2v)$ при возрастании v получилось в работе [35] весьма медленным, гораздо более медленным, чем естественная скорость убывания для интенсивности сил сцепления.

Я. И. Френкель [5] рассмотрел задачу о трещине бесконечной длины, перерезающей в продольном направлении тонкую полосу. Применение приближенной теории тонких балок, непригодной при исследовании формы трещины вблизи концов, не позволило ему получить адекватного результата. Отметим попутно, что содержащаяся в работе Я. И. Френкеля критика теории Гриффитса также в значительной мере не может быть признана правильной. Я. И. Френкель ставит в упрек Гриффитсу неустойчивость равновесия в рассмотренном Гриффитсом случае прямолинейной трещины в однородном поле растягивающих напряжений, связывая эту неустойчивость с неправильными представлениями Гриффитса о форме концов трещин. Это неверно: вывод об устойчивости или неустойчивости равновесия трещин не связан с учетом структуры трещин на концах. Как будет показано ниже, неустойчивость трещины в однородном поле имеет место и при учете плавного смыкания трещин на концах; она вполне соответствует существу дела. Вывод Я. И. Френкеля о наличии в этом случае, помимо неустойчивого, также и устойчивого состояния равновесия связан со сделанной им неправомерной заменой однородного напряженного состояния другим¹.

В работе А. Р. Ржаницына [37] была сделана попытка решения задачи о круглой трещине в теле, находящемся под действием однородного рас-

¹ Помимо этих принципиальных недостатков, в [5] имеются неточности в вычислениях, отмеченные в [37].

тягивающего напряжения с учетом распределенных по поверхности трещины молекулярных сил сцепления и плавного смыкания трещины на ее контуре. К сожалению, применение неадекватных методов, основанных на осреднении напряжений и деформаций, не позволило автору получить правильных условий равновесия трещины.

Существенное значение для понимания структуры трещин вблизи их концов имела идея, впервые высказанная С. А. Христиановичем [38]. С. А. Христианович рассматривал в связи с теорией так называемого гидравлического разрыва нефтеносного пласта изолированную трещину в бесконечном теле, скатом на бесконечности всесторонним постоянным напряжением и поддерживаемую равномерно распределенным давлением заключенной внутри трещины жидкости. Задача исследовалась в квазистатической постановке. При ее решении С. А. Христианович столкнулся с неопределенностью длины трещины. Однако он обратил внимание на следующее обстоятельство. В предположении, что жидкость заполняет трещину полностью, разрывающие напряжения в конце трещины всегда получаются бесконечно большими, каков бы ни был размер трещины. Но, если принять, что жидкость заполняет трещину неполностью, так что имеется свободный участок поверхности трещины, не смоченный жидкостью, то при одном исключительном значении длины трещины разрывающие напряжения на концах трещины оказываются конечными. Для этого значения длины трещины (и только для него) оказалось, что противоположные берега трещины плавно смыкаются на ее краях. С. А. Христианович выдвинул гипотезу конечности напряжений, или, что то же, плавности смыкания противоположных берегов трещины на ее краях, в качестве основного условия, определяющего размер трещины. Использование этой гипотезы позволило решить ряд задач образования и развития трещин в горных породах [38–43]. Во всех этих работах, однако, молекулярные силы сцепления непосредственно не учитывались. При рассмотрении трещин в массивах горных пород пренебрежение силами сцепления, как показывают проведенные оценки, вполне допустимо, так как действие горного давления проявляется здесь значительно сильное действия сил молекулярного сцепления, особенно если принять во внимание естественную трещиноватость горных пород. В других условиях (в частности, во многих случаях при моделировании горных массивов в лаборатории) силы сцепления играют важную роль и их учет имеет существенное значение при анализе условий равновесия и развития трещин.

Следует отметить в связи с этими исследованиями очень интересную раннюю работу Вестергарда [44] (см. также [13]). В этой работе на основе отмеченной автором аналогии с контактной задачей было высказано утверждение об отсутствии концентрации напряжений в конце трещины в хрупких материалах типа бетона. В [44] были также даны формулы, правильно описывающие напряжения и деформации вблизи концов равновесных трещин хрупкого разрушения при отсутствии сил сцепления. Однако Вестергард не связывал условие конечности напряжений с определением продольного размера трещины, который он считал заданным.

В работах Ирвина [45, 46] (см. также [47, 48, 49, 33]) была установлена важная формула, связывающая скорость освобождения упругой энергии с коэффициентом интенсивности напряжений вблизи концов трещины в задаче классической теории упругости. На основе этой формулы была определена скорость освобождения упругой энергии и получены условия разрушения для нескольких новых случаев нагружения тел и расположения трещин [47, 50, 32, 51, 52].

Начиная с Гриффитса, в большинстве теоретических исследований рассматривались однотипные задачи, в которых равновесное состояние, при котором интенсивность сил сцепления на контуре максимальна, оказывалось неустойчивым и условие начала развития трещины совпадало с условием начала полного разрушения. Поэтому условие начала развития

трещины в некоторых работах отождествлялось с началом быстрого распространения трещины и разрушением для всех трещин. Это, вообще говоря, не так; на самом деле трещины могут быть устойчивыми, так что начало развития трещины вовсе не обязательно связано с разрушением тела. Не следует представлять себе дело таким образом, что устойчивые трещины являются редкостью, не встречающейся на практике и трудно осуществляемой на опыте. Как показывают проведенные различными авторами, начиная с И. В. Обреимова [8], экспериментальные исследования, развитие трещин во многих случаях на значительной части процесса разрушения протекает устойчиво. Так, Уэллсом [30] были получены устойчивые в некотором диапазоне растягивающих нагрузок трещины в стальных плитах при комбинированном действии внешних растягивающих напряжений и внутренних напряжений, создаваемых действием сварных швов. Реслером [53] и Бенбоу [54] были исследованы устойчивые конические трещины в стекле и кварце. Бенбоу и Реслер [9] получили устойчивые трещины при расклинивании полосы из органического стекла. Недавно Ромуальди и Сэндерс [52] получили устойчивые в определенных пределах нагрузок трещины при растяжении плиты, подкрепленной приклепанными ребрами жесткости. Указания на другие исследования, в которых были получены и исследованы устойчивые трещины, можно найти в монографии Б. А. Дроздовского и Я. Б. Фридмана [55]. Все эти работы определенно подтверждают возможность использования концепции хрупкого и квазихрупкого разрушения для устойчивых трещин.

Рассмотрение устойчивых трещин сильно расширяет постановку задач теории равновесных трещин. В самом деле, для неустойчивых трещин представляет интерес только определение нагрузки, при которой начинается расширение трещины, потому что процесс развития трещины по достижении этой нагрузки становится динамическим. Для устойчивых же трещин возникает задача исследования квазистатического развития трещин при изменении нагрузок.

В работах [56–61] была в связи с высказанными соображениями уточнена и дополнена постановка задач теории равновесных трещин хрупкого разрушения. В этих работах был предложен новый подход к задачам теории трещин, основанный на сформулированной в [40] общей постановке задач упругого равновесия тел при наличии в них трещин. Дальнейшее изложение основано на этом подходе, поэтому мы здесь не останавливаемся на его характеристике. На основе предложенного подхода был поставлен и решен ряд новых задач теории трещин.

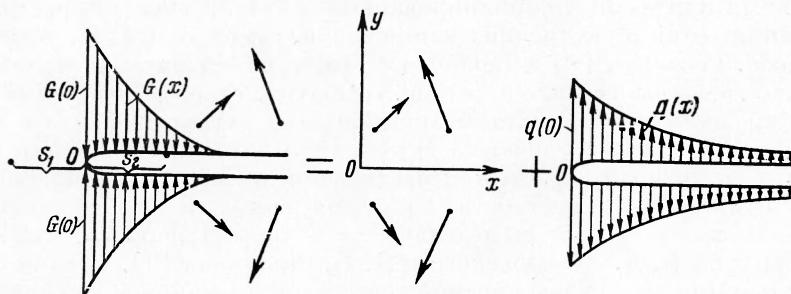
III. СТРУКТУРА КРАЯ РАВНОВЕСНОЙ ТРЕЩИНЫ В ХРУПКОМ ТЕЛЕ

1. Напряжения и деформации вблизи края произвольной поверхности нормального разрыва смещений. Как было указано выше, можно построить формальное решение дифференциальных уравнений теории упругости, удовлетворяющее граничным условиям, соответствующим приложенной к телу нагрузке, произвольным образом задавая поверхности разрыва смещений. В этом параграфе проводится исследование поведения решений уравнений теории упругости вблизи края поверхности разрыва смещений. Для простоты рассуждений ограничимся здесь поверхностями нормального разрыва смещений, представляющими собой части плоскости, ограниченные замкнутыми контурами.

Возьмем вблизи произвольной точки O контура такой поверхности окрестность, характерный размер которой мал сравнительно с радиусом кривизны контура в точке O . Деформацию в этой окрестности можно считать плоской и соответствующей прямолинейному бесконечному разрезу в бесконечном теле под действием некоторой системы симметричных нагрузок (фиг. 6, плоскость деформации — нормальная плоскость к контуру поверхности разрыва в точке O , линия разреза — пересечение этой плос-

кости с поверхностью разрыва). Нагрузки могут быть приложены на поверхности разреза и внутри тела; нагрузки, приложенные на поверхности разреза, не уменьшая общности дальнейшего анализа можно считать нормальными. Рассмотрим эту конфигурацию более подробно.

Поле напряжений и смещений можно представить в виде суммы двух полей (фиг. 6), первое из которых соответствует сплошному телу под действием нагрузок, приложенных внутри тела, а второе — телу с разрезом и симметричными нагрузками, приложенными только на поверхности разреза. Форма деформированной поверхности разреза определяется вторым напряженным состоянием, так как нормальные смещения на месте разреза для первого напряженного состояния равны, по симметрии, нулю¹.



Фиг. 6

Анализ первого напряженного состояния выполняется обычными методами теории упругости и не представляет принципиального интереса; будем считать это напряженное состояние известным. Примем, что линия разреза соответствует положительной полуоси x ; нормальные напряжения $g(x)$, приложенные на поверхности разреза во втором напряженном состоянии, представляют собой разность напряжений, приложенных на поверхности разреза в суммарном поле $G(x)$ и напряжений на месте разреза $p(x)$, соответствующих первому напряженному состоянию.

Применяя к анализу второго напряженного состояния метод Мусхелишвили [18], имеем соотношения, определяющие напряжения и смещения, в виде

$$\sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(2)} = 4 \operatorname{Re} \Phi(z) \quad (3.1)$$

$$\sigma_y^{(2)} - i\sigma_{xy}^{(2)} = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)} \quad (3.2)$$

$$2\mu(u^{(2)} + iv^{(2)}) = \kappa\varphi(z) - \omega(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi(z)} \quad (3.3)$$

$$\kappa = 3 - 4\nu$$

Здесь $z = x + iy$, $\sigma_x^{(2)}$, $\sigma_y^{(2)}$, $\sigma_{xy}^{(2)}$ — компоненты тензора напряжений второго напряженного состояния; $u^{(2)}$, $v^{(2)}$ — компоненты смещения по осям x и y , соответствующие второму напряженному состоянию; $\mu = E/2(1+\nu)$ — модуль сдвига, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона. Аналитические функции φ , ω , Φ , Ω выражаются формулами

$$\Phi(z) = \Omega(z) = \varphi'(z) = \omega'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_z^\infty \frac{V^t g(t) dt}{t - z} \quad (3.4)$$

$$\varphi(z) = \omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty g(t) \ln \frac{V^t + V_z}{V^t - V_z} dt \quad (3.5)$$

¹ В наиболее общем виде этот удобный прием приведения нагрузки к распределенной по поверхности разрыва обоснован Бюкнером [33].

На разрезе ($x \geq 0, y = 0$) и его продолжении ($x \leq 0, y = 0$) выполняются соотношения

$$\sigma_x^{(2)} = \sigma_y^{(2)} = 2 \operatorname{Re} \Phi(z), \quad \sigma_{xy}^{(2)} = 0, \quad v^{(2)} = \frac{4(1-v^2)}{E} \operatorname{Im} \varphi(z) \quad (3.6)$$

Отсюда и из известных формул для предельных значений интеграла типа Коши на концах контура [19] получается выражение для растягивающих нормальных напряжений вблизи конца разреза на его продолжении

$$\sigma_y^{(2)} = -\frac{1}{\pi \sqrt{s_1}} \int_0^\infty \frac{g(t) dt}{\sqrt{t}} + g(0) + O(\sqrt{s_1}) \quad (3.7)$$

где s_1 — малое расстояние от рассматриваемой точки до конца разреза. Аналогично, для распределения нормального смещения точек поверхности разреза вблизи его конца, получаем

$$v^{(2)} = \pm \frac{4(1-v^2)}{\pi E} \sqrt{s_2} \int_0^\infty \frac{g(t) dt}{\sqrt{t}} + O(s_2^{3/2}) \quad (3.8)$$

где s_2 — расстояние рассматриваемой точки поверхности разреза от его конца, а знаки минус и плюс отвечают соответственно верхнему и нижнему берегам разреза.

Проведенное исследование вполне выясняет распределение растягивающих нормальных напряжений и нормальных смещений вблизи контура произвольной поверхности нормального разрыва. Именно, из соотношений (3.7) и (3.8) непосредственно вытекают формулы

$$\sigma_y = \frac{N}{\sqrt{s_1}} + G(0) + O(\sqrt{s_1}), \quad v = \mp \frac{4(1-v^2) N \sqrt{s_2}}{E} + O(s_2^{3/2}) \quad (3.9)$$

где σ_y — растягивающее напряжение в точке тела, отстоящей от контура поверхности разрыва на малое расстояние s_1 и лежащей в соприкасающейся плоскости к контуру поверхности разрыва, проведенной в точке O ; N — «коэффициент интенсивности напряжений» — величина, зависящая от действующих нагрузок, конфигурации тела и поверхностей разрыва в нем, а также от координат рассматриваемой точки контура O ; $G(0)$ — величина приложенного к поверхности разрыва нормального напряжения в рассматриваемой точке контура этой поверхности (фиг. 6), s_2 — малое расстояние точки поверхности разрыва от ее контура. В зависимости от знака N могут, вообще говоря, встретиться три возможности.

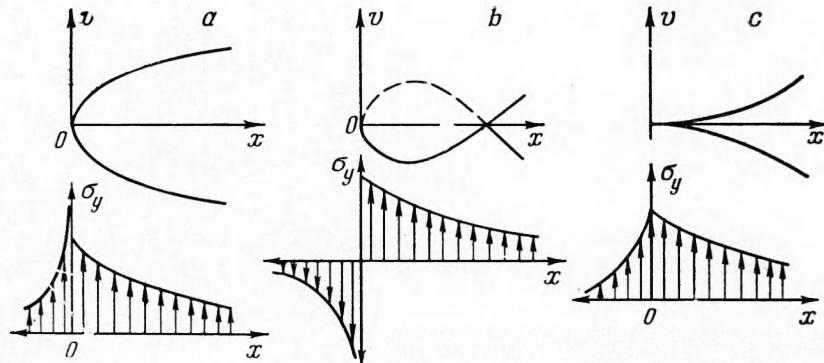
Если $N > 0$, то в точке O контура поверхности разрыва действует бесконечное растягивающее напряжение. Форма деформированной поверхности разрыва и распределение нормальных напряжений σ_y вблизи точки O имеют вид, представленный на фиг. 7, a.

Если $N < 0$, то в точке O контура действует бесконечное сжимающее напряжение; форма деформированной поверхности разрыва и распределение напряжений σ_y вблизи точки O имеют вид, представленный на фиг. 7, b. Как видно, в этом случае противоположные берега трещины заходят один за другой, как бы перехлестываясь; очевидно, что этот случай физически нереален.

Если, наконец, $N = 0$, то действующее вблизи контура напряжение ограничено и при подходе к точке O стремится к приложенному на поверхности в этой точке контура нормальному напряжению, так что имеет место непрерывность напряжений σ_y на контуре и плавное смыкание противоположных берегов поверхности разрыва на ее контуре (фиг. 7, c).

Исследование распределения напряжений и деформаций вблизи края поверхности нормального разрыва было начато Вестергардом [44, 13] и

Снеддоном [14, 15] и впоследствии продолжено автором [40], Уильямсом [17] и Ирвином [45–47]. Ввиду характера рассмотренных в [14, 15], [45–47] напряженных состояний, в них получены результаты, относящиеся только к случаю $N > 0$.

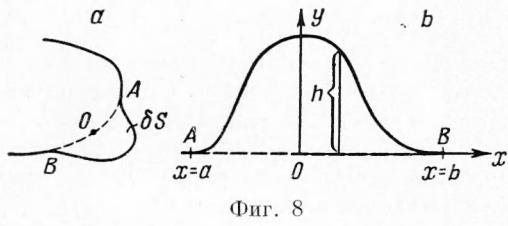


Фиг. 7

2. Напряжения и деформации вблизи края равновесной трещины. Результаты, полученные в предыдущем параграфе, относятся к произвольной поверхности нормального разрыва смещений. Покажем, что для равновесной трещины $N = 0$ во всех точках ее контура.

Рассмотрим возможное состояние упругой системы, которое отличается от действительного равновесного состояния только некоторым изменением формы контура трещины в малой окрестности произвольной его точки O (фиг. 8). Новый контур представляет собой некоторую кривую, окружающую точку O , лежащую в плоскости трещины. Эта кривая касается прежнего контура трещины в точках A и B , близких к O ; во всех остальных местах контуры всех трещин остаются неизменными.

Ввиду близости точек касания A и B к точке O исходный контур трещины на участке AB можно считать прямолинейным. Распределение нормальных смещений точек новой поверхности трещины и распределение растягивающих напряжений в этих точках до образования новой поверхности трещин имеют, согласно предыдущему, с точностью до малых величин, вид



Фиг. 8

Здесь N — коэффициент интенсивности напряжений в точке O . Энергия, освободившаяся при образовании новой поверхности трещины и равная работе, потребной для закрытия этой новой поверхности, равна, очевидно

$$\begin{aligned} \delta A &= \frac{1}{2} 2 \int_{\delta S} |\sigma_u| v |dS| = \frac{4(1-\nu^2)N^2}{E} \int_a^b dx \int_0^h \sqrt{\frac{h-y}{y}} dy = \\ &= \frac{2(1-\nu^2)\pi N^2}{E} \int_a^b h dx = \frac{2(1-\nu^2)\pi N^2 \delta S}{E} \end{aligned} \quad (3.11)$$

где δS — величина площади проекции новой поверхности трещины на ее плоскость.

Из условия равновесия трещины вытекает, что δA должно обращаться в нуль, откуда и из (3.11) следует, что

$$N = 0.$$

Таким образом, справедливо очень важное утверждение, характеризующее структуру трещин вблизи их контура:

1. *Растягивающее напряжение на контуре трещины конечно.*
2. *Противоположные берега трещины плавно смыкаются на ее контуре.*

Таким образом, оказывается, что в отличие от представлений Гриффитса, форма трещины вблизи ее края имеет вид, изображенный на фиг. 4. Так как на поверхности трещины вблизи ее контура единственными действующими силами будут силы сцепления, то из (3.9) получается, что растягивающее напряжение на контуре трещины равно интенсивности сил сцепления на контуре.

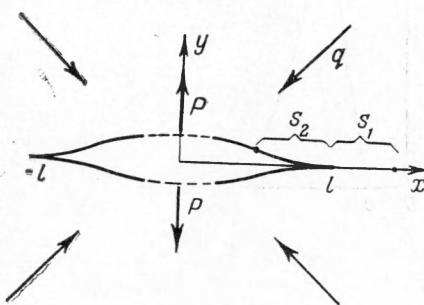
В частности, если силы сцепления отсутствуют, то растягивающее напряжение на контуре трещины будет равно нулю.

В гипотетической форме условие конечности напряжений и плавности смыкания противоположных берегов на краях трещины было впервые предложено С. А. Христиановичем [38] в качестве основного условия, определяющего положение края трещины. Проведенное выше доказательство этого условия следует в основном [60]. Формула (3.11) для случая плоской деформации, вне связи с конечностью напряжений и плавностью смыкания, была впервые указана в работах Ирвина [45, 46] (см. также обзор Ирвина [47] и статью Бюкнера [33]). В ранней работе Вестергарда [44] было высказано утверждение об отсутствии концентрации напряжений в конце трещины в хрупких материалах типа бетона, однако условие конечности напряжений в этой работе не связывалось с определением размера трещин.

Здесь рассмотрены трещины нормального разрыва исключительно для простоты изложения. Все проведенные рассуждения и, в частности, доказательство конечности напряжений на краю трещины без сколько-нибудь существенных изменений распространяются на общий случай, когда на поверхности трещин претерпевают разрыв и тангенциальные компоненты смещения.

3. Определение границ равновесных трещин. Условие конечности напряжений и плавности смыкания трещины на ее контуре позволяет, при заданной системе сил, действующих на тело, сформулировать задачу теории равновесных трещин. Эта задача заключается в следующем. Для данного расположения начальных трещин и данной системы сил, действующих на тело, требуется найти напряжения, деформации и контуры трещин в рассматриваемом упругом теле так, чтобы удовлетворить дифференциальным уравнениям равновесия, граничным условиям и обеспечить конечность напряжений и плавное смыкание противоположных берегов на контурах трещин.

Разберем решение этой задачи на элементарном примере изолированной прямолинейной трещины в бесконечном упругом теле, сжатом на бесконечности всесторонним напряжением q . Трещина поддерживается со средоточенными силами P , приложенными в противоположных точках ее поверхности (фиг. 9).



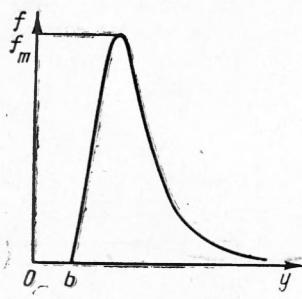
Фиг. 9

Методом Н. И. Мусхелишвили [18] можно получить решение уравнений равновесия, удовлетворяющее граничным условиям при произвольной длине трещины $2l$. Напряжения и смещения выражаются при этом формулами (3.1) — (3.3), причем

$$\Phi(z) = \frac{2\xi^2}{l(\xi^2 - 1)} \left\{ \frac{P}{\pi(\xi^2 + 1)} - \frac{ql(\xi^2 + 1)}{4\xi^2} \right\} \quad (3.12)$$

$$z = \frac{l}{2} \left(\xi + \frac{1}{\xi} \right)$$

Как видно, уравнения равновесия и граничные условия не определяют длины трещины. Распределения напряжений σ_y на продолжении трещины и нормальных смещений v в точках поверхности трещины вблизи ее края представляются в виде



Фиг. 10

$$\sigma_y = \left(\frac{P}{\pi l} - q \right) \sqrt{\frac{l}{8s_1}} + O(1) \quad (3.13)$$

$$v = \pm \frac{(1-v^2)}{E} \left(\frac{P}{\pi l} - q \right) \sqrt{8s_2 l} + O(s^{3/2})$$

Конечность напряжений и плавность смыкания трещины на ее концах одновременно обеспечиваются при условии

$$l = \frac{P}{\pi q} \quad (3.14)$$

которое и определяет размер трещины при данных нагрузках P и q .

Попытаемся теперь определить размер $2l$ изолированной прямолинейной трещины в бесконечном теле, растягиваемом на бесконечности однородным напряжением p_0 в направлении, перпендикулярном трещине. Если считать, что поверхность трещины свободна от напряжений, то, как нетрудно показать, растягивающее напряжение на продолжении трещины вблизи ее края зависит от расстояния s_1 следующим образом:

$$\sigma_y = \frac{p_0 \sqrt{l}}{\sqrt{2s_1}} \quad (3.15)$$

Отсюда получается, что ни при каком l в конце трещины σ_y не будет конечным и равновесной трещины не существует. Этот парадоксальный результат объясняется тем, что здесь не приняты во внимание молекулярные силы сцепления, действующие вблизи краев трещины на ее поверхности, и, таким образом, неполностью отражены нагрузки, действующие на тело.

Учет сил сцепления и окончательная формулировка задач теории равновесных трещин хрупкого разрушения рассматриваются в следующем разделе.

IV. ОСНОВНЫЕ ГИПОТЕЗЫ И ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О РАВНОВЕСНЫХ ТРЕЩИНАХ

1. Силы сцепления. Концевая и внутренняя области. Основные гипотезы. Для построения адекватной теории трещин хрупкого разрушения необходимо дополнить модель хрупкого тела путем учета молекулярных сил сцепления, действующих вблизи края трещины на ее поверхности. Как известно, интенсивность сил сцепления сильно зависит от расстояния. Так, для идеального кристалла интенсивность f сил сцепления, действующих между двумя атомными плоскостями, находящимися на расстоянии y одна от другой, равна нулю при y , равном нормальному межатомному расстоянию b . С увеличением y до величины порядка полутора b интенсивность f возрастает, достигая очень большого максимального значения $f_m \approx \sqrt{ET_0/b} \approx E/10$, а затем с увеличением y быстро убывает (фиг. 10).

Здесь E — модуль Юнга, T_0 — поверхностное натяжение, связанное с $f(y)$ соотношением

$$2T_0 = \int_b^{\infty} f(y) dy \quad (4.1)$$

Максимальная интенсивность f_m определяет собой теоретическую прочность, т. е. прочность, которую имело бы твердое тело, если бы было идеальным кристаллом.

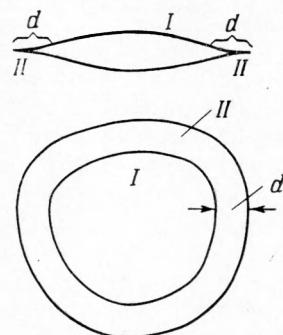
Реальная прочность твердых тел обычно на несколько порядков ниже благодаря наличию дефектов строения кристалла.

Для аморфных тел зависимость интенсивности сил сцепления от расстояния имеет тот же качественный характер.

Данные, подтверждающие изложенный выше характер зависимости интенсивности сил сцепления от расстояния, в настоящее время сводятся к следующему. Уже давно было известно, что прочность тонких нитей значительно превышает прочность больших образцов, изготовленных из того же материала [62, 63]. Проведенные в последнее время опыты обнаружили исключительно высокую прочность нитевидных кристаллов некоторых металлов, близкую к теоретической [63]. Предполагается, что это явление связано с относительно малым количеством дефектов строения в тонких нитях и нитевидных кристаллах. Далее, недавно были проведены многочисленные прямые измерения интенсивности молекулярных сил сцепления для стекла и кварца [64–66]. Следует особо отметить весьма изящную методику такого рода измерений, основанную на применении микровесов с обратной связью, предложенную и использованную Б. В. Дерягиным и И. И. Абрикосовой [64, 65]. Эти прямые измерения, однако, относятся к расстояниям y , очень большим сравнительно с нормальным межатомным расстоянием a , таким образом, определяют только конец спадающей ветви кривой $f(y)$. Для сил сцепления на таких расстояниях Е. М. Лифшицем [64] была развита макроскопическая теория, нашедшая хорошее подтверждение в результатах измерений, о которых было сказано выше. На расстояниях порядка нескольких нормальных межатомных расстояний зависимость $f(y)$ в настоящее время представляется недоступной ни для сколько-нибудь строгой количественной теории, ни для непосредственного экспериментального определения. Изложение имеющихся попыток расчетных оценок зависимости $f(y)$ на таких расстояниях и теоретической прочности можно найти в [67, 68].

Расстояние между противоположными берегами трещины меняется от величин порядка межатомных расстояний вблизи контура трещины до иногда довольно больших величин вдали от контура. Поэтому поверхность трещины естественно разделить на две части (фиг. 11). В первой части — *внутренней области трещины* — противоположные берега трещины далеко отстоят один от другого, так что их взаимодействие пренебрежимо мало и поверхность трещины можно считать свободной от напряжений, обусловленных взаимодействием противоположных берегов. Во второй части, прилегающей к контуру трещины, — *концевой области трещины* — противоположные берега трещины близко подходят один к другому, так что действующие на этой части поверхности молекулярные силы сцепления имеют значительную интенсивность.

Разумеется, граница между концевой и внутренней областями поверхности трещины в известной мере условна. Для очень малых трещин внутренней области поверхности трещины может не быть вовсе.



Фиг. 11

Так как распределение сил сцепления по поверхности концевой области трещины заранее неизвестно, неизвестна существенная часть приложенных к телу нагрузок. Поэтому нельзя непосредственно решать задачу о трещинах в постановке, данной в разделе III. Принципиально возможен следующий способ решения задач о трещинах. Расстояние между противоположными берегами трещины в каждой точке ее поверхности находится в зависимости от неизвестного распределения сил сцепления по поверхности. Предполагая заданной зависимость $f(y)$ интенсивности сил сцепления от расстояния, отсюда можно получить соотношение, определяющее распределение сил сцепления по поверхности трещины.

Такой подход к задачам о трещинах практически нереализуем. Прежде всего, зависимость $f(y)$ не известна в достаточной мере ни для одного из реальных материалов. Даже, если бы эта зависимость была известна, задача привелась бы к весьма сложному нелинейному интегральному уравнению, эффективное решение которого уже для простейших случаев представляет большие трудности¹.

Предпринимались попытки определенным образом задать распределение сил сцепления по поверхности трещины, однако эти попытки не могут считаться достаточно обоснованными.

Для достаточно больших трещин, рассмотрение которых представляет основной интерес, трудность, связанную с незнанием распределения сил сцепления по поверхности, можно обойти, не делая никаких конкретных предположений об этом распределении. Именно, отмеченные выше общие свойства зависимости сил сцепления от расстояния позволяют сформулировать две основные гипотезы, существенно упрощающие дальнейший анализ и позволяющие при определении контуров трещин в конечном счете вообще исключить силы сцепления из рассмотрения действующих на тело нагрузок.

Первая гипотеза. Ширина d концевой области трещины мала сравнительно с размером всей трещины.

Возможность принятия первой гипотезы связана с быстрым убыванием сил сцепления при увеличении расстояния между противоположными берегами трещины.

Разумеется, существуют микротрещины, к которым эта гипотеза не применима. Однако, так как ширина d концевой области весьма мала, первая гипотеза справедлива уже для очень малых трещин и, заведомо, для всех реальных макротрещин. Ширина d считается все же достаточно большой сравнительно с микроразмерами (например, сравнительно с постоянной решетки в кристаллическом теле), так что на расстояниях порядка d можно пользоваться методами механики континуума.

Вторая гипотеза. Форма нормального сечения поверхности трещины в концевой области (и, следовательно, локальное распределение сил сцепления по поверхности трещины) не зависит от действующих нагрузок и для данного материала при данных условиях (температура, состав и давление окружающей атмосферы и т. п.) всегда одинакова. (Под нормальным сечением здесь понимается сечение плоскостью, нормальной к контуру трещины.)

Согласно второй гипотезе концевая область при расширении трещины вблизи данной точки как бы поступательно перемещается в другое место, но форма ее нормального сечения остается неизменной.

¹ В работах М. Я. Леонова и В. В. Панасюка [69, 70] зависимость $f(y)$ аппроксимирована ломаной линией и на основе этой аппроксимации составлено линейное интегральное уравнение для нормальных смещений точек поверхности трещины. Это интегральное уравнение решается затем приближенно, причем приближенное представление решения выбирается не вполне удачно, так что форма трещины на конце получается клиновидной с конечным краевым углом. На самом деле, как было показано выше, краевой угол обязательно равен нулю. Недостатком этих работ является также применение в них результатов, полученных методами механики сплошных сред, к трещинам, продольные размеры которых имеют порядок нескольких межатомных расстояний.

Вторая гипотеза применима только для тех точек контура трещины, где достигается максимально возможная интенсивность сил сцепления, так что при сколь угодно малом увеличении приложенных к телу нагрузок в этой точке происходит расширение трещины.

Равновесные трещины, на контуре которых имеется хотя бы одна такая точка, естественно назвать подвижно-равновесными, в отличие от неподвижно-равновесных трещин, этим свойством не обладающих и, следовательно, не расширяющихся при бесконечно малом увеличении нагрузки.

Таким образом, вторая гипотеза и все опирающиеся на нее выводы применимы к обратимым трещинам, а также к необратимым равновесным трещинам, которые образовались при первичном разрыве хрупкого тела в процессе возрастания нагрузки. Она неприменима к необратимым трещинам, которые получились при уменьшении нагрузки из равновесных трещин, существовавших при какой-то большей нагрузке, и к искусственным надрезам, образованным без последующего расширения.

Возможность принятия второй гипотезы связана с тем, что максимальная интенсивность сил сцепления очень велика и на несколько порядков превосходит напряжения, которые возникли бы в сплошном теле без трещин под действием тех же нагрузок. Поэтому можно пренебречь изменениями напряжений в концевой области при изменении нагрузок и, следовательно, соответствующими изменениями формы нормальных сечений в концевой области.

Сделанные гипотезы синтезируют результат качественного анализа явления хрупкого разрушения, проведенного рядом исследователей начиная с Гриффита. Они являются единственными предположениями о силах сцепления, лежащими в основе излагаемой ниже теории. В явной форме они были сформулированы в [56, 57].

2. Модуль сцепления. Рассматриваемое тело по предположению является линейно-упругим вплоть до разрушения, так что поле упругих элементов в теле с трещинами можно представить в виде суммы двух полей — поля, вычисленного без учета сил сцепления, и поля, соответствующего действию одних только сил сцепления. Поэтому величину N , входящую в формулу (3.15) и, по доказанному, равную нулю, можно записать в виде $N = N_0 + N_m$, где коэффициент интенсивности напряжений N_0 соответствует действующим на тело нагрузкам и той же конфигурации трещин, но без учета сил сцепления, а коэффициент интенсивности напряжений N_m — той же конфигурации трещин и одним только силам сцепления.

В силу первой гипотезы ширина d концевой области, в которой действуют силы сцепления, мала сравнительно с размерами трещины в целом и, в частности, сравнительно с радиусом кривизны контура трещины в рассматриваемой точке. Поэтому при определении значений N_m можно считать, что поле соответствует рассмотренной в разделе III, п. 1 конфигурации бесконечного тела с полубесконечным разрезом, на поверхности которого приложены симметричные нормальные напряжения. Отсюда и из (3.7) следует, что

$$N_m = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{G(t) dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{\pi} \int_0^d \frac{G(t) dt}{\sqrt{t}} \quad (4.2)$$

Здесь $G(t)$ — распределение сил сцепления, отличных от нуля только в концевой области $0 \leq t \leq d$.

В силу второй гипотезы распределение сил сцепления и ширина d концевой области в тех точках контура, где интенсивность сил сцепления максимальна, не зависят от приложенной нагрузки, так что интеграл в правой части (4.2) представляет собой константу, являющуюся характеристикой данного материала при данных условиях. Эта константа обозна-

чается через K

$$K = \int_0^d \frac{G(t) dt}{\sqrt{t}} \quad (4.3)$$

для нее предложено название *модуль сцепления*, так как эта величина характеризует сопротивление материала развитию в нем трещин, обусловливаемое действием сил сцепления. Как будет показано ниже, величина K является единственной характеристикой сил сцепления, входящей в формулировку задачи о трещинах.

Размерность модуля сцепления имеет вид

$$[K] = [F] [L]^{-3/2} = [M] [L]^{-1/2} [T]^{-2} \quad (4.4)$$

Здесь $[F]$ — размерность силы, $[L]$ — размерность длины, $[M]$ — размерность массы, $[T]$ — размерность времени. Константы аналогичной размерности встречаются в контактной задаче теории упругости [71, 72, 73]. Это не случайно, между контактной задачей и задачами теории трещин хрупкого разрушения существует глубокая связь, впервые отмеченная, по-видимому, в работах Вестергарда [44, 13].

3. Границное условие на контуре равновесной трещины. Для точек контура равновесной трещины, в которых достигается максимальная интенсивность сил сцепления, так что применима вторая гипотеза, формула (4.2) записывается в виде

$$N_m = -\frac{1}{\pi} K \quad (4.5)$$

Отсюда и так как $N = 0$, получаем

$$N_0 = \frac{1}{\pi} K \quad (4.6)$$

Можно также сформулировать граничное условие в точках контура равновесной трещины, в которых интенсивность сил сцепления максимальна, следующим образом. При подходе к этим точкам растягивающее нормальное напряжение σ_y в точках тела, лежащих в плоскости трещины, вычисленное без учета сил сцепления, стремится к бесконечности по закону

$$\sigma_y = \frac{K}{\pi \sqrt{s}} + O(1) \quad (4.7)$$

где s — малое расстояние от рассматриваемой точки контура.

Выполнение (4.6), хотя бы в одной точке контура, будет условием достижения трещиной состояния подвижного равновесия.

Подчеркнем специально, что не следует, вообще говоря, связывать достижение трещиной состояния подвижного равновесия с началом неустойчивого быстрого ее развития и, тем более, с полным разрушением тела. Подвижно-равновесная трещина может быть как устойчивой, так и неустойчивой. Только в случае неустойчивости подвижного равновесия (4.6) будет условием начала быстрого развития трещины. Однако, даже в этом случае не обязательно полное разрушение тела: трещина может переходить от неустойчивого состояния равновесия к другому, устойчивому. Многочисленные примеры, иллюстрирующие различные возможности, будут рассмотрены в следующем разделе.

Если трещина необратима и на ее контуре существуют точки, где интенсивность сил сцепления меньше максимально возможной¹, то в таких точках вторая гипотеза неприменима. Силы сцепления, действующие в

¹ Например, точки контуров нерасширенных надрезов или точки контуров трещин, получившихся при уменьшении нагрузки из трещин, существовавших при большей нагрузке.

концевой области поверхности трещины вблизи таких точек, меньше сил сцепления, действующих в концевой области вблизи точек рассмотренного выше типа. Поэтому из (4.2) следует: $-N_m < K/\pi$, и, так как $N_0 = -N_m$, то для этих точек

$$N_0 < \frac{K}{\pi} \quad (4.8)$$

При повышении нагрузки силы сцепления в концевой области возрастают, обеспечивая конечность напряжения и плавность смыкания на контуре трещины. Однако трещина в данной точке контура не расширяется, пока силы сцепления не достигнут максимальной интенсивности, так что станет применима вторая гипотеза и будет выполняться условие (4.6).

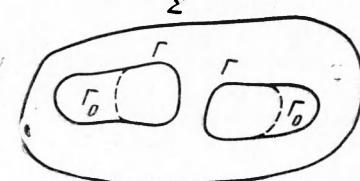
Условия (4.6) и (4.8) позволяют при определении формы контуров равновесных трещин вообще исключить силы сцепления из рассмотрения действующих на тело нагрузок, ограничившись их суммарной интегральной характеристикой — модулем сцепления. Специальные оценки показывают [57, 58], что влияние молекулярных сил сцепления на поля напряжений и смещений существенно только в окрестности концевой области трещин, имеющей размер порядка ширины d концевой области. Силы сцепления, таким образом, определяют структуру трещин вблизи их концов и — только через свою интегральную характеристику K — форму контуров трещин.

4. Основные задачи теории равновесных трещин. В наиболее общей форме основная задача теории равновесных трещин ставится следующим образом. Заданы некоторая система начальных трещин и процесс нагружения тела, т. е. система действующих на тело нагрузок, зависящая от одного монотонно возрастающего параметра λ . Для исходного состояния значение λ можно считать равным нулю. Требуется определить форму поверхности трещин, а также найти распределение напряжений и смещений в теле, соответствующее каждому $\lambda > 0$. Предполагается, что процесс изменения нагрузки достаточно медленный, так что динамические эффекты не рассматриваются.

В случае, когда симметрия тела, нагрузок и начальных трещин обеспечивает возможность развития системы плоских трещин и растягивающие нагрузки монотонно возрастают при увеличении λ , конфигурация трещин в теле определяется только текущей нагрузкой, а не всей историей процесса нагружения, как в общем случае. Задача теории равновесных трещин формулируется при этом следующим образом (будем называть ее задачей A). В теле, ограниченном поверхностью Σ , заданы контуры начальной системы плоских трещин Γ_0 (фиг. 12, плоскость чертежа — плоскость трещин). Требуется найти поле упругих элементов и контуры системы плоских трещин Γ , окружающие контуры Γ_0 (быть может, частично с ними совпадающие), соответствующие данной нагрузке, т. е. данному значению λ .

Сформулированная задача математически сводится к следующей. Требуется построить решение дифференциальных уравнений равновесия теории упругости в области, ограниченной плоскими разрезами с контурами Γ и границей тела Σ , при граничных условиях соответствующих данной нагрузке. При этом контуры Γ должны быть определены так, чтобы в точках этих контуров, не лежащих на Γ_0 , выполнялось условие (4.6), а в точках Γ , лежащих на Γ_0 , выполнялось условие (4.8).

Если трещины обратимы, или если приложенные нагрузки достаточно велики, так что контуры Γ не совпадают с Γ_0 ни в одной точке, то форма начальных контуров не имеет значения. Поэтому можно, не задавая начальных трещин, прямо ставить задачу определения контуров Γ данной



Фиг. 12

конфигурации равновесных трещин так, чтобы в каждой точке Г выполнялось условие (4.6). При этом предполагается, что начальные трещины таковы, что они обеспечивают осуществление данной конфигурации трещин при возрастании нагрузки. Задачу в такой постановке назовем задачей *B*.

Может оказаться, что решение каждой из поставленных здесь задач не существует. Физически, однако, это обстоятельство имеет совершенно различное истолкование для задач *A* и *B*. Если не существует решения задачи *A*, это означает, что приложенная нагрузка превосходит разрушающую, так что при ее приложении наступает разрушение тела. Предельное значение параметра λ , до достижения которого существует решение задачи *A*, соответствует разрушающей нагрузке. Определение разрушающей нагрузки для данной конфигурации начальных трещин и данного процесса нагружения представляет собой важную задачу теории трещин. Несуществование решения задачи *B* означает, что каковы бы ни были начальные трещины в пределах данной конфигурации, они не будут развиваться под действием данной нагрузки, так что приложенная нагрузка слишком слаба. В таких случаях будем говорить в условном смысле, что подвижно-равновесные трещины при данной нагрузке не образуются.

5. Энергетический вывод граничного условия на контуре равновесной трещины. До сих пор молекулярные силы сцепления рассматривались как внешние силы, приложенные к поверхности тела. Это было необходимо для исследования структуры трещин вблизи их концов. Имея в виду только получение граничного условия, можно применить другой подход, рассматривая силы сцепления как внутренние силы системы. На основе этого подхода, идея которого восходит к Гриффитсу [3, 4], будет получена связь модуля сцепления с другими характеристиками материала.

Пусть по-прежнему в хрупком теле имеется некоторая конфигурация равновесных трещин. Перейдем, как и в разделе III, п. 2 к возможному состоянию упругой системы, отличающемуся от действительного только изменением контура трещины вблизи некоторой точки *O* (фиг. 8). Однако, в отличие от раздела III, п. 2, будем предполагать характерный размер новой области поверхности трещины большим сравнительно с размером *d* концевой области, хотя и малым сравнительно с размером трещины в целом; согласно первой гипотезе раздела IV, п. 1 такое предположение возможно. В этом предположении силы сцепления можно рассматривать просто как силы поверхностного натяжения, на преодоление которых при увеличении поверхности трещины затрачивается некоторая работа. Влиянием сил сцепления на поля упругих напряжений и деформаций пренебрегаем, так как оно существенно только в окрестности края трещины, имеющей размер порядка ширины концевой области.

Работа δA , затрачиваемая при переходе от действительного состояния к возможному, равна разности соответствующего приращения поверхностной энергии δU и освобождающейся упругой энергии δW

$$\delta A = \delta U - \delta W \quad (4.9)$$

Для того, чтобы действительное состояние упругой системы было равновесным, необходимо, чтобы δA обращалось в нуль, так что

$$\delta U = \delta W \quad (4.10)$$

Вполне аналогично разделу III, п. 2 получается выражение для δW

$$\delta W = \frac{2(1-\nu^2)\pi N_0^2 \delta S}{E} \quad (4.11)$$

Здесь N_0 — значение коэффициента интенсивности напряжений в точке *O*, вычисленное без учета сил сцепления. Формула (4.11) в несколько ином виде была установлена Ирвином [45–47].

Если вблизи данной точки контура форма концевой области трещины соответствует максимальной интенсивности сил сцепления, то по предыдущему при образовании новой поверхности трещины концевая область перемещается, не деформируясь, так что работа против сил сцепления при образовании единицы новой поверхности постоянна и равна поверхностному натяжению T_0 . Поэтому $\delta U = 2T_0\delta S$ (двойка объясняется образованием при разрыве двух поверхностей трещины). Отсюда из (4.10) и (4.11) получается

$$N_0 = \sqrt{\frac{ET_0}{\pi(1-v^2)}} \quad (4.12)$$

Сравнивая (4.12) и (4.6), получаем соотношение, связывающее независимо определенный согласно (4.3) модуль сцепления K с поверхностным натяжением T_0 и упругими константами материала E и v

$$K^2 = \frac{\pi ET_0}{1-v^2} \quad (4.13)$$

6. Экспериментальные подтверждения теории хрупкого разрушения. Квазихрупкое разрушение. Начиная с Гриффитса [3, 4], различные исследователи делали попытки осуществить опытную проверку теории хрупкого разрушения. Здесь не предполагается сколько-нибудь подробно анализировать все эти работы; остановимся только на нескольких, наиболее характерных, отсылая за подробностями и дискуссией многочисленных других исследований к специальным сочинениям [62, 55, 74–78].

В работе Гриффитса [3] приводятся описание и результаты следующих опытов. Трещины различной длины $2l$ наносились на стеклянные сферические колбы и цилиндрические трубы, диаметр которых D был достаточно велик, так что специальная проверка показала отсутствие влияния диаметра сосуда на результаты опытов. Затем трубы и колбы подвергались отжигу для снятия внутренних напряжений, образовавшихся при нанесении трещин, и нагружались изнутри гидравлическим давлением до разрушения. Измерялись напряжения разрушения в сосудах p_0 , соответствующие каждой длине трещины $2l$.

Согласно изложенной выше теории получается, что разрушающее напряжение p_0 , при котором данная трещина становится неустойчивой подвижно-равновесной, может зависеть только от длины трещины $2l$ и модуля сцепления K , так что из соображений анализа размерностей [79] вытекает, что $p_0 = aK / \sqrt{l}$, где a — безразмерная константа. Следовательно, для данного материала $p_0\sqrt{l}$ должно быть постоянным (в полном соответствии с (2.1)).

Опыты Гриффитса (таблица) хорошо подтверждают постоянство этой величины, и таким образом, подтверждают изложенную выше теоретическую схему.

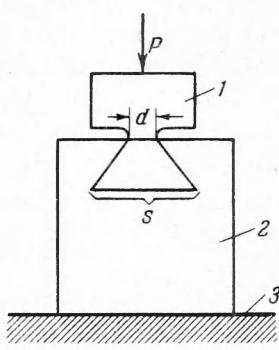
Таблица

Сферические колбы				Цилиндрические трубы			
$2l$ (дюймы)	D (дюймы)	p_0 (фунты/дюйм ²)	$p_0\sqrt{l}$	$2l$ (дюймы)	D (дюймы)	p_0 (фунты/дюйм ²)	$p_0\sqrt{l}$
0.15	1.49	864	237	0.25	0.59	678	240
0.27	1.53	623	228	0.32	0.71	590	232
0.54	1.60	482	251	0.38	0.74	526	229
0.89	2.00	366	244	0.28	0.61	655	245
				0.26	0.62	674	243
				0.30	0.61	616	238

Особый интерес для подтверждения теории хрупкого разрушения представляют замечательные по своему изяществу опыты Реслера [53] и Бен-

боу [54], в которых осуществлялись устойчивые конические трещины. Схема этих опытов приведена на фиг. 13; фотография конических трещин в плавленом кварце, заимствованная из статьи Бенбоу [54], дана на фиг. 14. Трещины образовывались вдавливанием стального цилиндрического индентора с плоским торцом в образец из стекла [53] и плавленого кварца [54].

В соответствии с изложенным выше диаметр s основания конической трещины может зависеть только от диаметра d_0 основания индентора, силы, прижимающей индентор P , модуля сцепления K и коэффициента Пуассона ν . Так как соответствующая задача теории упругости естественно формулируется так, что модуль Юнга из этой формулировки выпадает, в число определяющих параметров модуль Юнга включать не следует. Анализ размерностей дает



Фиг. 13

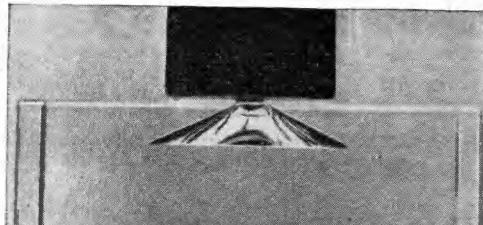
$$s = \left(\frac{P}{K} \right)^{2/3} \Phi \left[\frac{K^{3/2} d_0}{P^{2/3}}, \nu \right] \quad (4.14)$$

Здесь Φ — некоторая безразмерная функция своих аргументов.

Эксперименты, проведенные с инденторами трех диаметров на одиннадцати стеклянных образцах [53], хорошо подтверждают существование универсальной зависимости (4.14). Из (4.14) вытекает, что при больших P , когда влияние первого аргумента функции Φ становится пренебрежимо малым, имеет место «автомодельность» и выполняется соотношение

$$s = \left(\frac{P}{K} \right)^{2/3} \Phi_1(\nu) \quad (4.15)$$

На фиг. 15 изображен заимствованный из статьи Бенбоу [54] график зависимости s от P по данным опытов с плавленым кварцем, проведенных в условиях, соответствующих автомодельному режиму. Как видно, рассматриваемые опыты убедительно подтверждают зависимость (4.15) и тем самым подтверждают изложенную выше схему.



Фиг. 14

Описанные опыты были проведены на материалах, которые можно считать вполне хрупкими. Это особенно относится к плавленому кварцу. Бенбоу [54] приводит некоторые факты, свидетельствующие о том, что механизм образования трещин в плавленом кварце ближе к чисто хрупкому, нежели в стекле: трещины в стекле длительное время растут при постоянной нагрузке, в то время как в плавленом кварце их размер устанавливается быстро и затем остается неизменным; после снятия нагрузки трещины в стекле остаются отчетливо видными, а в кварце — незаметны и т. д.

Однако значение теории хрупкого разрушения оказалось далеко выходящим за пределы применимости ее к сравнительно редким чисто хрупким материалам. Экспериментальные исследования показали, что при образовании трещин некоторые материалы, которые при обычных испытаниях на растяжение ведут себя как вполне пластические тела, разрушаются так, что пластические деформации, хотя и имеют место, но сосредоточиваются в тонком слое вблизи поверхности трещины.

Так, Фельбек и Орован [28] проводили опыты по разрушению плит из малоуглеродистой стали с нанесенной трещиной в условиях, соответствующих схеме однородного растяжения Гриффита. Результаты опытов хорошо соответствуют формуле Гриффита, однако определенная из этих

опытов величина плотности поверхностной энергии оказалась примерно на три порядка превышающей поверхностное натяжение исследованного материала. Она удовлетворительно совпада с удельной работой пластических деформаций в приповерхностном слое трещины, определенной путем независимых измерений.

Основываясь на этом и аналогичных других экспериментальных результатах, Ирвин [23] и Орован [24] выдвинули концепцию квазихрупкого разрушения, позволившую сильно расширить пределы применимости теории хрупкого разрушения. Согласно этой концепции теория хрупкого разрушения распространяется на случаи, когда пластические деформации сосредоточиваются в тонком приповерхностном слое трещины. При этом энергия T , затрачиваемая на образование единицы поверхности трещины, выражается в виде суммы удельной работы против сил молекулярного сцепления — поверхностного натяжения — T_0 и удельной работы пластических деформаций T_1

$$T = T_0 + T_1 \quad (4.16)$$

Формальное распространение изложенного выше подхода на квазихрупкое разрушение осуществляется следующим образом (фиг. 16, заштрихована приповерхностная область пластических деформаций). Мысленно вырежем всю пластическую область и перенесем конец трещины

в конец пластической области. Это можно сделать, рассматривая силы, действующие со стороны пластической области на упругую, как внешние силы, приложенные к поверхности трещины. После этого все предыдущие рассуждения в предположении тонкости пластической области остаются без изменения, и, если снова воспользоваться гипотезой неизменности концевой области поверхности трещины (в которую уже включается граница упругой и пластической областей), то модуль сцепления выразится следующим образом:

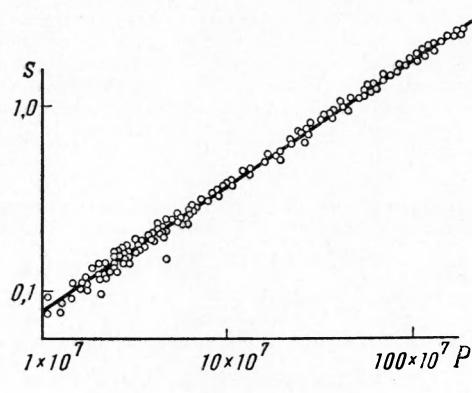
$$K = \sqrt{\frac{G(t) dt}{Vt}} = \sqrt{\frac{\pi ET}{1 - v^2}} \quad (4.17)$$

Здесь $G(t)$ — распределение нормальных напряжений, действующих на границе упругой и пластической областей.

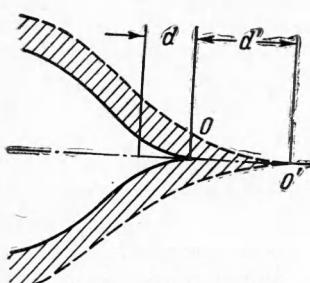
В случае, когда вкладом в интеграл (4.17) молекулярных сил сцепления можно пренебречь сравнительно со вкладом напряжений, действующих в области перед фактическим концом трещины и имеющих порядок предела текучести σ_0 , получаем оценку для модуля сцепления

$$K = \sqrt{\frac{\pi ET_1}{1 - v^2}} \approx 2\sigma_0 \sqrt{d'} \quad (4.18)$$

Подчеркнем, что предел текучести σ_0 вблизи конца трещины может отличаться от предела текучести, получающегося при испытании на растяжение больших образцов.



Фиг. 15



Фиг. 16

Концепция квазихрупкого разрушения в известной мере близка к концепции «пластической частицы» на концах выточек с нулевым радиусом кривизны, выдвинутой в классической монографии Нейбера [80].

Будем в дальнейшем говорить о трещинах хрупкого разрушения, имея в виду возможность распространения полученных результатов на случай квазихрупкого разрушения. Разумеется, при этом необходимо учитывать заведомую необратимость трещин квазихрупкого разрушения.

7. Трещины в тонких пластинках. Для тонких пластинок, когда можно считать, что имеет место плоское напряженное состояние, сохраняют силу все соотношения, выведенные для случая плоской деформации, если только заменить E на $E(1-\nu^2)$ и считать, что модуль сцепления имеет некоторое другое значение K_1 . Повторяя вывод формулы (4.13) для плоского напряженного состояния, получаем

$$K_1^2 = \pi ET \quad (4.19)$$

Отметим, что, как показывают опыты, плотность поверхностной энергии T в случае квазихрупкого разрушения обнаруживает некоторое возрастание с уменьшением толщины пластинок [48], что объясняется расширением приповерхностной области пластических деформаций. Попытка приближенного теоретического расчета этого явления сделана в работе Френклена [81].

Имея в виду полную аналогию формального исследования плоского напряженного состояния и плоской деформации, будем в дальнейшем рассматривать из этих двух случаев только плоскую деформацию.

V. КОНКРЕТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ РАВНОВЕСНЫХ ТРЕЩИН

В этом разделе рассматриваются имеющиеся в настоящее время решения конкретных задач теории трещин. Отдельные примеры носят иллюстративный характер, большинство же приводимых задач представляет самостоятельный интерес.

1. Изолированные прямолинейные трещины. В этом и следующем параграфах исследуются изолированные подвижно-равновесные трещины, на всем контуре которых достигается максимальная интенсивность сил сцепления. Задача для таких трещин приводится к определению соответствующих данной нагрузке контуров трещин так, чтобы на этих контурах удовлетворялось условие (4.6), и является частным случаем сформулированной выше задачи *B*. Предполагается, что начальные трещины обеспечивают возможность осуществления таких трещин; необходимые требования к начальным трещинам для обратимых и необратимых трещин легко вытекают из полученных решений.

Рассмотрим в условиях плоской деформации изолированную прямолинейную подвижно-равновесную трещину в безграничном теле, простирающуюся вдоль оси x от $x = a$ до $x = b$. Пусть $p(x)$ — распределение нормальных напряжений, которые возникают на месте трещины в сплошном теле при тех же нагрузках. Это распределение вычисляется обычными методами теории упругости, будем считать его заданным. Можно показать, используя решение Н. И. Мусхелишвили [2, 18], что растягивающие напряжения вблизи концов трещины, вычисленные без учета сил сцепления, обращаются в бесконечность по закону

$$\sigma_y = N / \sqrt{s} + \dots$$

где

$$N_a = \frac{1}{\pi \sqrt{b-a}} \int_a^b p(x) \sqrt{\frac{b-x}{x-a}} dx, \quad N_b = \frac{1}{\pi \sqrt{b-a}} \int_a^b p(x) \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx \quad (5.1)$$

— значения коэффициентов интенсивности напряжений, соответственно, для точек a и b . Удовлетворяя в этих точках условию (4.6), получаем соотношения, определяющие координаты концов трещины a и b в виде

$$\int_a^b p(x) \sqrt{\frac{b-x}{x-a}} dx = K \sqrt{b-a}, \quad \int_a^b p(x) \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx = K \sqrt{b-a} \quad (5.2)$$

В частности, если приложенная нагрузка симметрична относительно середины трещины, в которой удобно поместить начало координат, то $-a = b = l$ и уравнения (5.2) приводятся к одному соотношению, определяющему полудлину трещины l

$$\int_0^l \frac{p(x) dx}{\sqrt{l^2 - x^2}} = \frac{K}{\sqrt{2l}} \quad (5.3)$$

Подчеркнем, что так как $p(x)$ — заданная функция, (5.2) и (5.3) представляют собой конечные уравнения. Эти уравнения определяют положение концов изолированной прямолинейной подвижно-равновесной трещины при данной нагрузке, если эта нагрузка обеспечивает возможность существования такой трещины.

Масубути [82] был указан способ вычисления скорости освобождения упругой энергии $\partial W / \partial l$ для симметричной изолированной трещины, основанный на предложенном им тригонометрическом представлении напряжений $p(x)$ и смещений v точек поверхности трещины

$$p(x) = \frac{E}{4!} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \frac{\sin n\theta}{\sin \theta}, \quad v = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta, \quad x = l \cos \theta \quad (5.4)$$

Как показано Масубути

$$\frac{\partial W}{\partial l} = \frac{E\pi}{8l(1-\nu^2)} \sum_{n=1}^{\infty} (nA_n)^2 \quad (5.5)$$

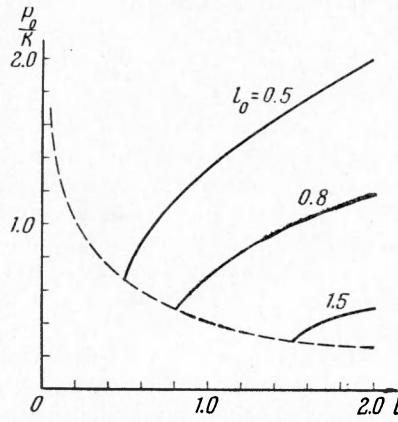
Приравнивая это выражение $4T$, где T — плотность поверхностной энергии, можно получить соотношение, связывающее приложенные напряжения и размер трещины, однако в форме, гораздо более сложной, чем (5.3).

Разберем некоторые примеры. Пусть трещина поддерживается в раскрытом состоянии однородным растягивающим напряжением, приложенным на бесконечности. Как уже отмечалось, впервые эта задача рассматривалась Гриффитсом [3, 4]. В этом случае $p(x) \equiv p_0$ и уравнение (5.3) дает

$$l = \frac{2K^2}{\pi^2 p_0^2} \quad (5.6)$$

Зависимость (5.6) изображена на фиг. 17 пунктиром. Как видно, размер подвижно-равновесной трещины уменьшается с увеличением растягивающего напряжения, что свидетельствует о неустойчивости подвижного равновесия трещины в данном случае. Несмотря на эту неустойчивость размер l , определяемый (5.6), имеет физический смысл. Именно, если в теле, к которому приложено на бесконечности постоянное растягивающее напряжение p_0 , имелась трещина длиной $2l_0$, то при $l_0 < l$ эта трещина не расширяется (и смыкается в случае обратимых трещин), а при $l_0 > l$ она беспрепятственно растет. Таким образом, размер l играет роль критического (подробнее об этом см. в разделе V, п. 3).

Очевидно, что неустойчивость подвижного равновесия в данном случае вполне соответствует существу дела и вопреки мнению, высказанному Я. И. Френкелем [5], не связана с неправильными представлениями Гриффитса о геометрии концов трещин.



Фиг. 17

Если напряжение на бесконечности отсутствует, а трещина поддерживается приложенным на части ее поверхности ($0 \leq x \leq l_0$) равномерно распределенным давлением, причем остальная часть поверхности трещины ($l_0 < x \leq l$) свободна от напряжений, то полудлина подвижно-равновесной трещины l находится из соотношения [58]

$$\sqrt{\frac{l}{l_0}} \arcsin\left(\frac{l_0}{l}\right) = \frac{K}{p_0 \sqrt{2l_0}} \quad (5.7)$$

Зависимость (5.7) изображена на фиг. 17 сплошными линиями, получающимися одна из другой подобным преобразованием. Очевидно, что раскрытие трещины, т. е. появление на ней свободного участка, возможно лишь при условии, что l_0 не меньше соответствующего размера подвижно-равновесной трещины, поддерживаемой в раскрытом состоянии однородным растягивающим напряжением на бесконечности p_0 , который определяется (5.6). Поэтому все сплошные линии фиг. 17 начинаются на пунктирной.

Любопытен предельный случай (5.7), соответствующий стремлению p_0 к бесконечности, а l_0 — к нулю, так что $2p_0 l_0 \equiv \text{const} = P$. Этот случай отвечает трещине, поддерживаемой в раскрытом состоянии сосредоточенными силами, приложенными в противоположных точках ее поверхности. Полудлина трещины определяется при этом соотношением

$$l = \frac{P^2}{2K^2} \quad (5.8)$$

Заметим, что (5.6) и (5.8) с точностью до постоянного множителя можно получить из соображений анализа размерности. В самом деле, например, размер трещины, поддерживаемой сосредоточенными силами, определяется только величиной P этих сил и суммарной характеристикой сил сцепления — модулем сцепления K . Очевидно, что модуль упругости и коэффициент Пуассона не входят в число определяющих параметров, так как соответствующая задача теории упругости естественно формулируется в напряжениях так, что эти характеристики не входят в определяющие параметры. Рассматривая размерности P и K видим, что из этих величин можно составить только одну комбинацию размерности длины — отношение P^2 / K^2 — и нельзя составить никаких безразмерных комбинаций. Таким образом, в силу основной теоремы анализа размерностей [79] длина подвижно-равновесной трещины должна быть пропорциональна P^2 / K^2 , причем коэффициент пропорциональности должен быть универсальной постоянной в полном соответствии с (5.8).

Пусть далее трещина поддерживается двумя равными и противоположно направленными сосредоточенными силами P , точки приложения которых отстоят на расстояние L вдоль общей линии действия сил; предполагается, что трещина перпендикулярна к линии действия сил и расположена симметрично [58].

Распределение растягивающих напряжений на месте трещины в сплошном теле имеет в этом случае вид

$$p(x) = \frac{PL}{2\pi(x^2 + L^2)} \left[1 - v + 2(1+v) \frac{L^2}{x^2 + L^2} \right] \quad (5.9)$$

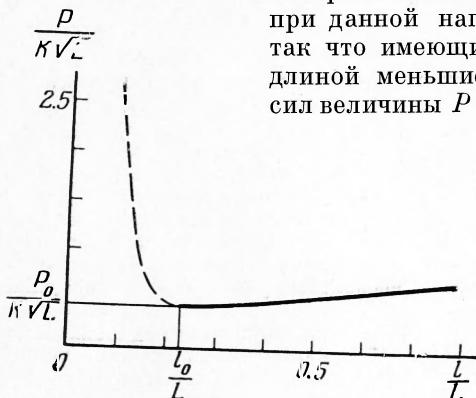
(начало координат берется в середине трещины — точке пересечения линии трещины и линии действия сил). Используя (5.3), получаем соотношение, определяющее размер трещины, в следующем виде:

$$\frac{P}{K\sqrt{L}} = \left(1 + \frac{L^2}{l^2}\right)^{3/2} \frac{\sqrt{2}}{[2 + (3+v)L^2/l^2]\sqrt{L/l}} \quad (5.10)$$

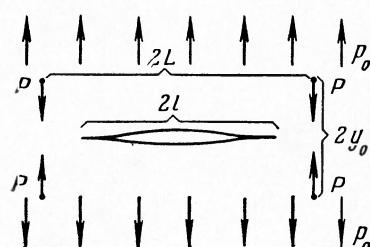
График зависимости $P / K\sqrt{L}$ от относительной длины трещины l/L для $v = 0.25$ представлен на фиг. 18. Как видно, при $P > P_0$ каждому

значению P соответствуют две длины подвижно-равновесной трещины. При этом с увеличением P меньшая длина уменьшается, а большая — увеличивается. Состояния подвижного равновесия, отвечающие меньшей длине, неустойчивы; соответствующая ветвь зависимости нагрузки от длины представлена на фиг. 18 пунктиром. Состояния подвижного равновесия, отвечающие большей длине, устойчивы; соответствующая ветвь изображена сплошной линией. Меньший размер l_0

при данной нагрузке P играет роль критического, так что имеющиеся в теле начальные трещины, длиной меньшие $2l_0$, под действием приложенных сил величины P не расширяются (в случае обратимых



Фиг. 18



Фиг. 19

трещин — смыкаются), а большие — расширяются вплоть до достижения трещиной второго (устойчивого) равновесного размера¹. При $P < P_0$ уравнение (5.10) не имеет решения, т. е. решения рассматриваемой задачи не существует. Это означает, что какой бы длины ни была начальная трещина, она не развивается при данной нагрузке в подвижно-равновесную трещину. Критической величине сил P_0 соответствует размер подвижно-равновесной трещины l_0 , отличный от нуля.

В работе Ромуальди и Сендерса [52] рассматривалась интересная задача о влиянии прикрепленных подкрепляющих ребер на распространение трещины. Эта задача схематизируется авторами следующим образом (фиг. 19). Бесконечная пластина растягивается однородным напряжением p_0 в направлении, перпендикулярном трещине. Действие заклепок и подкрепляющих ребер представляется двумя симметрично расположеными парами противоположно направленных сосредоточенных сил, по величине равных P , которые (для некоторого упрощения задачи) считаются заданными.

Подставляя соответствующее распределение напряжений в (5.3) и вычисляя² элементарные, хотя и несколько громоздкие интегралы, получаем связь приложенной нагрузки с полудлиной равновесной трещины l :

$$\begin{aligned} \frac{p_0 V L}{K} = & \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{P}{K \sqrt{L}} \bar{y}_0 \left[\frac{1-\nu}{A \sqrt{A-B+2}} + \frac{12(1+\nu) \bar{y}_0^2}{A^2(A+B-2) \sqrt{A-B+2}} + \right. \\ & \left. + \frac{2(1+\nu)(2B-A-4)}{A^2 \sqrt{A-B+2}} + \bar{y}_0^2 \frac{(1+\nu)(B+A)(2B-A-4)}{A^3(A+B-2) \sqrt{A-B+2}} \right] + \frac{\sqrt{2}}{\pi \sqrt{l}} \quad (5.11) \end{aligned}$$

$$\bar{y}_0 = \frac{y_0}{L}, \quad \bar{l} = \frac{l}{L}, \quad B = \bar{y}_0^2 + \bar{l}^2 + 1, \quad A = \sqrt{B^2 - 4\bar{l}^2}$$

Результаты расчета представлены на графике фиг. 20 для $\nu = 0.25$, $P / K \sqrt{L} = 0.2$ и нескольких значений параметра y_0 / L . Как видно, при

¹ Отметим, что на самом деле, вследствие динамических эффектов при расширении начального надреза, трещина может несколько «перескочить» через устойчивое равновесное состояние. Подробнее об этом см. ниже.

² Вычисление интегралов и численные расчеты для графика фиг. 20 выполнены В. З. Партоном и Е. А. Морозовой.

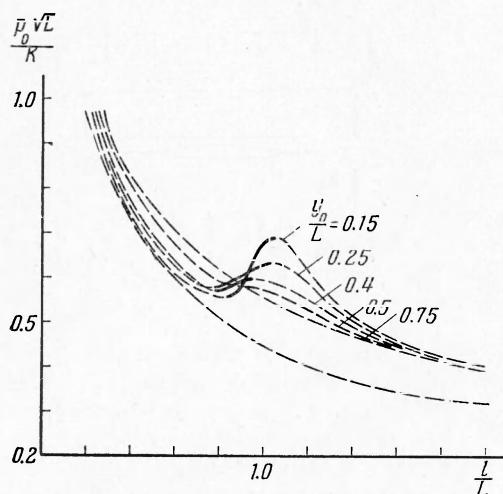
отсутствии подкрепляющих ребер подвижно-равновесные трещины неустойчивы. Влияние подкрепляющих ребер сказывается прежде всего в увеличении размера подвижно-равновесной трещины при данной нагрузке и, что особенно важно, в появлении при достаточно малых y_0 / L , т. е. при достаточно частом расположении заклепок, устойчивых состояний подвижного равновесия. Появление устойчивых состояний подвижного равновесия существенно меняет характер развития трещин (подробнее см. ниже).

Авторы экспериментально наблюдали переходы трещины от неустойчивых подвижно-равновесных состояний к устойчивым; их опыты, проведенные с плитами из алюминиевого сплава при наличии и при отсутствии подкрепляющих ребер, обнаруживают значительное увеличение при тех же ρ_0 размеров подвижно-равновесных трещин благодаря наличию подкрепляющих ребер. В [52] проведено также экспериментальное определение коэффициента интенсивности напряжений в концах трещины для нескольких устойчивых и неустойчивых подвижно-равновесных состояний. При отсутствии подкрепляющих ребер измерения коэффициентов интенсивности напряжений проводились прямым методом — по убыванию растягивающих напряжений вблизи концов трещины (на расстояниях, заведомо больших сравнительно с размером концевой области трещины). При наличии подкрепляющих ребер коэффициенты интенсивности напряжений измерялись косвенно. Обнаружено удовлетворительное совпадение значений коэффициентов интенсивности во всех случаях за исключением двух, где коэффициенты интенсивности оказались примерно на 15% меньшими. Однако эти два опыта, выполненные на одном и том же образце, в одном случае на устойчивой, а в другом — на неустойчивой трещине, дали значения коэффициентов интенсивности напряжений, близкие между собой. (Несколько меньшее значение коэффициента интенсивности на конце устойчивой трещины можно объяснить отмеченными авторами значительными динамическими эффектами при переходе к этому состоянию от неустойчивого.) Поэтому можно предполагать, что наблюденное отклонение связано с какими-то особенностями данного образца. Таким образом, эти опыты являются непосредственным подтверждением развитой выше общей схемы.

Проведенное рассмотрение непосредственно распространяется на прямолинейные трещины в анизотропной среде, располагающиеся в плоскостях симметрии материала. Задача о прямолинейной трещине в ортотропном бесконечном теле под действием однородного поля напряжений была рассмотрена Уилмором [21] и Стро [83]. В [83] проведено также распространение результатов [16] на случай прямолинейной трещины в анизотропном теле под действием произвольного поля напряжений, а также найдены коэффициенты интенсивности напряжений в концах трещины для этой задачи. В [84] найдено решение общей задачи о прямолинейной подвижно-равновесной трещине в ортотропном теле под действием произвольного симметричного относительно линии трещины поля напряжений.

2. Плоские осесимметричные трещины. Если в бесконечном теле под действием некоторой осесимметричной нагрузки поддерживается дискообразная подвижно-равновесная трещина радиуса R , то растягивающие напряжения вблизи контура трещины, вычисленные без учета сил сцепления, обращаются в бесконечность по закону

$$\sigma_y = \frac{N}{V^s}, \quad N = \frac{1}{\pi V^{R/2}} \int_0^R \frac{r_F(r) dr}{V^{R^2 - r^2}} \quad (5.12)$$



Фиг. 20

обращаются в бесконечность по закону

закону

где $p(r)$ — распределение растягивающих напряжений на месте трещины в сплошном теле под действием тех же нагрузок. Согласно общему условию (4.6) уравнение, определяющее радиус подвижно-равновесной трещины R , имеет вид

$$\int_0^R \frac{rp(r)dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = K \sqrt{\frac{R}{2}} \quad (5.13)$$

Это уравнение было установлено в [56, 57], его вывод основан на применении метода решения осесимметричных задач теории упругости при помощи интегрального преобразования Фурье — Ханкеля, развитого в работах Снеддона [14, 15]. В частности, если подвижно-равновесная трещина поддерживается в раскрытом состоянии однородным растягивающим напряжением на бесконечности p_0 , то $p(r) \equiv p_0$, и радиус подвижно-равновесной трещины определяется из соотношения

$$R = \frac{K^2}{8p_0^2} \quad (5.14)$$

Впервые эта задача была решена Заком [20] при помощи энергетического метода, в принципе вполне аналогично соответствующей плоской задаче, рассмотренной Гриффитсом [3, 4].

Если растягивающая нагрузка на бесконечности отсутствует, а трещина поддерживается в раскрытом состоянии равномерно распределенным по части ее поверхности $0 \leq r \leq r_0$ давлением p_0 , тогда как остальная часть поверхности трещины $r_0 < r \leq R$ свободна, то радиус подвижно-равновесной трещины находится из соотношения

$$\frac{p_0 \sqrt{r_0}}{K} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{r_0}{R} \right)^{-\frac{1}{2}} \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{r_0}{R} \right)^2} \right] \quad (5.15)$$

При этом, как и в плоском случае, радиус загруженной части поверхности трещины r_0 не должен быть меньше критического радиуса для данного давления p_0 , который определяется (5.14).

В частности, если дискообразная трещина поддерживается в раскрытом состоянии равными и противоположно направленными сосредоточенными силами P , приложенными на ее поверхности, то радиус подвижно-равновесной трещины определяется формулой

$$R = \left(\frac{P}{\sqrt{2}\pi K} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (5.16)$$

Соотношения (5.14) и (5.16) вполне аналогично плоскому случаю можно получить с точностью до безразмерного постоянного множителя из анализа размерностей.

Если дискообразная трещина поддерживается в раскрытом состоянии равными и противоположно направленными силами P , точки приложения которых отстоят одна от другой вдоль общей линии действия сил на расстоянии $2L$, то радиус подвижно-равновесной трещины R определяется из уравнения

$$\frac{P}{KL^{\frac{1}{2}}} = \pi \sqrt{2} \left(\frac{L}{R} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{L^2}{R^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{2-\nu}{1-\nu} \cdot \frac{L^2}{R^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (5.17)$$

Изложенные решения были получены в [56]; истолкование полученных соотношений вполне аналогично соответствующим случаям для прямолинейной трещины.

3. Исследование развития изолированных трещин при пропорциональном нагружении. Устойчивость изолированных трещин. В этом пункте рассматривается задача о развитии заданной изолированной начальной трещины при пропорциональном нагружении — частный случай задачи A. Проводится полное исследование для случая симметричных нагрузок и начальных трещин одновременно для прямолинейных и дискообразных

трещин. Рассматривается пример задачи о развитии несимметричной начальной трещины, выясняющий процедуру решения этой задачи.

При пропорциональном нагружении растягивающие напряжения на месте трещины в сплошном теле при тех же нагрузках пропорциональны параметру нагружения λ , так что $p(x) = \lambda f(x)$ и $p(r) = \lambda f(r)$ соответственно в случаях прямолинейной и дискообразной трещин. Вводя безразмеренную переменную ξ , равную соответственно в этих случаях x/l и r/R , приводим соотношения (5.3) и (5.12) к виду

$$\frac{\sqrt{2}\lambda}{K} = \varphi(c) \quad (5.18)$$

где $\varphi(c)$ определяется соответственно уравнениями

$$\varphi(c) = \left[\sqrt{c} \int_0^1 \frac{f(c\xi) d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right]^{-1}, \quad \varphi(c) = \left[\sqrt{c} \int_0^\infty \frac{f(c\xi) \xi d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right]^{-1} \quad (5.19)$$

а c означает полудлину трещины l или радиус трещины R . Таким образом, зависимость длины трещины от параметра λ пропорционального нагружения вполне определяется длиной начальной трещины и соответствующей данному распределению нагрузок функцией $\varphi(c)$.

Можно получить определенные результаты относительно поведения функции $\varphi(c)$ в самых общих предположениях. Исключим из рассмотрения случаи, когда трещина поддерживается сосредоточенными силами, приложенными на ее поверхности, и предположим, что трещина поддерживается в раскрытом состоянии любыми нагрузками, в частности, сосредоточенными силами, приложенными внутри тела и, быть может, распределенными нагрузками, приложенными на поверхности трещины. В этом случае функции $p(x)$, $p(r)$, а следовательно, и $f(c\xi)$ заведомо ограничены. При малых c получаем из (5.19) соответственно

$$\varphi(c) = \frac{2}{\pi f(0) \sqrt{c}} + \dots, \quad \varphi(c) = \frac{1}{f(0) \sqrt{c}} + \dots \quad (5.20)$$

Предположим, что растягивающие нагрузки, приложенные к телу с каждой стороны трещины, ограничены и для определенности равны λP . Тогда имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx &= \lambda P, & \int_0^{\infty} f(c\xi) d\xi &= \frac{P}{2c} \\ \int_0^{\infty} p(r) r dr &= \frac{\lambda P}{2\pi}, & \int_0^{\infty} f(c\xi) \xi d\xi &= \frac{P}{2\pi c^2} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Отсюда и из (5.19) получаются асимптотические представления при $c \rightarrow \infty$ для функций $\varphi(c)$ в обоих случаях

$$\varphi(c) = \frac{2 \sqrt{c}}{P} + \dots, \quad \varphi(c) = \frac{2\pi c^{3/2}}{P} + \dots \quad (5.22)$$

Таким образом, в сделанных предположениях $\varphi(c)$ стремится к бесконечности при $c \rightarrow 0$ и $c \rightarrow \infty$. В силу ограниченности $f(c\xi)$ интегралы в выражениях (5.19) не обращаются в бесконечность ни при каких c , поэтому $\varphi(c)$ никогда не обращается в нуль и, следовательно, имеет, по крайней мере, один положительный минимум и по одному участку убывания и возрастаания. Если приложенные к телу с каждой стороны трещины силы неограничены, то функция $\varphi(c)$ может не иметь участков возрастания и, следовательно, минимумов. Так будет, в частности, в случае однородного поля растягивающих напряжений, когда $p = \lambda p_0$ и

$$\varphi(c) = \frac{2}{\pi p_0 \sqrt{c}}, \quad \varphi(c) = \frac{1}{p_0 \sqrt{c}} \quad (5.23)$$

соответственно в случаях прямолинейной и осесимметричной трещин.

Равновесная трещина по определению будет устойчивой, если никакое достаточно малое изменение ее контура не приводит к возникновению сил, стремящихся еще более удалить тело от нарушенного состояния равновесия. Очевидно, что неподвижно-равновесные трещины всегда устойчивы. Для устойчивости подвижно-равновесной трещины нужно, чтобы ее размер возрастал с увеличением параметра нагружения λ . В самом деле, предположим, что с увеличением нагрузки соответствующий размер подвижно-равновесной трещины c возрастает. Уменьшим размер трещины, не изменяя нагрузки ($\lambda = \text{const}$), тогда сила, разрывающая трещину, будет больше равновесной. Поэтому равновесие нарушается и под действием избыточной силы трещина стремится расширяться. Наоборот, если размер трещины немного увеличен сравнительно с равновесным, то равновесие нарушается в обратном направлении и трещина, если она обратима¹, стремится сокнуться. Если же вблизи данного равновесного состояния с увеличением параметра λ равновесный размер трещины c уменьшается, то, очевидно, малое его изменение при постоянной нагрузке вызовет силы, усугубляющие дальнейшее отклонение от равновесного состояния. Соответствующее равновесное состояние будет неустойчивым. Итак, равновесное состояние трещины устойчиво, если для данных c и λ выполняется условие

$$\frac{dc}{d\lambda} > 0 \quad (5.24)$$

Дифференцируя (5.18) по λ , находим

$$\frac{dc}{d\lambda} - \frac{\sqrt{2}}{K\varphi'(c)} \quad (5.25)$$

Отсюда и из (5.24) получаем условие устойчивости состояния подвижного равновесия в виде

$$\varphi'(c) > 0 \quad (5.26)$$

Таким образом, устойчивы только те состояния подвижного равновесия, которые соответствуют участкам возрастания кривой $\varphi(c)$.

Теперь имеется все необходимое для полного исследования развития изолированной симметричной трещины при пропорциональном нагружении. Пусть рассматриваемой системе приложенных к телу нагрузок соответствует функция $\varphi(c)$, представленная на графиках фиг. 21.

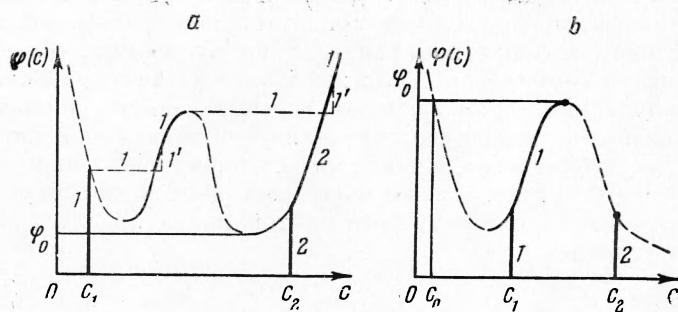
Рассмотрим сначала случай, когда при $c \rightarrow \infty \varphi(c) \rightarrow \infty$ (фиг. 21, а). Такой случай имеет место, в частности, когда нагрузки, приложенные с обеих сторон трещины, ограничены. Пусть размер начальной трещины c_1 соответствует неустойчивой ветви $\varphi(c)$. Тогда при увеличении параметра λ длина трещины остается постоянной, пока λ не достигнет величины, для которой начальная трещина размера c_1 становится подвижно-равновесной. Так как подвижное равновесие неустойчиво, трещина начинает затем расширяться при постоянной нагрузке, пока не достигнет ближайшего устойчивого равновесного состояния². При дальнейшем увеличении

¹ Если трещина необратима, то при увеличении ее размера обратного смыкания не происходит, однако не происходит и дальнейшего разрастания трещины. Равновесие при этом достигается за счет уменьшения сил сцепления, действующих в концевой области трещины.

² Благодаря динамическим эффектам, возникающим при этом переходе, трещина может расширяться до размера, несколько превышающего размер устойчивой подвижно-равновесной трещины, соответствующей данной нагрузке (по-видимому, именно это имело место в опытах, описанных в работе [52]). В этом случае при дальнейшем повышении нагрузки трещина сохраняет постоянную длину вплоть до того момента, когда она становится подвижно-равновесной, после чего продолжает расширяться. Естественно, что рассматриваемая чисто статическая теория не может описать этих динамических эффектов; соответствующие участки графика фиг. 21, а показаны штриховой линией и обозначены цифрой 1'.

λ размер трещины непрерывно возрастает вплоть до достижения нагрузки, соответствующей максимуму $\varphi(c)$, далее опять скачкообразно меняется при переходе на другую устойчивую ветвь, после чего непрерывно возрастает с ростом λ . Путь точки, изображающей изменение трещины, показан на фиг. 21, а цифрой 1.

Пусть теперь размер начальной трещины c_2 соответствует устойчивой ветви $\varphi(c)$. Тогда размер трещины остается неизменным вплоть до достижения нагрузки, при которой трещина становится подвижно-равновесной, после чего непрерывно возрастает. Путь изображающей точки показан на фиг. 21, а цифрой 2.



Фиг. 21

Как видно, в рассматриваемом случае разрушения тела не происходит ни при каких значениях параметра λ . Если λ меньше своего критического значения, соответствующего наименьшему из минимумов $\varphi(c)$, то как бы ни был велик размер начальной трещины, она не расширяется под действием данной нагрузки. Размер соответствующей этому критическому значению λ подвижно-равновесной трещины оказывается конечным.

Из сказанного следует, в частности, что если трещина поддерживается в раскрытом состоянии силами, приложенными внутри тела и, быть может распределенными нагрузками, приложенными на поверхности трещины, и если силы, приложенные с каждой стороны трещины, ограничены, то существует критическое значение параметра λ , а при всех значениях λ , больших критического, существует, по крайней мере, одно устойчивое и одно неустойчивое состояния подвижного равновесия.

Обратимся к случаю, когда $\varphi(c) \rightarrow 0$ при $c \rightarrow \infty$ (фиг. 21, б). Если размер начальной трещины c_1 соответствует устойчивой ветви $\varphi(c)$, то трещина не разрастается, пока не будет достигнута нагрузка, при которой начальная трещина становится подвижно-равновесной. После этого трещина непрерывно растет с ростом λ , пока не будет достигнуто значение параметра λ , соответствующее максимуму, при малейшем превышении которого решение задачи перестает существовать — наступает разрушение тела. Путь изображающей точки показан на фиг. 21 цифирой 1. Если размер начальной трещины c_2 соответствует правой неустойчивой ветви $\varphi(c)$, то при увеличении параметра λ разрастания начальной трещины не происходит, пока не достигается значение λ , для которого начальная трещина становится подвижно-равновесной. При малейшем превышении этого значения λ наступает разрушение тела. Если размер начальной трещины c_3 соответствует левой неустойчивой ветви кривой $\varphi(c)$, то при $c_3 < c_0$ трещина развивается так же, как ранее в случае 2; при $c_3 > c_0$ развитие трещины идет аналогично случаю 1 фиг. 21, а до достижения максимума, после чего происходит разрушение тела.

При других формах кривой $\varphi(c)$ исследование легко можно провести, комбинируя рассмотренные случаи. Знание функции $\varphi(c)$ дает возможность исчерпывающим образом описать развитие симметричной изоли-

рованной трещины в бесконечном теле при пропорциональном нагружении. В случае обратимых трещин можно проследить, пользуясь графиком $\varphi(c)$, изменение размера трещины и при немонотонном изменении нагрузки. Любопытно отметить, что в этом случае при уменьшении нагрузки скачкообразное уменьшение размеров трещины будет происходить, вообще говоря, при переходе через другие критические равновесные состояния, нежели при возрастании нагрузки.

В самое последнее время Л. М. Качановым [84a] выполнено исследование, обобщающее предыдущие рассмотрения на случай учета зависимости модуля сцепления от времени. Это исследование имеет принципиальное значение в связи с проблемами т. н. «длительной прочности».

Исследование, проведенное в настоящем параграфе, основано на работе [56].

Рассмотрим теперь для одного простого случая решение задачи о развитии несимметричной начальной трещины. Пусть в бесконечном ненагруженном теле задана прямолинейная начальная трещина с координатами концов $x = -a_0$ и $x = b_0$ (для определенности положим, что $b_0 < a_0$) и в противоположных точках поверхности трещины (которые можно считать соответствующими $x = 0$) приложены равные и противоположные сосредоточенные силы P . Величина силы P играет роль параметра нагружения. Согласно (5.1), значения коэффициентов интенсивности растягивающих напряжений N_a при $x = -a$ и $x = b$ равны соответственно

$$N_a = \frac{P}{\pi \sqrt{b+a}} \sqrt{\frac{b}{a}}, \quad N_b = \frac{P}{\pi \sqrt{b+a}} \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (5.27)$$

При $P < P_1$, где

$$\frac{P_1^2}{K^2} = \frac{(b_0 + a_0) b_0}{a_0} \quad (5.28)$$

оба коэффициента N_a и N_b меньше K/π , так что трещина не развивается ни справа, ни слева.

При $P = P_1$ коэффициент N_b становится равным величине K/π , трещина становится подвижно-равновесной и ее конец b начинает перемещаться направо, продвигаясь в зависимости от величины приложенной силы согласно соотношению

$$\frac{P^2}{K^2} = \frac{b(a_0 + b)}{a_0} \quad (5.29)$$

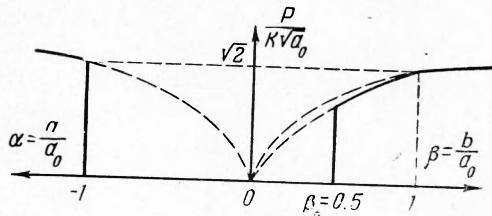
При этом, пока $P < P_2$, где

$$\frac{P_2^2}{K^2} = 2a_0 \quad (5.30)$$

коэффициент $N_a < K/\pi$ и левый конец трещины не двигается.

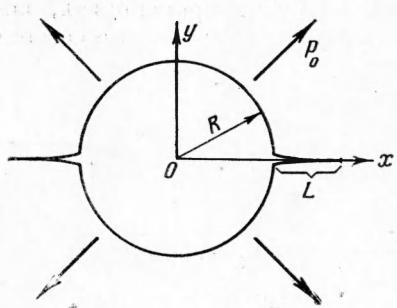
При $P = P_2$ имеем $b = -a_0$, так что трещина становится симметричной подвижно-равновесной трещиной, и при $P > P_2$ ее развитие продолжается согласно (5.8).

Развитие начальной трещины при изменении силы представлено на графике фиг. 22.



Фиг. 22

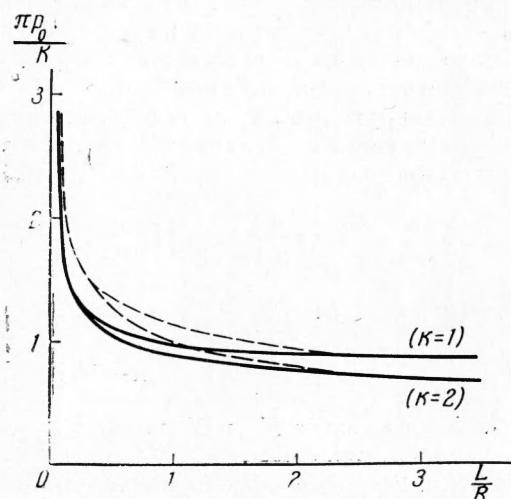
4. Трешины, выходящие на поверхность тела. Если трещина выходит на поверхность тела, то получение эффективных аналитических решений становится затруднительным. Дело в том, что отображение соответствующей области на полуплоскость не может быть осуществлено при помощи рациональных функций и метод Мусхелишвили не дает возможности получить эффективное решение в конечном виде; поэтому приходится прибегать к численным решениям.



Фиг. 23.

свободную поверхность кругового выреза в бесконечном теле (фиг. 23). Тело растягивается на бесконечности всесторонним растягивающим напряжением p_0 . Для расчета напряжений и деформаций Бови использовал метод Мусхелишвили. При этом, чтобы получить решение в эффективной форме, автор применил приближенное представление полиномами аналитической функции, осуществляющей отображение внешности окружности с примыкающими к ней разрезами на внешность единичного круга. Для определения размеров подвижно-равновесных трещин Бови непосредственно использовал энергетический метод Гриффитса, вычисляя скорость освобождения упругой энергии. Численные расчеты были проведены в этой работе для случаев одной трещины и двух диаметрально противоположных трещин, причем для обеспечения достаточной точности вычислений оказалось необходимым удерживать около тридцати членов в полиномиальном представлении отображающей функции. Результаты расчетов, проведенных Бови для случаев $k = 1$ и $k = 2$, представлены на фиг. 24, где пунктир отвечает соответствующим трещинам в бесконечном теле. Из этих расчетов вытекает, что при $L/R > 1$ разрывающее напряжение для двух трещин с круговой полостью очень близко к разрывающему напряжению для трещины длиной 2 ($L + R$), так что влияние собственно полости почти не оказывается. Далее, в случае малой длины трещин условия подвижного равновесия, очевидно, определяются разрывающими напряжениями непосредственно на поверхности круга. Как известно, в случае одноосного растяжения наибольшее разрывающее напряжение на границе полости равно $3p_0$, а в случае всестороннего растяжения $2p_0$. Отсюда вытекает, что отношение равновесных нагрузок в этих случаях должно приближаться к $2/3$, что и подтверждается расчетами Бови.

Задача о прямолинейной трещине, выходящей на прямолинейную свободную границу полупространства (фиг. 25), была независимо рассмотрена разными методами Уиглсуэртом [85] и Ирвином [51].



Фиг. 24

Уиглсуэрт [85] исследовал случай произвольного распределения нормальных и касательных напряжений по берегам трещины. При симметричном распределении напряжений он привел задачу к интегральному уравнению для комплексного смещения $w(x) = u(x) + iv(x)$ точек поверхности трещины

$$\int_0^l L(x, t) w(t) dt = -\frac{4(1-v^2)}{E} \int_0^x p(x) dx \quad (5.31)$$

Здесь $L(x, t)$ — некоторый сингулярный интегральный оператор, а $p(x) = \sigma(x) + i\tau(x)$; $\sigma(x)$ — распределение нормальных напряжений; $\tau(x)$ — распределение касательных напряжений. Уравнение (5.31) решается в работе [15] методом интегральных преобразований. Подробные вычисления делаются для случая, когда поверхности трещины и границы свободны от напряжений, а на бесконечности приложены растягивающие напряжения p_0 , параллельные границе полупространства.

Для напряжений вблизи конца трещины автор получает в этом частном случае соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 1.586 \sqrt{\frac{l}{s}} p_0 \sin \frac{\Phi}{2} \\ \sigma_x - \sigma_y + 2i\sigma_{xy} &= -0.793 \sqrt{\frac{l}{s}} p_0 \sin \Phi \exp \frac{3i\Phi}{2} \end{aligned} \quad (5.32)$$

На продолжении трещины ($\Phi = \pi$) находим

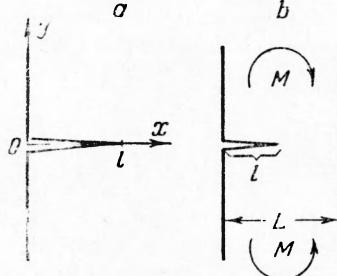
$$\sigma_x = \sigma_y = 0.793 p_0 \sqrt{\frac{l}{s}} + \dots, \quad \sigma_{xy} = 0 \quad (5.33)$$

Отсюда и из (4.6) выражение для длины подвижно-равновесной трещины записывается в виде

$$l = \frac{K^2}{\pi^2 (0.793)^2 p_0^2} = 1.61 \frac{K^2}{p_0^2} \quad (5.34)$$

Ирвин [51] исследовал только последний частный случай. Он представил искомое решение в виде суммы трех полей. Первое поле соответствует трещине ($-l \leq x \leq l, y=0$) в бесконечном теле под действием постоянных растягивающих напряжений p_0 на бесконечности, второе — такой же трещине под действием приложенных на ее поверхности симметричных относительно осей x и y нормальных напряжений $Q(x)$, третье — полупространству $x \geq 0$ без трещины, на границе $x=0$ которого задано симметричное относительно оси x распределение нормальных напряжений $P(y)$. Удовлетворяя граничные условия на свободной границе и поверхности трещины, Ирвин получил для $P(y)$ и $Q(x)$ систему интегральных уравнений

$$\begin{aligned} &\int_0^l Q(x) \frac{2\sqrt{l^2-x^2}y}{\pi(y^2+x^2)\sqrt{y^2+l^2}} \left(\frac{2y^2}{y^2+x^2} + \frac{y^2}{y^2+l^2} - 2 \right) dx + \\ &+ p_0 \left(\frac{2y}{\sqrt{y^2+l^2}} - \frac{y^3}{(y^2+l^2)^{3/2}} - 1 \right) = P(y) \\ &- 4 \int_0^\infty P(y) \frac{xy^2}{\pi(x^2+y^2)^{5/2}} dy = Q(x) \end{aligned} \quad (5.35)$$



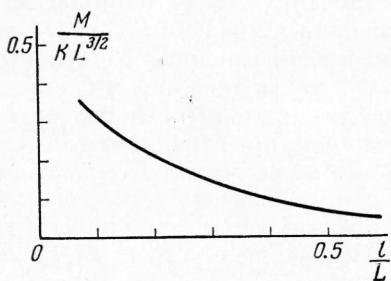
Фиг. 25

которую решал методом последовательных приближений. Первое приближение дает зависимость для длины подвижно-равновесной трещины l

$$l = \frac{2K^2}{\pi^2 1.095^2 p_0^2} = 1.69 \frac{K^2}{p_0^2} \quad (5.36)$$

как видно, незначительно отличающуюся от более точной зависимости (5.31).

Бюкнер [50] рассмотрел задачу об одной прямолинейной трещине, выходящей на границу круговой полости в бесконечном теле. На бесконечности и на границе полости напряжение не приложено, на поверхности трещины касательные напряжения отсутствуют, а нормальные — приложены симметрично и меняются по произвольному заданному закону — $p(x)$. Такая постановка задачи возникает при расчете разрыва вращающихся дисков. Как и Уиглсуэрт [85] (работа Бюкнера выполнена независимо), Бюкнер исходил из сингулярного интегрального уравнения для поперечного смещения точек поверхности трещины. Он построил однопараметрическое семейство частных решений этого уравнения, соответствующих некоторым специальным распределениям $p_n(x)$. В общем случае предлагается представить $p(x)$ в виде линейной комбинации $p_n(x)$



Фиг. 26

$$p(x) = \sum_{n=0}^{n=m} \alpha_n p_n(x) \quad (5.37)$$

коэффициенты α_n определяются по методу наименьших квадратов или по методу коллокаций. Коэффициент интенсивности напряжений на конце трещины N_0 выражается через коэффициенты α_n .

Если длина трещины много меньше радиуса круговой полости, то в пределе получается рассмотренный выше частный случай прямолинейной границы. Как вытекает из расчетов Бюкнера в этом частном случае, при $p \equiv p_0 = \text{const}$ выражение для длины подвижно-равновесной трещины имеет вид

$$l = \frac{2K^2}{\pi^2 1.13^2 p_0^2} = 0.159 \frac{K^2}{p_0^2} \quad (5.38)$$

что хорошо согласуется с (5.34) и (5.36).

В [36] Бюкнер рассмотрел также задачу о трещине, выходящей на поверхность бесконечно длинной полосы конечной ширины при произвольной симметричной относительно линии трещины нагрузке (фиг. 25, б). Он показал, что с высокой степенью точности можно заменить получающееся в этом случае интегральное уравнение уравнением с вырожденным ядром. Проведенное Бюкнером численное решение для частного случая, когда нагрузка создается парами с моментами M , приложенными с обеих сторон трещины на бесконечности, дает зависимость длины подвижно-равновесной трещины от нагрузки, представленную кривой фиг. 26.

Как уже отмечалось, во всех случаях, рассмотренных в этом параграфе, подвижно-равновесные трещины неустойчивы. Таким образом, при повышении нагрузок развитие начальной трещины не происходит, пока она не становится подвижно-равновесной, после чего происходит разрушение тела. Таким образом, в этих задачах нагрузка, при которой начальная трещина становится подвижно-равновесной, совпадает с разрушающей, что, вообще говоря, не имеет места.

В работе Винна и Вундта [32] некоторые из приведенных в этом параграфе решений были применены для расчета разрушения вращающихся надрезанных дисков и надрезанных балок при изгибе. Проведенные Винном и Вундтом опыты, обработанные на основе этих расчетов, обнаружили близкое совпадение значений плотности поверхностной энергии T (или, что сводится к тому же, модулей сцепления K), определенных по величине угловой скорости, при которой происходит разрушение вращающихся

надрезанных дисков, и по величине нагрузок, при которых происходит разрушение надрезанных балок при изгибе. Это подтверждает, что величины T и K являются характеристиками материала и не зависят от вида напряженного состояния.

5. Трещины вблизи границ тела. Системы трещин. Развитие трещин в ограниченных телах обладает рядом характерных особенностей. Трудности математического характера не позволяют провести здесь столь же исчерпывающего исследования как в случае изолированных трещин. Однако качественные особенности и некоторые количественные характеристики этого явления можно вполне выяснить на простейших задачах, поддающихся аналитическому решению. Остановимся, прежде всего, на задаче о прямолинейной трещине в полосе конечной ширины (фиг. 27, a). Трещина предполагается симметричной относительно средней линии полосы, направление ее распространения — нормальным к свободной границе. Нагрузку, поддерживающую трещину в раскрытом состоянии, считаем симметричной относительно линии трещины и средней линии полосы.

При решении задачи используем метод последовательных приближений, развитый Д. И. Шерманом [86] и С. Г. Михлиным [87]. В качестве первого приближения берется решение задачи теории упругости для внешности периодической системы разрезов (фиг. 27, b). Обозначая снова через $p(x)$ распределение разрывающих напряжений, которое было бы на месте трещин в сплошном теле при тех же нагрузках, получаем уравнение, определяющее полудлину подвижно-равновесной трещины l в виде

$$\int_{-m}^m p[t_0(t)] \sqrt{\frac{m+t}{m-t}} dt = K \sqrt{\frac{\pi m}{2L}}, \quad t = \sin \frac{\pi t_0}{2L}, \quad m = \sin \frac{\pi l}{2L} \quad (5.39)$$

В частном случае, изображенном на фиг. 27, когда трещина поддерживается равными и противоположно направленными сосредоточенными силами P , точки приложения которых отстоят на $2s$ вдоль их общей линии действия, (5.39) принимает вид

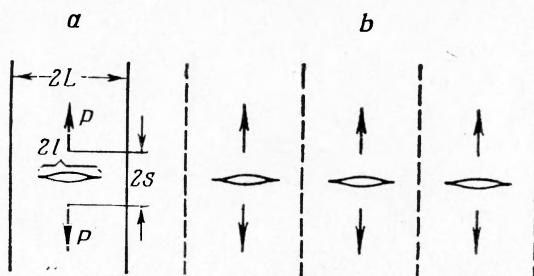
$$\frac{P}{K \sqrt{L}} = \frac{\sqrt{8(\alpha^2 + 1)} \sin(\pi l / L)}{\sqrt{\pi} \operatorname{ch} \sigma \left[1 - v + (1 + v) \frac{\sigma(2\alpha^2 + 1) \operatorname{ch} \sigma}{\alpha(\alpha^2 + 1)m} \right]} \quad (5.40)$$

где $\alpha = \operatorname{sh} \sigma / m$, $\sigma = \pi s / 2L$. В частности, при $s = 0$, когда сосредоточенные силы приложены на поверхности трещины, (5.40) представляется следующим образом:

$$\frac{P}{K \sqrt{L}} = \sqrt{\frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi l}{L}} \quad (5.41)$$

Зависимость размера подвижно-равновесной трещины от нагрузки для случая однородного растягивающего напряжения на бесконечности, равного $P / 2L$, имеет вид

$$\frac{P}{K \sqrt{L}} = \sqrt{\frac{2}{\pi} \operatorname{ctg} \frac{\pi l}{2L}} \quad (5.42)$$



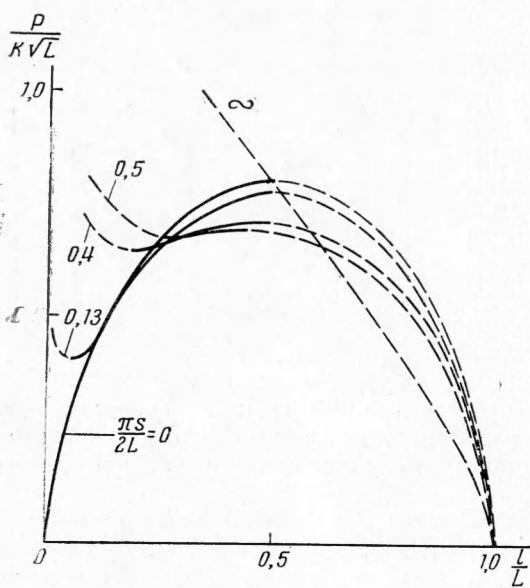
Фиг. 27

Зависимость (5.40) для различных σ представлена на фиг. 28. Сплошными линиями, как обычно, обозначены устойчивые участки, пунктиром — неустойчивые. Как видно, при $\sigma \geq \sigma_c \approx 0,5$ кривые устойчивых участков не имеют, так что при расстоянии между точками приложения сил, превышающем $2L/\pi \approx 0.64 L$, подвижно-равновесные трещины всегда неустойчивы. Вполне аналогично проведенному в разделе V, п.3 исследованию развития изолированной трещины при пропорциональном нагружении

график фиг. 28 дает возможность исчерпывающе охарактеризовать развитие любой симметричной начальной трещины при увеличении нагрузки.

Проведенное исследование основано на работах [58, 88]. Решение задачи теории упругости для случая $s = 0$ было получено Ирвином [45]. Решение задачи для периодической системы трещин при однородной нагрузке на бесконечности было дано Вестергардом [13] и, независимо, Кайтером [89].

При использовании первого приближения на линиях симметрии (отмеченных на фиг. 27 пунктиром), соответствующих границам полосы, в нуль обращаются только касательные напряжения, а



Фиг. 28

нормальные напряжения отличны от нуля. Для получения второго приближения первое приближение суммируется с решением задачи для сплошной полосы, на границах которой заданы нормальные напряжения, распределение которых выбирается так, чтобы компенсировать нормальные напряжения, получившиеся на границе в первом приближении. При этом уже не удовлетворяется граничное условие на поверхности трещины. Для получения третьего приближения второе приближение суммируется с решением задачи для внешности периодической системы разрезов, на поверхности которых задано распределение нормальных напряжений, равных разности заданного и полученного во втором приближении, и т. п.

Проведенные специальные оценки [88] показали, что в рассмотренной задаче для устойчивых подвижно-равновесных состояний учет второго и следующих приближений приводит в интересующих нас зависимостях к поправкам порядка 2.5—3%, что позволяет ограничиться первым приближением.

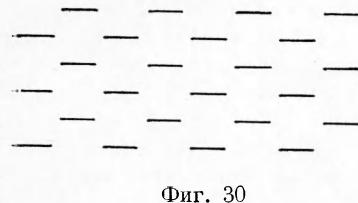
Помимо изложенных выше задач о периодической системе трещин и о системе радиальных трещин, выходящих на границу круговой полости, рассмотрено еще несколько задач о системах трещин, относящихся к прямолинейным трещинам, расположенным вдоль одной прямой. Математические методы, развитые Н. И. Мусхелишвили [90, 18], Д. И. Шерманом [91], Вестергардом [13], позволяют свести к вычислению квадратур задачу о развитии любой системы трещин такого вида. Остановимся здесь на простейшем примере задачи о развитии системы из двух коллинеарных прямолинейных трещин одинаковой длины в бесконечном теле, растягиваемом на бесконечности однородными напряжениями p (фиг. 29). Эта задача была рассмотрена Уилмором [21] и в работе Винна и Вундта [32] (авторы [32] ссылаются на частное сообщение Ирвина). Решение Уилмора

содержит неточности в исходном представлении решения, повлиявшие на окончательные формулы. Согласно решению, приведенному в [32], размеры трещин остаются неизменными при $p < p_1$, где

$$p_1 = \sqrt{\frac{2}{b}} \frac{K}{\pi} \left\{ \frac{4\sqrt{\alpha(1+\alpha)}}{\sqrt{1-\alpha(1+3\alpha)}} \right\}, \quad \alpha = \frac{a}{b} < 1 \quad (5.43)$$

При $p = p_1$ трещины достигают неустойчивого состояния подвижного равновесия, после чего внутренние концы трещин соединяются, образуя трещину длиной $2b$. Дальнейшее развитие трещины зависит от того, будет ли выражение в фигурных скобках больше или меньше единицы. Если оно меньше единицы, что имеет место при $\alpha < 0.085$, то размер получившейся после соединения внутренних концов трещины меньше соответствующего нагрузке p_1 размера подвижно-равновесной трещины. В этом случае трещина остается неизменной до достижения нагрузки $p_2 = \sqrt{2K/\pi} \sqrt{b}$, после чего происходит разрушение тела. Если выражение в фигурных скобках больше единицы, то при достижении нагрузки p_1 сразу происходит полное разрушение тела. Полагая $b - a = 2l$ и переходя в (5.43) к пределу при $b \rightarrow \infty$, получаем, как и следовало ожидать, (5.6).

Случай, когда две одинаковые трещины поддерживаются в раскрытом состоянии приложенными на их поверхности сосредоточенными силами, рассмотрен в [88]. Полное исследование общего случая симметричного нагружения для системы двух трещин можно вполне аналогично предыдущему, выполнить, располагая выражениями коэффициентов интенсивности напряжений в концах трещин $x = a$ и $x = b$.



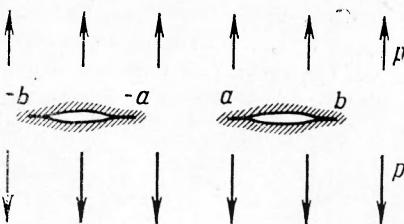
$$N_a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a(b^2 - a^2)}} \int_a^b p(t) t \sqrt{\frac{b^2 - t^2}{t^2 - a^2}} dt \quad (5.44)$$

$$N_b = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{b(b^2 - a^2)}} \int_a^b p(t) t \sqrt{\frac{t^2 - a^2}{b^2 - t^2}} dt$$

Фиг. 30

Как видно из рассмотренных примеров, коллинеарные трещины взаимно «ослабляются» и уменьшают устойчивость одна другой. Я. Б. Зельдович обратил внимание на то, что в случае «шахматного» расположения трещин (фиг. 30) имеет место обратное явление. Как показывают расчеты, даже в случае однородных нормальных нагрузок на поверхности трещин подвижно-равновесные трещины могут при определенном взаимном расположении оказаться устойчивыми.

Остановимся кратко на так называемом «масштабном эффекте» при хрупком разрушении ограниченных тел. Рассмотрим геометрически похожие тела (предполагается, что имеющиеся в телах макроскопические трещины также геометрически подобны), отличающиеся между собой только характерным размером d и характерным масштабом приложенных разрушающих нагрузок S . Величина $S = S_0$, соответствующая разрушению тела, в предположении, что разрушение является хрупким, зависит только от характерного размера тела d и модуля сцепления K . Из величин K и d можно единственным образом составить характеристику раз-



Фиг. 29

мерности S и нельзя составить никаких безразмерных комбинаций. Поэтому имеют место простые зависимости для величины разрушающей нагрузки

$$S_0 = \varepsilon_1 K d^{3/2}, \quad S_0 = \varepsilon_2 K d^{1/2}, \quad S_0 = \varepsilon_3 K d^{-1/2} \quad (5.45)$$

соответственно для случаев, когда S имеет размерность силы; силы, распределенной по линии (как, например, сосредоточенные силы при плоской деформации) и напряжения. Величины ε постоянны для данной геометрической конфигурации тела. В настоящее время имеется большое количество экспериментальных данных о разрушении геометрически подобных тел, позволяющих выяснить пределы применимости теории хрупкого разрушения. Подобную информацию по этому поводу можно найти в статье Вундта [92], некоторые новые результаты приведены в работе Юсуфа [93].

6. Трещины в горных породах. Для теоретической геологии значительный интерес представляет исследование развития трещин в горных массивах. Трещины могут образовываться в них под влиянием различных причин тектонического характера, а также в результате тех или иных искусственных воздействий (горные выработки, гидравлический разрыв пластов и т. п.).

Ряд задач теории трещин был рассмотрен в связи с теорией гидравлического разрыва нефтеносного пласта. Задача о вертикальной трещине заключается в следующем. Трещина в бесконечном пространстве, сжатом на бесконечности всесторонним давлением q , поддерживается в раскрытом состоянии нагнетаемой внутрь трещины вязкой жидкостью (фиг. 31). Основной особенностью задачи является то, что жидкость заполняет трещину неполностью: впереди смоченной области всегда имеется свободный участок трещины. Давление жидкости в смоченной области трещины p_0 можно в первом приближении считать постоянным, так как в конце смоченной области имеет место резкое сужение трещины и почти весь перепад давления жидкости теряется в конце смоченной области. Название задачи связано с тем, что схематизируемая рассматриваемой задачей трещина располагается в вертикальной плоскости, а q представляет собой боковое давление горных пород. По сравнению с действием бокового горного давления и давления жидкости действием сил сцепления можно, как показывают проведенные оценки, пренебречь¹. Условие (5.3), определяющее размеры трещины, принимает вид

$$\int_0^l \frac{p(x) dx}{\sqrt{l^2 - x^2}} = 0, \quad p(x) = \begin{cases} p_0 - q & (0 \leq x \leq l_0) \\ -q & (l_0 < x \leq l) \end{cases} \quad (5.46)$$

Отсюда получаем

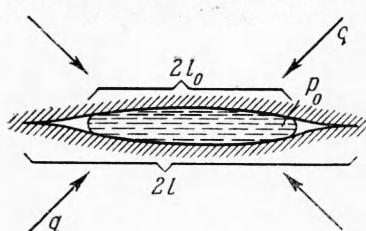
$$l = l_0 \left[\sin \frac{\pi q}{2p_0} \right]^{-1} \quad (5.47)$$

Выражение для максимального полураскрытия трещины v_0 имеет вид

$$v_0 = \frac{8(1-v^2)p_0l_0}{\pi E} \ln \operatorname{ctg} \frac{\pi q}{4p_0} \quad (5.48)$$

Как показывают расчеты, при обычно встречающихся близких к единице значениях l_0 / l , раскрытие трещины почти постоянно на всем про-

¹ Условием иренебрежимой малости сил сцепления будет $K/qVl \ll 1$. Оно, вообще говоря, не выполняется при лабораторном моделировании.



Фиг. 31

тяжении смоченной области трещины; на протяжении свободной части трещина быстро смыкается. Задача о вертикальной трещине была впервые поставлена и решена в работе Ю. П. Желтова и С. А. Христиановича [38].

Задача о горизонтальной трещине [40] ставится следующим образом. В тяжелом полупространстве, на некоторой глубине H также посредством закачки вязкой жидкости образуется горизонтальная дискообразная трещина; поверхность трещины снова разбивается на смоченную ($0 \leq r \leq R_0$) и свободную ($R_0 < r \leq R$) части; давление жидкости p в смоченной части можно считать постоянным. Силами сцепления, как и в предыдущем случае, пренебрегается. В предположении, что глубина расположения трещины H достаточно велика, граничное условие на границе полупространства не принимается во внимание. Условие конечности напряжений на контуре трещины дает в этом случае

$$\frac{p - \gamma H}{p} = \sqrt{1 - \left(\frac{R_0}{R}\right)^2} \quad (5.49)$$

где γ — удельный вес породы. Для объема закачанной жидкости получается соотношение

$$V = \frac{4(1-\nu^2)pR^3}{E} \Phi\left(\frac{R_0}{R}\right), \quad \Phi(z) = z^3 \left[\frac{2}{3} - \frac{z}{3} - \frac{z}{3(1 + \sqrt{1-z^2})} \right] \quad (5.50)$$

Практически $z = R_0 / R$ близко к единице, так что можно пользоваться асимптотической формой (5.50)

$$V = \frac{4(1-\nu^2)pR^3}{3E} \sqrt{2(1-z)} \{1 + \sqrt{2(1-z)} - 3(1-z)\} \quad (5.51)$$

Максимальное полураскрытие трещины определяется по формуле

$$v_0 = \frac{8(1-\nu^2)pR_0}{\pi E} \arccos\left(\frac{R_0}{R}\right) \quad (5.52)$$

Таким образом, зная глубину залегания трещины, давление жидкости и удельный вес разрываемой породы, можно по (5.49) найти R_0 / R , откуда и из (5.51), зная полный объем закачанной жидкости V , можно получить радиус трещины R , после чего определение остальных параметров трещины не встречает затруднений.

В [40, 41] были рассмотрены также задачи о горизонтальных трещинах в переменном по радиусу поле давления вышележащих пород. При некоторых условиях в этом случае может иметь место полное смачивание поверхности трещины, т. е. отсутствие свободного участка этой поверхности.

Ю. П. Желтовым [43] был указан приближенный метод решения задачи о горизонтальной трещине в переменном по радиусу поле вертикального давления. Проведено сравнение результатов расчетов по этому методу с точными решениями для некоторых случаев, показавшее вполне удовлетворительное совпадение.

Используя метод последовательных приближений, Ю. А. Устинов [94] провел оценку влияния свободной границы в задаче о горизонтальной трещине. Оказалось, что если глубина более чем в два раза превосходит радиус трещины, то влияние свободной границы пренебрежимо мало.

Задача о трещине, образующейся при расклинивании тяжелого пространства горизонтальным клином постоянной толщины в связи с проблемой оседания кровли при горных выработках, рассмотрена в [39].

Решение задачи о вертикальной трещине обобщено Ю. П. Желтовым [42] на случай, когда разрываемая порода проницаема и закачиваемая жидкость фильтруется через породу.

VI. РАСКЛИНИВАНИЕ. ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ТРЕЩИН

1. Расклинивание бесконечного тела. Под расклиниванием понимается образование трещин в твердом теле при забивании в него жесткого клина. Наиболее характерным свойством расклинивания хрупкого тела является то, что поверхность клина никогда полностью не соприкасается с телом: в передней части клина всегда имеется свободный участок и перед клином образуется свободная трещина, которая смыкается на некотором расстоянии от передней точки клина (фиг. 32).

Задача о расклинивании бесконечного тела неподвижным клином [39, 58, 95] является, по-видимому, наиболее простой по постановке такого рода задач; она допускает эффективное точное решение методами теории упругости и позволяет качественно судить о расклинивании при более сложных условиях.

Пусть, таким образом, однородное изотропное хрупкое тело

расклинивается тонким симметричным абсолютно жестким полубесконечным клином, имеющим на бесконечности толщину $2h$ (фиг. 32). Впереди клина образуется свободная трещина, которая плавно смыкается в некоторой точке O ; положение точки O относительно передней точки клина C заранее неизвестно и должно быть определено в ходе решения задачи. Если клин имеет закругленную переднюю часть (фиг. 32, a), то положение точек схода поверхности трещины с клина B и B' заранее неизвестно и также должно быть определено в ходе решения задачи. Если же клин имеет срезанную переднюю часть (фиг. 32, b), как, например, в случае клина постоянной толщины, то положение точек схода вполне определено — они совпадают с углами передней части клина. Однако, очевидно, напряжения в точках схода в этом случае бесконечны. Примем сначала силы трения на поверхности соприкосновения клина с расклиниваемым телом равными нулю.

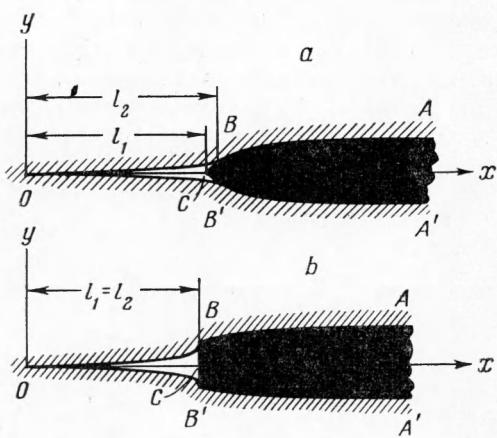
Поле упругих напряжений и деформаций удовлетворяет во внешности трещины обычным уравнениям статической теории упругости. Ввиду сделанного предположения о тонкости клина можно снести граничные условия со всей поверхности трещины на разрез $ABOB'A'$. Без учета сил сцепления граничные условия записываются в виде

$$\sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_y = 0 \quad (0 \leq x < l_2, \quad y = 0) \quad (6.1)$$

$$v = \pm f(x - l_1), \quad \sigma_{xy} = 0 \quad (l_2 \leq x < \infty, \quad y = 0)$$

Здесь σ_y, σ_{xy} — компоненты тензора напряжений; l_1 и l_2 — расстояния от точки смыкания трещины соответственно до передней точки клина и до точек схода поверхности трещины с клина; $f(t)$ — функция, определяющая уравнение поверхности клина в системе координат с началом в передней точке клина, т. е. функция, определяющая форму клина; знаки плюс и минус соответствуют верхнему и нижнему берегам разреза.

Как видно, задача о расклинивании представляет собой своеобразную комбинацию контактной задачи теории упругости [18, 72, 73] и задачи теории трещин.



Фиг. 32

Положение точек схода поверхности трещин с клина в случае клина с закругленной передней кромкой и положение точек смыкания трещины относительно передней точки клина определяются из следующих двух условий.

1°. Напряжения в точках схода поверхности трещины с клина должны быть конечны. Для контактной задачи аналогичное условие было впервые предложено в форме гипотезы Н. И. Мусхелишвили [96, 18] и А. В. Бицадзе [97]; оно доказано в [61].

2°. Напряжения в конце трещины конечны, или, что то же, имеет место плавное смыкание противоположных берегов трещины на ее конце. Так как интенсивность сил сцепления в конце трещины максимальна, напряжения вблизи конца трещины, вычисленные без учета сил сцепления, должны стремиться к бесконечности согласно (4.8).

Задача о расклинивании — смешанная задача теории упругости. Для ее решения удобно рассмотреть сингулярное интегральное уравнение для сжимающих усилий на щеках забиваемого клина $\sigma_y = -\Phi(x)$. При известном $\Phi(x)$ определение поля упругих элементов, очевидно, приводится к решению первой краевой задачи теории упругости для внешности полубесконечного прямолинейного разреза, которое можно выполнить по методу Мусхелишвили ([18], § 95). Это решение дает выражение для поперечных смещений в точках соприкосновения клина с поверхностью трещины

$$v = \frac{4(1-v^2)}{\pi E} \int_{l_2}^{\infty} \Phi(\sigma^2) \sigma \ln \left| \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \right| d\sigma \quad (6.2)$$

где $\zeta = \sqrt{x}$, причем корень принимает оба значения — положительное и отрицательное, давая смещения соответственно верхнего и нижнего берегов разреза. Второе условие (6.1) дает основное интегральное уравнение задачи

$$\int_{l_2}^{\infty} \Phi(\sigma^2) \sigma \ln \left| \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \right| d\sigma = \pm \frac{\pi E}{4(1-v^2)} f(\zeta^2 - l_1) \quad (6.3)$$

которое, как можно показать, эквивалентно сингулярному интегральному уравнению, получающемуся из (6.3) дифференцированием по ζ

$$\int_{|\sigma| > l_2} \frac{\Phi(\sigma^2) \sigma d\sigma}{\sigma - \zeta} = \pm \frac{\pi E}{2(1-v^2)} \zeta f'(\zeta^2 - l_1) \quad (6.4)$$

и условию

$$\Phi(x) = \frac{Eh}{2\pi(1-v^2)x} + O(x^{-2}) \quad \text{при } x \rightarrow \infty \quad (6.5)$$

где $h = f(\infty)$. Используя методы решения сингулярных интегральных уравнений, развитые в монографии Н. И. Мусхелишвили [19], решение уравнения (6.4) можно получить в виде

$$\Phi(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{x(x-l_2)}} \left[A - \frac{E}{2(1-v^2)} \int_{l_2}^{\infty} \frac{f'(t-l_1) \sqrt{t(t-l_2)}}{t-x} dt \right] \quad (6.6)$$

Здесь A — пока неопределенная константа. Интеграл в (6.6) ввиду конечности $f(\infty) = h$ заведомо существует и стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$, откуда и из (6.5) получается значение константы A

$$A = \frac{Eh}{2(1-v^2)} \quad (6.7)$$

Для конечности напряжений в точках схода $x = l_2$ в случае клина с закругленным концом необходимо и достаточно обращение в нуль при $x = l_2$ выражения в квадратных скобках в (6.6). Это дает первое из уравнений для определения l_1 и l_2

$$h = \int_{l_2}^{\infty} f'(t - l_1) \sqrt{\frac{t}{t - l_2}} dt \quad (6.8)$$

Далее, из решения получается следующее выражение для растягивающих напряжений на продолжении разреза:

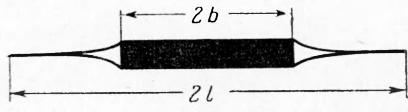
$$\sigma_y = \frac{E}{2\pi(1-\nu^2)\sqrt{(l_2-x)(-x)}} \left[h - \int_{l_2}^{\infty} \frac{f'(t-l_1)\sqrt{t(t-l_2)}}{t-x} dt \right] \quad (6.9)$$

Отсюда и из (4.6) имеем

$$h - \int_{l_2}^{\infty} f'(t-l_1) \sqrt{\frac{t-l_2}{t}} dt = \frac{2K\sqrt{l_2}(1-\nu^2)}{E} \quad (6.10)$$

Соотношения (6.8) и (6.10) представляют собой конечные уравнения, определяющие входящие в решение неизвестные константы l_1 и l_2 .

В частном случае, когда толщина клина постоянна, $f(t) \equiv h$, условие (6.8), которое более не имеет места, заменяется соотношением $l_1 = l_2$, а (6.10) дает следующее выражение для длины свободной трещины перед забиваемым клином:



Фиг. 33

$$l_1 = l_2 = \frac{E^2 h^2}{4(1-\nu^2)^2 K^2} \quad (6.11)$$

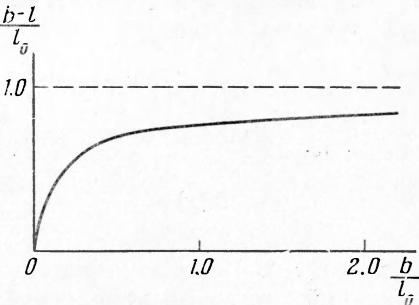
В [95] рассмотрены также другие частные формы клина: клин с малым закруглением в передней части и клин, закругленный по степенному закону. Исследование первого из названных примеров показало, что малое закругление оказывает малое влияние на длину свободной трещины перед клином. В работе [95] исследован также случай, когда на щеках клина действуют силы Кулона трения.

В [84] изучено расклинивание анизотропного тела полубесконечным жестким клином.

И. А. Маркузон [98] рассмотрел задачу о расклинивании бесконечного тела клином конечной длины $2b$ (фиг. 33). В случае постоянной толщины клина $2h$, зависимость длины трещины $2l$ от длины клина $2b$ при прочих равных условиях представляется в виде, изображенном на фиг. 34 (l_0 — длина свободной трещины для бесконечного клина, определяемая (6.11)).

В [98] исследовано также влияние однородного сжимающего или растягивающего напряжения на бесконечности на длину свободной трещины, образующейся при расклинивании тела клином конечной длины.

Соотношение (6.11) можно использовать для экспериментального определения модуля сцепления K . Для этого следует забить в пластинку из испытуемого материала клин, выполненный из существенно более жесткого материала, и измерить длину L образующейся при этом свобод-

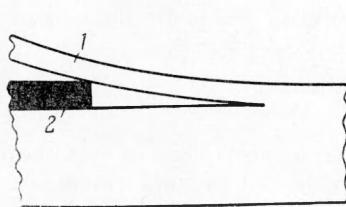


Фиг. 34

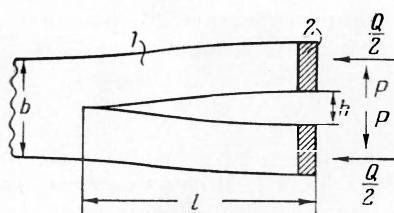
ной трещины. Модуль сцепления можно после этого найти по формуле

$$K = \frac{Eh}{2(1-v^2)\sqrt{L}} \quad (6.12)$$

Клин должен быть достаточно длинным, чтобы не сказывалась граница пластиинки; практически его следует забивать до того, пока расстояние между концом клина и концом трещины не перестанет меняться при дальнейшем перемещении клина. Пластиинка должна быть широкой и достаточно толстой, чтобы напряженное состояние можно было считать соответствующим плоской деформации. Кроме того, для обеспечения прямолинейности трещины следует, как это рекомендуется в работе Бенбоу и Реслера [9], сжимать образец в направлении распространения трещины. (Можно показать, что при этом (6.11) и (6.12) остаются неизменными.)



Фиг. 35



Фиг. 36

2. Расклинивание полосы. В строгой постановке решение задач расклинивания ограниченных тел представляется весьма трудным. Имеется только несколько приближенных решений, основанных на применении приближений простой теории балок.

Первое такое решение было получено И. В. Обреимовым [8]; эта работа вообще явилась первым исследованием, в котором рассматривалось расклинивание. В связи с выполненными им опытами по расщеплению слюды И. В. Обреимов рассмотрел случай, когда отрываемая полоска имеет малую толщину и соприкасается с расклинивающим телом только в одной точке (фиг. 35). Для установления связи поверхностного натяжения слюды с параметрами формы трещины И. В. Обреимов применил в этой задаче методы сопротивления материалов, рассматривая стружку как тонкую балку. Теоретическая часть работы И. В. Обреимова не свободна от погрешностей; впоследствии уточнение расчетов этой работы было выполнено в книге В. Д. Кузнецова [9], а также в работах М. С. Мецика [10] и Н. Н. Давиденкова [12]. М. С. Мецик, кроме того, внес уточнения в экспериментальную методику работы [8]. Применение приближений теории тонких балок оправдано в некоторых случаях при определении длины трещины. Однако эти приближения не могут быть приняты при описании формы поверхности трещины непосредственно вблизи ее конца даже при условии явного введения в рассмотрение распределения сил сцепления в концевой области, как это было сделано Я. И. Френкелем [5]. Дело в том, что продольный размер концевой области нельзя считать большим сравнительно с толщиной стружки, так что в области, где действуют силы сцепления, нельзя рассматривать стружку как тонкую балку.

Для иллюстрации приближенного подхода, основанного на методах простой теории балок, остановимся подробнее на работе Бенбоу и Реслера [9]. Отметим, что в этой работе наиболее четко выясняются возможности и пределы применимости указанного подхода.

Рассматривается следующая постановка задачи (фиг. 36). Полоса конечной ширины b расклинивается симметрично, так что трещина проходит по средней линии полосы. На срезе полосы приложены сжимаю-

щие усилия $Q / 2$ для обеспечения прямолинейности распространения трещины; расклинивающая сила P создает трещину длиной l и начальной шириной h .

Получив из соображений размерности выражение для упругой энергии, авторы выписывают условие равновесия трещины в форме

$$\frac{T}{E} = \frac{h^2}{l} \Phi\left(\frac{b}{l}\right) \quad (6.13)$$

так что для данного материала величина h^2 / l должна однозначно определяться величиной b / l . Проделанные в [9] на образцах из двух различных пластиков опыты убедительно свидетельствуют о существовании такой однозначной зависимости.

Для малых b / l , т. е. для длинных трещин, можно получить асимптотическую форму зависимости (6.13), рассматривая обе половины расклиниваемой полосы как тонкие балки, заделанные в сечении, соответствующем концу трещины. Выражение для упругой энергии полосы получается при этом в виде

$$U(h, l) = \frac{3h^2B}{l^3} \quad (6.14)$$

Здесь $B = EI$ — жесткость балки, $I = nb^3 / 96$, n — поперечная толщина балки. Поверхностная энергия трещины равна, очевидно, $2Tnl$. В подвижно-равновесном состоянии вариация поверхностной энергии, соответствующая малой вариации длины трещины δl , равна соответствующей вариации упругой энергии полосы, откуда получается

$$-\frac{\partial U}{\partial l} = 2n \quad \text{или} \quad \frac{T}{E} = \frac{3h^2b^3}{64l^4} \quad (6.15)$$

Сравнивая вторую формулу (6.15) с (6.13), можно найти асимптотическое выражение для $\Phi(b / l)$ при $b / l \rightarrow 0$

$$\Phi = \frac{3}{64} \left(\frac{b}{l}\right)^3 \quad (6.16)$$

Из (6.15) выражение для длины трещины получается в виде

$$l = \left(\frac{3h^2b^3E}{64T}\right)^{1/4} = \left(\frac{3h^2b^3E^2\pi}{64K^2(1-v^2)}\right)^{1/4} \quad (6.17)$$

Как видно, длина трещины в этом случае пропорциональна всего лишь $\sqrt[4]{h}$, тогда как при расклинивании бесконечного тела полубесконечным клином длина трещины (ср. (6.11)) пропорциональна h^2 .

Зависимость (6.15) была использована Бенбоу и Реслером для определения плотности поверхностной энергии исследованных пластиков. Отметим большую тщательность экспериментального исследования, проведенного в этой работе, и скрупулезную оценку источников возможных ошибок и их величины.

В недавнем обзоре Джилмэна [11] можно найти подробную сводку и библиографию экспериментальных исследований по расклиниванию.

3. Динамические задачи теории трещин. Значительное внимание в последнее время привлекают вопросы динамики трещин. Подробное рассмотрение этих вопросов выходит за рамки настоящего обзора, поэтому ограничимся здесь только краткой информацией об основных достигнутых результатах теоретических исследований динамики трещин.

В работе Мотта [36] рассматривался процесс расширения изолированной прямолинейной трещины в бесконечном теле под действием однородного поля ¹ растягивающих напряжений ρ_0 . Мотт получил на основе

¹ В отличие от [36] здесь рассматривается плоская деформация, а не плоское напряженное состояние

анализа размерностей выражение для кинетической энергии тела:

$$\varepsilon = k \rho l^2 V^2 p_0^2 / E^2 \quad (6.18)$$

Здесь ρ — плотность тела, l — полудлина трещины, V — скорость расширения трещины, k — безразмерный множитель, который Мотт считал постоянным и оставил неопределенным. Дополнив статическое энергетическое уравнение (2.1) производной по размеру трещины l от найденной таким образом кинетической энергии, и предполагая, что остальные члены (2.1) сохраняют тот же вид, что и в статической задаче Гриффитса, Мотт нашел скорость расширения трещины:

$$V = \left[\frac{\pi (1 - v^2)}{k} \right]^{1/2} \left(\frac{E}{\rho} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{l_*}{l} \right) \quad (6.19)$$

где l_* — критическая полудлина трещины, определяемая (5.6). Таким образом, по мере разрастания трещины скорость ее расширения возрастает, приближаясь к пределу

$$V_0 = \left[\frac{\pi (1 - v^2)}{k} \right]^{1/2} \left(\frac{E}{\rho} \right)^{1/2} \quad (6.20)$$

так что предельная скорость составляет по Мотту определенную часть скорости распространения продольных волн.

В этом рассуждении остается необоснованным использование статического выражения для уменьшения упругой энергии W . Кроме того, величина k в (6.18) и (6.19), вообще говоря, не должна быть постоянной, она может зависеть от l / l_* , V / c_1 и других безразмерных комбинаций.

Иоффе [100] исследовала в точной постановке динамической теории упругости задачу о движущейся с постоянной скоростью прямолинейной трещине *постоянной длины* в бесконечном теле, растягиваемом на бесконечности однородным напряжением. Несмотря на несколько искусственную постановку задачи, в этой работе получен важный результат, имеющий вполне общее значение. Именно, оказалось, что если скорость распространения трещины становится больше некоторой критической, то направление распространения трещины перестает быть направлением максимального разрывающего напряжения и трещина начинает искривляться. Величина критической скорости V_1 составляет примерно $0.4c_1$, где c_1 — скорость распространения продольных волн в данном материале (отношение V_1 / c_1 слабо зависит от коэффициента Пуассона v материала).

Робертс и Уэллс [101] сделали попытку оценить константу k , оставшуюся неопределенной в работе Мотта. Используя найденную величину этой константы, они получили величину предельной скорости расширения трещины, близкую к найденной Иоффе. Однако их оценка, основанная на решении статической задачи теории упругости, является слишком грубой. Так как прямолинейность распространения трещины в [101] считалась заведомо обеспеченной, близкое совпадение критической скорости, найденной Иоффе [100], с предельной скоростью, полученной в [101], нужно считать случайным.

Если прямолинейность распространения трещины так или иначе обеспечена (например, путем сильного сжатия тела в направлении распространения трещины или благодаря анизотропии материала), то максимальная скорость распространения трещины совпадает со скоростью распространения поверхностных волн Релея в данном материале, составляющей примерно $0.6 c_1$.

Впервые утверждение о том, что предельная скорость распространения трещин совпадает с релеевской, было высказано Стро [102]. Данное в этой работе эвристическое доказательство сводится к следующему. Справедливо отмечая, что предельная скорость распространения трещины не зависит от поверхностной энергии тела, Стро полагает поверх-

ностную энергию равной нулю. Исходя из этого, на основе энергетических соображений Стро приходит к выводу, что растягивающие напряжения вблизи конца трещины на ее продолжении равны нулю, так что распространение трещины представляет собой возмущение, движущееся по свободной от напряжений поверхности, которое может распространяться только с релеевской скоростью. На самом деле из рассуждений Стро можно вывести только равенство нулю растягивающего напряжения на самом контуре трещины. Однако из этого факта равенство скорости распространения трещины релеевской скорости не вытекает, как показывает следующий простой пример. Возьмем тело, скатое на бесконечности всесторонним сжимающим напряжением и расклиниваемое полубесконечным клином (фиг. 32), движущимся с бесконечно малой скоростью. Силы сцепления и, следовательно, поверхностную энергию полагаем равными нулю. Ввиду бесконечной малости скорости движения клина, динамические эффекты несущественны, так что, согласно разделу III, п. 2, можно утверждать, что растягивающее напряжение в конце трещины равно нулю. В то же время скорость распространения трещины равна скорости движения клина, т. е. также является бесконечно малой.

При помощи рассуждений, основанных на анализе точных решений уравнений динамической теории упругости, вывод о равенстве предельной скорости распространения трещин релеевской скорости был получен независимо и одновременно несколькими авторами. Крэг [103] рассматривал стационарное распространение полубесконечной прямолинейной трещины, на части поверхности которой, примыкающей к краю, приложены симметрично распределенные нормальные и касательные напряжения. В работе Ан Дан-дина [104] исследовалось нестационарное поле напряжений и деформаций в бесконечном теле с полубесконечной трещиной, вдоль поверхности которой от края в начальный момент начинают двигаться с постоянной скоростью симметричные сосредоточенные силы, нормальные к поверхности трещины. В [105] рассматривалось расклинивание бесконечного изотропного хрупкого тела полубесконечным жестким клином произвольной формы, движущимся с постоянной скоростью. В [84] аналогичная задача исследовалась для случая анизотропного тела. Бэкер [106] рассматривал нестационарное распределение напряжений и деформаций в твердом теле с полубесконечной трещиной, на поверхности которой в начальный момент прикладывается постоянное нормальное напряжение, после чего трещина начинает распространяться с постоянной скоростью.

При всем разнообразии задач, рассмотренных в этих работах, в них был получен следующий общий результат, на основе которого и был сделан сформулированный выше вывод: при приближении имеющейся в задаче характерной скорости к релеевской наступают своеобразные резонансные явления. Заметим, что возникновение резонанса при подходе к релеевской скорости не является спецификой задач о трещинах: исследование задачи о штампе, движущемся вдоль границы полупространства, рассмотренной Л. А. Галиным [72] и Радоком [106], обнаруживает [95], что такие же резонансные явления возникают при подходе скорости движения штампа к релеевской. По-видимому, наиболее непосредственно предельный характер релеевской скорости демонстрируется на задаче о расклинивании. Очевидно, что максимальная возможная скорость распространения трещины может быть достигнута при расклинивании тела движущимся клином. Анализ этой задачи показывает [95], что при увеличении скорости движения клина длина свободной трещины перед клином уменьшается, стремясь к нулю при подходе к релеевской скорости. Таким образом, при движении клина со сверхрелеевской скоростью свободной трещины перед ним не образуется; отсюда следует, что максимальная скорость, с которой может распространяться трещина, равна релеевской.

Броберг [107, 108] рассмотрел задачу о равномерно расширяющейся трещине конечной длины в бесконечном теле под действием однородного поля растягивающих напряжений. Полученное Бробергом решение является асимптотическим представлением для больших значений времени решения задачи, рассмотренной Моттом [36] и Робертсоном и Уэллсом [101]. Однако в отличие от [36, 101] решение Броберга получено на основе точных методов динамической теории упругости. Независимо от [102–104, 57, 95, 105] и в полном соответствии с результатами этих работ Броберг получил, что скорость расширения трещины в его задаче, равная предельной скорости расширения трещины для задачи, рассмотренной в [36, 101], совпадает с реологической скоростью.

Отметим работы Билби и Буллоу [109] и Мак-Клинтона и Сухатме [110], в которых рассматривались равномерно движущиеся трещины соответственно конечной и бесконечной длины, на поверхности которых приложены симметричные касательные напряжения, параллельные краю трещины. Вместо плоской деформации в этой задаче имеет место так называемая «антиплоская деформация», когда отлична от нуля только одна компонента смещения, параллельная краю трещины. Исследование таких трещин приводится к решению одного волнового уравнения (уравнения Лапласа для равновесных трещин). Трещины в условиях антиплоской деформации представляют значительный интерес в качестве простейшей модели, для которой оказывается возможным эффективное решение многих задач, недоступных ввиду больших математических трудностей для трещин в условиях плоской деформации.

Анализ динамики распространения трещин на основе приближений простой теории балок был проведен Джилмэном [11] и Сьютсоном [111].

Поступила 28 IV 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Inglis C. E. Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners. Trans. Inst. Nav. Arch., 1913, 55, 219–230.
2. Muskhelishvili N. I. Sur l'intégration de l'équation biharmonique. Изв. Российской Акад. наук, 1919, 13, 6 сер., 663–686.
3. Griffith A. A. The phenomenon of rupture and flow in solids. Phil. Trans. Roy. Soc., 1920, A 221, 163–198.
4. Griffith A. A. The theory of rupture. Proc. 1-st. Intern. Congr. Appl. Mech.. Delft, 1924, pp. 55–63.
5. Френкель Я. И. Теория обратимых и необратимых трещин в твердых телах. Журн. техн. физ., 1952, 22, 1857–1866.
6. Smekal A. Technische Festigkeit und molekulare Festigkeit, Naturwiss., 1922, 10, 799–804.
7. Wolff K. Zur Bruchtheorie von A. Griffith. Zeitschr. Ang. Math. Mech., 1923, 3, 107–112.
8. Obreimov I. V. The splitting strength of mica. Proc. Roy. Soc., 1930, A 127, 290–297.
9. Benbow J. J. and Roessler F. C. Experiments on controlled fractures. Proc. Phys. Soc., 1957, B70, 201–211.
10. Мецик М. С. Оптический метод измерения работы расщепления кристаллов слюды. Изв. вузов, сер. физ., 1958, № 2, 58–63.
11. Gilman J. J. Cleavage, ductility and tenacity in crystals, in «Fracture» (Averbach B. L. et al., ed.), pp. 193–221, Wiley, N.-Y., 1959.
12. Давиденков Н. Н. О поверхностной энергии слюды. Прикладная механика, АН УССР, 1960, 6, № 2, 138–142.
13. Westergaard H. M. Bearing pressures and cracks. J. Appl. Mech. 1939, 6, № 2, A 49 – A 53.
14. Sneddon I. N. The distribution of stress in the neighborhood of a crack in an elastic solid. Proc. Roy. Soc., 1946, A 187, 229–260.
15. Sneddon I. N. Fourier Transforms. McGraw Hill, N.-Y., 1951.
16. Sneddon I. N. and Elliot H. A. The opening of a Griffith crack under internal pressure. Quart. Appl. Math., 1946, 4, 262–267.
17. Williams M. L. On the stress distribution at the base of a stationary crack. J. Appl. Mech., 1957, 24, 109–114.
18. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 4-е, Изд-во АН СССР, М.—Л., 1954.

19. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. ГТТИ, М.—Л., 1946.
20. Sack R. A. Extension of Griffith theory of rupture to three dimensions. Proc. Phys. Soc., 1946, 58, 729—736.
21. Willmore T. J. The distribution of stress in the neighborhood of a crack. Quart. Journ. Mech. Appl. Math., 1949, 2, 53—64.
22. Bowie O. L. Analysis of an infinite plate containing radial cracks originating at the boundary of an internal circular hole. J. Math. and Phys., 1956, 25, 60—71.
23. Irwin G. R. Fracture dynamics, in «Fracturing of Metals», ASM, Cleveland, 1948, pp. 147—166.
24. Orowan E. O. Fundamentals of brittle behavior of metals, in «Fatigue and Fracture of Metals» (Murray W. M., ed), Wiley, N.Y., 1950, pp. 139—167.
25. Irwin G. R. and Kies J. A. Fracturing and fracture dynamics. Weld. Journ. Res. Suppl., 1952, 31, 95s—100s.
26. Irwin G. R. and Kies J. A. Critical energy rate analysis of fracture strength, Weld. Journ. Res. Suppl., 1954, 33, 193s—198s.
27. Orowan E. O. Energy criteria of fracture. Weld. Journ. Res. Suppl., 1955, 34, 157s—160s.
28. Fehlbeck D. K. and Orowan E. O. Experiments on brittle fracture of steel plates. Weld. Journ. Res. Suppl., 1955, 34, 570s—575s.
29. Wells A. A. The mechanics of notch brittle fracture. Weld. Research, 1953, 7, 34r—56r.
30. Wells A. A. The brittle fracture strength of welded steel plates. Quart. Trans. Inst. Nav. Arch., 1956, 98, 296—311.
31. Wells A. A. Strain energy release rates for fractures caused by wedge action. NRL Report № 4705, 1956.
32. Winne D. H. and Wundt B. M. Application of the Griffith—Irwin theory of crack propagation to the bursting behavior of disks including analytical and experimental studies. Trans. ASME, 1958, 80, 1643—1658.
33. Bueckner H. F. The propagation of cracks and the energy of elastic deformation. Trans. ASME, 1958, 80, 1225—1230.
34. Ребиндер П. А. Физико-химические исследования процессов деформации твердых тел. Юбилейный сб., посвященный XXX-летию Великой Октябрьской революции, М., Изд-во АН СССР, 1947, стр. 533—561.
35. Elliott H. A. An analysis of the conditions for rupture due to Griffith cracks. Proc. Phys. Soc., 1947, 59, 208—223.
36. Mott N. F. Fracture of metals; theoretical consideration, Engineering, 1948, 165, 16—18.
37. Ржаницын А. Р. К вопросу о процессе разрушения материала при растяжении в сб. «Исследования по вопросам строительной механики и теории пластичности». М., Стройиздат, 1956, стр. 66—83.
38. Желтов Ю. П. и Христянович С. А. О механизме гидравлического разрыва нефтеносного пласта. Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 5, 3—41.
39. Баренблatt Г. И. и Христянович С. А. Об обрушении кровли при горных выработках. Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 11, 73—86.
40. Баренблatt Г. И. О некоторых задачах теории упругости, возникающих при исследовании механизма гидравлического разрыва нефтеносного пласта ПММ, т. XX, 1956, 475—486.
41. Баренблatt Г. И. Об образовании горизонтальных трещин при гидравлическом разрыве нефтеносного пласта. Известия АН СССР, ОТН, 1956, № 9, 101—105.
42. Желтов Ю. П. Об одном приближенном методе расчетов размеров трещин, образующихся при гидравлическом разрыве пласта. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 3, 180—182.
43. Желтов Ю. П. Об образовании вертикальных трещин в пласте при помощи фильтрующейся жидкости. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 8, 56—62.
44. Westergaard H. M. Stresses at a crack, size of the crack and the bending of reinforced concrete. J. Americ. Concrete Inst., 1933, 5, № 2, 93—102.
45. Irwin G. R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. J. Appl. Mech., 1957, 24, 361—364.
46. Irwin G. R. Relation of stresses near a crack to the crack extension force. Proc. 9-th Intern. Congr. Appl. Mech. Brussels, 1957, pp. 245—251.
47. Irwin G. R. Fracture, in «Handbuch der Physik», B. VI (Flugge, S. ed.), Springer, Berlin, 1958, pp. 551—590.
48. Irwin G. R., Kies J. A. and Smith H. L. Fracture strength relative to onset and arrest of crack propagation. Proc. Americ. Soc. Test. Mater., 1958/1959, 58, 640—657.
49. Kies J. A., Smith H. L., Irwin G. R. La mécanique des ruptures et son application aux travaux de l'ingénieur. Mém. scient. rev. métallurgie, 1960, 57, № 2, 101—117.
50. Bueckner H. F. Some stress singularities and their computation by means of integral equations, in «Boundary Problems in Differential Equations» (Langer R.E., ed.), Univ. Wisconsin Press, 1960, pp. 215—230.

51. Irwin G. R. The crack-extension-force for a crack at a free surface boundary. N.R.L. Report, № 5120, 1958.
52. Romualdi J. P. and Sanders P. H. Fracture arrest by riveted stiffeners, Proc. 4-h Midwest. Conf. Solid Mech., Univ. Texas Press, 1959/1960, pp. 74—90.
53. Roessler F. C. Brittle fracture near equilibrium. Proc. Phys. Soc., 1956, B69, 981—992.
54. Benbow J. J. Cone cracks in fused silica. Proc. Phys. Soc., 1960, B75, 697—699.
55. Дроzdovский Б. А. и Фридман Я. Б. Влияние трещин на механические свойства конструкционных сталей. Металлургиздат, М., 1960.
56. Баренблatt Г. И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Докл. АН СССР, 1959, 127, 47—50.
57. Баренблatt Г. И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Общие представления и гипотезы. Осесимметричные трещины. ПММ, 1959, т. XXIII, 434—444.
58. Баренблatt Г. И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Прямолинейные трещины в плоских пластинах. ПММ, 1959, т. XXIII, 706—721.
59. Баренблatt Г. И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Устойчивость изолированных трещин. Связь с энергетическими теориями. ПММ, 1959, т. XXIII, 893—900.
60. Баренблatt Г. И. Об условиях конечности в механике сплошных сред. Статические задачи теории упругости. ПММ, 1960, т. XXIV, 316—322.
61. Баренблatt Г. И. Об основных представлениях теории равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении. Сб. работ, посвященный 70-летию Н. И. Мусхелишвили. «Проблемы механики сплошных сред», Изд-во АН СССР, М.—Л., 1961, стр. 41—58.
62. Александров А. П., Журков С. Н. Явление хрупкого разрыва, М., ГТТИ, 1933.
63. Гарбер Р. И. и Гиндин И. А. Физика прочности кристаллических тел. Усп. физических наук, 1960, 70, 57—110.
64. Дерягин Б. В., Абрикосова И. И., Лифшиц Е. М. Молекулярное притяжение конденсированных тел. Усп. физических наук, 1958, 64, 493—528.
65. Derjaguin B. V. and Abricossova I. I. Direct measurements of molecular attraction of solids, J. Phys. Chem. Solids, 1958, 5.
66. Jongh J. G. V., de. Measurements of Retarded van der Waals-Forces Thesis, Abels, Utrecht, 1958.
67. Borg M., Kun Huang. Dynamical Theory of Crystal Lattices, Clarendon Press, Oxford, 1954.
68. Leibfried G. Gittertheorie der mechanischen und thermischen Eigenschaften der Krystalle, in «Handbuch der Physik», B. VII, I (Flügge S., ed.), Springer, Berlin, 1955, pp. 104—324.
69. Леонов М. Я. и Панасюк В. В. Розвиток найприбільших тріщин в твердому тілі. Прикладна механіка, АН УССР, 1959, 5, 391—401.
70. Панасюк В. В. Определение напряжений и деформаций вблизи мельчайшей трещины. Научн. зап. Ин-та машиноведения и автоматики АН УССР, 1960, 7, 114—127.
71. Ландau Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред, ГИТЛ, М.—Л., 1954.
72. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. М., ГИТЛ, 1953.
73. Штадерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М., ГИТЛ, 1949.
74. Pargé E. R. Brittle Behavior of Engineering Structures, Wiley, N. Y., 1957.
75. Давиденков Н. Н. Проблема удара в металловедении. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1938.
76. Пашков П. О. Разрыв металлов., Судпромгиз, Л., 1960.
77. Потак Я. М. Хрупкие разрушения стали и стальных деталей. Оборонгиз, М., 1955.
78. Averbach B. L. et al. (ed.) Fracture, Wiley, N. Y., 1959.
79. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Изд. 4-е, ГИТЛ, М., 1957.
80. Neuber H. Kerbspannungslehre. Grundlagen fur genaue Spannungsrechnung, Springer, Berlin, 1937.
81. Franklin I. M. Triaxial tension at the head of a rapidly running crack in a plate. Paper ASME, 1959, № APM-11.
82. Masubuchi K. Dislocation and strain energy release during crack propagation in residual stress field. Proc. 8-th Japan Natl. Congr. Appl. Mech., 1958/1959, pp. 147—150.
83. Stroh A. N. Dislocations and cracks in anisotropic elasticity, Phil. mag., 1958, VIII ser. 3, 625—646.

84. Баренблatt Г. И. и Черепанов Г. П. О равновесии и распространении трещин в анизотропной среде. ПММ, 1961, т. XXV, 46—55.
- 84а. Качанов Л. М. К кинетике роста трещин. ПММ, 1961, т. XXV, вып., 3, стр. 498.
85. Wigglesworth L. A. Stress distribution in a notched plate, *Mathematika*, 1957, 4, 76—96.
86. Шерман Д. И. Об одном методе решения статической плоской задачи теории упругости для многосвязных областей. Тр. Сейсмологического института Академии наук СССР, № 54. Изд-во АН СССР, 1935.
87. Михлин С. Г. Плоская задача теории упругости. Тр. Сейсмологического института Академии наук СССР, № 65. Изд-во АН СССР, 1935.
88. Баренблatt Г. И. и Черепанов Г. П. О влиянии границ тела на развитие трещин хрупкого разрушения. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 3, 79—88.
89. Kotter W. T. An infinite row of collinear cracks in an infinite elastic sheet. *Ingenieur-Archiv*, 1959, 28, 168—172.
90. Мусхелишвили Н. И. Основные граничные задачи теории упругости для плоскости с прямолинейными разрезами. Сообщ. АН ГрузССР, 1942, 3, 103—110.
91. Шерман Д. И. Смешанная задача теории потенциала и теории упругости для плоскости с конечным числом прямолинейных разрезов. Докл. АН СССР, 1940, 27, 330—334.
92. Wundt B. M. A unified interpretation of room-temperature strength of notched specimens as influenced by their size. Paper ASME, 1959, № 59—МЕТ—9.
93. Yussuff S. Fracture phenomena in metal plates. Paper presented at the 10-th Intern. Congr. Appl. Mech. Stresa, 1960.
94. Устинов Ю. А. О влиянии свободной границы полупространства на распространение трещины, Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 4, 181—183.
95. Баренблatt Г. И., Черепанов Г. П. О расклинивании хрупких тел. ПММ, 1960, т. XXIV, 667—682.
96. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 2-е, Изд-во АН СССР, М.—Л., 1935.
97. Бицадзе А. В. О местных деформациях при сжатии упругих тел. Сообщ. АН ГрузССР, 1942, 3, 419—424.
98. Маркузон И. А. О расклинивании хрупкого тела клином конечной длины. ПММ, 1961, т. XXV, 356—361.
99. Кузнецов В. Д. Поверхностная энергия твердых тел, М., ГИТТЛ, 1954.
100. Offe E. The moving Griffith crack, *Phil. mag.*, 1951, VII ser., 42, 739—750.
101. Roberts D. K. and Wells A. A. The velocity of brittle fractures. Engineering, 1954, 178, 820—821.
102. Troh A. N. A theory of the fracture of metals. *Advances in Physics*, 1957, 6, 418—465.
103. Craggs I. W. On the propagation of a crack in an elastic-brittle material. *J. Mech. Phys. Solids*, 1960, 8, 66—75.
104. Dang Dinh An. Elastic waves by a force moving along a crack. *J. Math. and Phys.*, 1960, 38, 246—256.
105. Baker B. R. Dynamic stresses created by a moving crack. Paper presented at the 10-th Intern. Congr. Appl. Mech. Stresa, 1960.
106. Radok J. R. M. On the solutions of problems of dynamic plane elasticity. *Quart. Appl. Math.*, 1956, 14, 289—298.
107. Broberg K. B. The propagation of a brittle crack. Paper presented at the 10-th Intern. Congr. Appl. Mech. Stresa, 1960.
108. Broberg K. B. The propagation of a brittle crack. *Arkiv för Fysik*, 1960, 18, 159—192.
109. Bilby B. A. and Bullough R. The formation of twins by a moving crack. *Phil. mag.*, 1954, VII, ser. 45, 631—646.
110. McClintock F. A. and Sukhatme S. P. Travelling cracks in elastic materials under longitudinal shear. *J. Mech. Phys. Solids*, 1960, 8, 187—193.
111. Suits J. C. Cleavage, ductility and tenacity in crystals. Discussion, in «Fracture» (B. L. Anderson et al., ed.), Wiley, N.-Y., 1959, pp. 223—224.