УДК 532.59 + 517.948.34

СТАЦИОНАРНЫЕ ПРОСТЫЕ ВОЛНЫ НА СДВИГОВОМ ТЕЧЕНИИ БАРОТРОПНОЙ ЖИДКОСТИ

А. К. Хе

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Рассматриваются стационарные трехмерные течения баротропной жидкости в поле силы тяжести. В приближении мелкой воды уравнения Эйлера с помощью эйлерово-лагранжевой замены координат преобразованы к интегродифференциальной системе уравнений. Получена система уравнений простых волн, для которой доказана теорема существования решения, примыкающего к заданному сдвиговому потоку. Приведен пример частного решения, аналогичного решению задачи об обтекании газом выпуклого угла.

Ключевые слова: мелкая вода, простые волны, интегродифференциальные уравнения.

1. Система уравнений. Рассматриваются уравнения Эйлера в стационарном случае

$$(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}+\rho^{-1}\nabla p=\boldsymbol{g},\qquad \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{u})=0, \tag{1.1}$$

где $\boldsymbol{u}=(u,v,w)^{\text{т}}$ — вектор скорости; $\boldsymbol{g}=(0,0,-g)^{\text{т}}$ — ускорение свободного падения; ρ — плотность ($\rho=R(p)$ — заданная функция); p — давление. Пространственные переменные: $x,y\in(-\infty,+\infty)$, $z\in(0,h(x,y))$. Система уравнений (1.1), описывающая стационарные течения баротропной жидкости в поле силы тяжести над ровным дном со свободной границей, дополняется кинематическими граничными условиями на дне и свободной границе и динамическим условием на свободной границе

$$w|_{z=0}=0,\qquad w|_{z=h(x,y)}=uh_x+vh_y,\qquad p|_{z=h(x,y)}=p_a$$

(p_a — атмосферное давление).

Пространственные простые волны, распространяющиеся в жидкости постоянной плотности, изучены в работе [1]. Плоскопараллельный случай распространения простых волн в слое баротропной жидкости исследован в [2].

После замены переменных

$$x=L_0x',\quad y=L_0y',\quad z=H_0z',\quad u=\sqrt{gH_0}\,u',\quad v=\sqrt{gH_0}\,v',\quad w=\sqrt{gH_0}\,H_0w'/L_0,$$
$$\rho=R_0\rho',\qquad p=R_0gH_0p',$$

где L_0, H_0 — характерные горизонтальный и вертикальный масштабы, а R_0 имеет размерность плотности, уравнения (1.1) в безразмерных переменных принимают вид (штрихи опущены)

$$uu_x+vu_y+wu_z+\rho^{-1}p_x=0,\qquad uv_x+vv_y+wv_z+\rho^{-1}p_y=0,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного фонда INTAS (код проекта 01-868) и в рамках Программы поддержки ведущих научных школ (код проекта 00-15-96163).

$$\varepsilon^2(uw_x + vw_y + ww_z) + \rho^{-1}p_z = -1, \qquad \mathrm{div}(\rho\boldsymbol{u}) = 0$$

($\varepsilon = H_0/L_0$). В приближении мелкой воды принимается, что параметр ε мал по сравнению с единицей. В пределе при $\varepsilon \to 0$ третье уравнение импульсов имеет вид гидростатического закона распределения давления

$$p_z = -\rho. \tag{1.2}$$

Отсюда получаем формулу для определения давления

$$\int\limits_{p_a}^{p(x,y,z)} \frac{dp'}{R(p')} = h(x,y) - z,$$

из которой следуют равенства $p_x = \rho h_x$, $p_y = \rho h_y$.

Остальные уравнения системы (1.1) упрощаются после перехода в эйлерово-лагранжеву систему координат [3]

$$x = x', \qquad y = y', \qquad z = \Phi(x', y', \lambda),$$

где функция Φ является решением краевой задачи

$$\begin{gathered} u(x,y,\Phi)\,\Phi_x + v(x,y,\Phi)\,\Phi_y = w(x,y,\Phi), \\ \Phi|_{\lambda=0} = 0, \qquad \Phi|_{\lambda=1} = h. \end{gathered} \tag{1.3}$$

При такой замене переменных лагранжева координата $\lambda \in [0,1]$ нумерует материальные поверхности жидкости от $z = 0$ при $\lambda = 0$ до $z = h$ при $\lambda = 1$.

В результате замены переменных первые два уравнения импульсов и уравнение неразрывности принимают вид

$$\begin{gathered} uu_x + vu_y + h_x = 0, \qquad uv_x + vv_y + h_y = 0, \\ (u\rho\Phi_\lambda)_x + (v\rho\Phi_\lambda)_y = 0. \end{gathered}$$

Введем новую неизвестную функцию $H(x,y,\lambda) = \rho\Phi_\lambda$. Будем считать, что якобиан замены переменных $\Phi_\lambda > 0$, тогда $H > 0$.

Так как $h = \int\limits_0^1 \Phi_\lambda\, d\lambda = \int\limits_0^1 \rho^{-1}H\, d\lambda$, то последнюю систему уравнений можно преобразовать к виду [4]

$$(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{u} + \tau\int\limits_0^1 \nabla H\, d\lambda = 0, \qquad \mathrm{div}\,(H\boldsymbol{u}) = 0. \tag{1.4}$$

Здесь $\boldsymbol{u}$ — проекция вектора скорости на горизонтальную плоскость: $\boldsymbol{u} = (u,v)^{\mathrm{т}}$; операторы ∇ и div действуют по переменным x, y; $\tau = \tau(x,y)$ — удельный объем на дне:

$$\tau(x,y) = (\rho(x,y,0))^{-1} = \Big(R\Big(p_a + \int\limits_0^1 H\, d\lambda\Big)\Big)^{-1}.$$

По найденному решению $u(x,y,\lambda)$, $v(x,y,\lambda)$ и $H(x,y,\lambda)$ системы (1.4) исходные величины восстанавливаются следующим образом. Из уравнения (1.2) следует

$$p_\lambda = -H, \tag{1.5}$$

откуда

$$p(x, y, \lambda) = p_a + \int_\lambda^1 H(x, y, \nu)\, d\nu. \tag{1.6}$$

Далее, так как $\Phi_\lambda = H/\rho = -p_\lambda/R(p)$, то зависимость $\lambda(x, y, z)$ с помощью найденного давления (1.6) определяется неявно из формулы

$$z = \Phi(x, y, \lambda) = \int_{p(x,y,\lambda)}^{p(x,y,0)} \frac{dp'}{R(p')}. \tag{1.7}$$

Вертикальная координата скорости w определяется первым уравнением (1.3).

2. Простые волны. Решения системы (1.4) вида

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\alpha(x, y), \lambda), \qquad H = H(\alpha(x, y), \lambda) \tag{2.1}$$

будем называть простыми волнами [1]. Они соответствуют решениям вида $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\alpha(x, y), z)$, $p = p(\alpha(x, y), z)$ исходной системы уравнений.

После подстановки (2.1) в уравнения (1.4) получим систему

$$(\boldsymbol{u} \cdot \nabla\alpha)\boldsymbol{u}_\alpha + \tau \int_0^1 H_\alpha\, d\lambda\ \nabla\alpha = 0, \qquad (\boldsymbol{u} \cdot \nabla\alpha)H_\alpha + H(\boldsymbol{u}_\alpha \cdot \nabla\alpha) = 0 \tag{2.2}$$

для определения функций $\boldsymbol{u}(\alpha, \lambda)$, $H(\alpha, \lambda)$, $\alpha(x, y)$.

Введем вспомогательную функцию $\boldsymbol{n} = |\nabla\alpha|^{-1}\nabla\alpha$ — нормаль к линиям уровня простой волны. Тогда уравнения (2.2) преобразуются к виду

$$\boldsymbol{u}_\alpha = -\frac{\tau}{u_n} \int_0^1 H_\alpha\, d\lambda\ \boldsymbol{n}; \tag{2.3}$$

$$H_\alpha = \frac{H\tau}{u_n^2} \int_0^1 H_\alpha\, d\lambda, \tag{2.4}$$

где $u_n = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}$.

Из уравнения (2.4) следует, что нормаль $\boldsymbol{n}$ должна удовлетворять уравнению

$$\tau \int_0^1 \frac{H}{u_n^2}\, d\lambda = 1. \tag{2.5}$$

Таким образом, получена система уравнений (2.3)–(2.5) для функций $\boldsymbol{u}(\alpha, \lambda)$, $H(\alpha, \lambda)$. Параметр простой волны $\alpha(x, y)$ определяется следующим образом. На линии $\alpha(x, y) = \mathrm{const}$ выполняется равенство

$$\nabla\alpha \cdot d\boldsymbol{x} = 0 \qquad \text{или} \qquad \boldsymbol{n} \cdot d\boldsymbol{x} = 0.$$

Из уравнения (2.5) следует, что $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}(\alpha)$, тогда последнее уравнение можно проинтегрировать:

$$\boldsymbol{n}(\alpha) \cdot \boldsymbol{x} = C(\alpha) \tag{2.6}$$

($C(\alpha)$ — произвольная функция). Если $\boldsymbol{n}'(\alpha)\cdot\boldsymbol{x} - C'(\alpha) \neq 0$, то по теореме о неявной функции уравнение (2.6) позволяет локально определить функцию $\alpha(x,y)$. Уравнение (2.6) означает, что линии уровня простой волны являются прямыми.

Для дальнейших исследований в качестве параметра простой волны выберем функцию $\alpha = \int\limits_0^1 H\,d\lambda$.

В плоскости переменных (u,v) сделаем полярную замену координат $u = q\cos\theta$, $v = q\sin\theta$ (q, θ — новые искомые функции α, λ). Направление $\boldsymbol{n}$ представим в виде $\boldsymbol{n} = (-\sin\gamma, \cos\gamma)$, где $\gamma = \gamma(\alpha)$ — угол между прямой $\alpha = \mathrm{const}$ и осью x — является искомой функцией. Тогда уравнения (2.3)–(2.5) принимают следующий вид:

$$q_\alpha = -\tau/q; \tag{2.7}$$

$$\theta_\alpha = -\tau\,\mathrm{ctg}(\theta-\gamma)/q^2; \tag{2.8}$$

$$H_\alpha = H\tau/(q^2\sin^2(\theta-\gamma)); \tag{2.9}$$

$$\tau\int\limits_0^1 \frac{H\,d\lambda}{q^2\sin^2(\theta-\gamma)} = 1. \tag{2.10}$$

Рассмотрим подробнее уравнение (2.10). Заметим, что функция

$$\chi(\gamma) = 1 - \tau\int \frac{H}{q^2\sin^2(\theta-\gamma)}\,d\lambda$$

периодична с периодом π. Кроме того, решения уравнения $\chi(\gamma) = 0$, отличающиеся на величину, кратную π, характеризуют одну и ту же линию $\alpha = \mathrm{const}$. Поэтому достаточно рассмотреть уравнение $\chi(\gamma) = 0$ на одном периоде.

Пусть $\theta(\lambda) \in [\theta^0, \theta^1]$ при $\lambda \in [0,1]$, причем $\theta^0 = \theta|_{\lambda=0}$, $\theta^1 = \theta|_{\lambda=1}$ и $\theta_\lambda > 0$. Рассмотрим случай, когда $\theta^1 - \theta^0 < \pi$, так как в противном случае функция $\chi(\gamma)$ не определена на вещественной оси. Положим $\theta^2 = \theta^0 + \pi$ и рассмотрим $\chi(\gamma)$ при $\gamma \in (\theta^1, \theta^2)$.

Вычислим $\chi''(\gamma)$:

$$\chi''(\gamma) = -2\tau\int\limits_0^1 \frac{H}{q^2}\,\frac{1+2\cos^2(\theta-\gamma)}{\sin^4(\theta-\gamma)}\,d\lambda < 0.$$

Из последнего неравенства следует, что функция $\chi(\gamma)$ выпукла вверх, а так как $\chi \to -\infty$ при $\gamma \to \theta^1 + 0$ и $\gamma \to \theta^2 - 0$, то $\chi(\gamma)$ имеет единственный максимум $\gamma_* \in (\theta^1, \theta^2)$. Поэтому при $\chi(\gamma_*) > 0$ уравнение (2.10) имеет два корня $\gamma_{1,2}$ на интервале (θ^1, θ^2), которые соответствуют двум семействам простых волн.

3. Простые волны на течениях без сдвига скорости. Уравнения (2.7)–(2.10) можно проинтегрировать в случае, когда реализуется течение без сдвига скорости по вертикали $u_\lambda = v_\lambda = 0$ или $q = q(\alpha)$, $\theta = \theta(\alpha)$. В этом случае поле скоростей такое же, как и в простой волне в двумерном стационарном изэнтропическом течении газа (течении Прандтля — Мейера) [5]:

$$\theta = \theta_0 \pm \mu(q), \qquad \mu(q) = \int \sqrt{\mathrm{M}^2 - 1}\,\frac{dq}{q} \tag{3.1}$$

(М — число Маха). Действительно, из уравнения (2.10) находим

$$\gamma_{1,2} = \theta \pm \arcsin\,(\sqrt{\tau\alpha}/q).$$

Тогда согласно (2.8) направление вектора скорости определяется по формуле

$$\theta(\alpha) = \theta_0 \pm \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{\tau(\alpha')}{q^2(\alpha')} \Big(\frac{q^2(\alpha')}{\tau(\alpha')\alpha'} - 1\Big)^{1/2} d\alpha'.$$

После подстановки $\alpha = \alpha(q)$ интеграл в силу (2.7) примет вид

$$\int\limits_{q_0}^{q} \sqrt{\frac{q^2}{\tau\alpha} - 1}\, \frac{dq}{q}.$$

Если в качестве плотности в исследуемом течении взять функцию $\bar\rho = \alpha$, а в качестве давления — функцию $\bar p = \displaystyle\int \tau(\alpha)\alpha\, d\alpha$, то скорость звука $\bar c^2 = d\bar p/d\bar\rho = \tau\alpha$, число Маха $\mathrm{M} = q/\sqrt{\tau\alpha}$. В результате получим формулу (3.1). Напомним, что $\alpha = \displaystyle\int\limits_0^1 H\, d\lambda$, и в силу определения функции H получается, что $\bar\rho = \displaystyle\int\limits_0^h \rho\, dz$ — масса столба жидкости от дна до свободной поверхности.

Для полного определения решения необходимо также найти давление. Интегрируя уравнения (2.9), получаем

$$H(\alpha, \lambda) = D(\lambda)\alpha,$$

где $D(\lambda)$ — произвольная функция. Тогда из (1.6) следует

$$p(\alpha, \lambda) = p_a + \alpha \int\limits_{\lambda}^{1} D(\lambda')\, d\lambda'.$$

Зависимость от координаты z находится из уравнения (1.7).

4. Существование простых волн на сдвиговом потоке. Сдвиговым потоком будем называть частные решения системы (1.4) вида [1]

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\lambda), \qquad H = H(\lambda),$$

которые соответствуют решениям $\boldsymbol{u} = (u(z), v(z), 0)^{\mathrm{т}}$, $p = p(z)$ исходной системы уравнений.

Задача о примыкании простой волны к заданному сдвиговому потоку $\boldsymbol{u}_0(\lambda)$, $H_0(\lambda)$ формулируется следующим образом. Требуется решить систему уравнений (2.7)–(2.10) с начальными условиями

$$q|_{\alpha=\alpha_0} = q_0(\lambda), \qquad \theta|_{\alpha=\alpha_0} = \theta_0(\lambda), \qquad H|_{\alpha=\alpha_0} = H_0(\lambda), \tag{4.1}$$

где $\boldsymbol{u}_0 = q_0(\cos\theta_0, \sin\theta_0)$.

При доказательстве существования решения системы (2.7)–(2.10) удобнее вместо конечного соотношения (2.10) использовать дифференциальное уравнение

$$\gamma_\alpha = \frac{\tau}{2}\Big(\int\limits_0^1 \frac{H\cos(\theta-\gamma)}{q^2\sin^3(\theta-\gamma)}\, d\lambda\Big)^{-1} \Big(R'\Big(p_a + \int\limits_0^1 H\, d\lambda\Big) \int\limits_0^1 \frac{H\, d\lambda}{q^2\sin^2(\theta-\gamma)} - 3\int\limits_0^1 \frac{H\, d\lambda}{q^4\sin^4(\theta-\gamma)}\Big), \tag{4.2}$$

полученное из (2.10) дифференцированием по α. Начальное условие

$$\gamma|_{\alpha=\alpha_0} = \gamma_0 \tag{4.3}$$

определяется из уравнения

$$\Bigl(R\Bigl(p_a + \int\limits_0^1 H_0\,d\lambda\Bigr)\Bigr)^{-1} \int\limits_0^1 \frac{H_0\,d\lambda}{q_0^2 \sin^2(\theta_0 - \gamma_0)} = 1.$$

Систему уравнений (2.7)–(2.9), (4.2) с начальными условиями (4.1), (4.3) можно представить в виде задачи Коши для дифференциального уравнения в пространстве функций λ

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{d\alpha} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{V}), \qquad \boldsymbol{V}(\alpha_0) = \boldsymbol{V}_0, \tag{4.4}$$

где $\boldsymbol{V} = (q(\lambda), \theta(\lambda), H(\lambda), \gamma)$; $\boldsymbol{V}_0 = (q_0(\lambda), \theta_0(\lambda), H_0(\lambda), \gamma_0)$.

Для доказательства существования решения задачи (4.4) воспользуемся известной теоремой теории дифференциальных уравнений в банаховых пространствах [6], а именно: если при $\|\boldsymbol{V} - \boldsymbol{V}_0\| \leqslant \eta$ функция $\boldsymbol{F}$ удовлетворяет условиям

$$\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{V})\| \leqslant M_1; \tag{4.5}$$

$$\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{V}_2) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{V}_1)\| \leqslant M_2 \|\boldsymbol{V}_2 - \boldsymbol{V}_1\|, \tag{4.6}$$

то существует число $\delta > 0$ ($\delta = \min\{\eta/M_1, 1/M_2\}$) такое, что в интервале $(\alpha_0 - \delta, \alpha_0 + \delta)$ задача (4.4) имеет единственное решение.

Введем норму в пространстве вектор-функций $\boldsymbol{V}(\lambda)$ следующим образом:

$$\|\boldsymbol{V}\| = \max_\lambda q(\lambda) + \max_\lambda |\theta(\lambda)| + \max_\lambda H(\lambda) + |\gamma|.$$

Пусть $\eta > 0$ такое, что начальные данные $\boldsymbol{V}_0$ удовлетворяют условиям $q_0(\lambda) > 2\eta$, $H_0(\lambda) > 2\eta$, $\chi(\gamma_*(\boldsymbol{V}_0)) > 0$, $2\eta < |\theta_0(\lambda) - \gamma_0| < \pi - 2\eta$, $|\gamma_*(\boldsymbol{V}_0) - \gamma_0| > 2\eta$. Тогда в шаре $\|\boldsymbol{V} - \boldsymbol{V}_0\| < \eta$ справедливы неравенства

$$q(\lambda) > \eta, \quad H(\lambda) > \eta, \quad \eta < |\theta(\lambda) - \gamma| < \pi - \eta, \quad |\gamma_*(\boldsymbol{V}) - \gamma| > \epsilon(\eta), \tag{4.7}$$

где $\epsilon(\eta) > 0$. Неравенства (4.7) позволяют получить оценки (4.5), (4.6) для системы (2.7)–(2.9), (4.2) с некоторыми постоянными $M_1(\eta)$, $M_2(\eta)$. Неравенство (4.5) справедливо в силу непрерывности правой части $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{V})$ в шаре $\|\boldsymbol{V} - \boldsymbol{V}_0\| < \eta$, а для получения неравенства (4.6) оценивается производная Гато $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{V})$ в шаре $\|\boldsymbol{V} - \boldsymbol{V}_0\| < \eta$.

5. Пример. Приведем частное решение системы (2.7)–(2.10), аналогичное решению задачи об обтекании выпуклого угла в газовой динамике (течение Прандтля — Мейера).

Заметим, что из уравнения (2.7) можно получить аналог интеграла Бернулли

$$q^2(\alpha, \lambda) + 2 \int\limits_{p_a}^{p_a+\alpha} \frac{dp}{R(p)} = q_m^2(\lambda), \tag{5.1}$$

где $q_m(\lambda)$ — произвольная положительная функция.

Будем искать частные решения, в которых модуль скорости q не зависит от λ. Это означает, что в интеграле (5.1) $q_m = \text{const}$.

Из уравнений (2.8), (2.9) следует

$$\theta_\lambda = A(\lambda) H, \tag{5.2}$$

где $A(\lambda)$ — произвольная функция. Рассмотрим частное решение, в котором $A = \mathrm{const}$. Уравнение (2.10) принимает вид

$$ARq^2 = \operatorname{ctg}(\theta^0 - \gamma) - \operatorname{ctg}(\theta^1 - \gamma). \tag{5.3}$$

Из уравнения (5.2) следует, что $\theta^1(\alpha) - \theta^0(\alpha) = A\alpha$. Используя формулу для котангенса разности, равенство (5.3) можно преобразовать к квадратному уравнению относительно $\operatorname{ctg}(\theta^1 - \gamma)$, разрешая которое, находим

$$\gamma_{1,2}(\alpha) = \theta^1 + \operatorname{arcctg}\Big(\frac{ARq^2}{2} \pm \sqrt{\Big(\frac{ARq^2}{2}\Big)^2 + ARq^2 \operatorname{ctg}(A\alpha) - 1}\,\Big). \tag{5.4}$$

Формула (5.4) определяет различные вещественные корни $\gamma_{1,2}$, если подкоренное выражение в аргументе арктангенса положительно. Это условие эквивалентно условию $\chi(\gamma_*) > 0$:

$$ARq^2 > 2\operatorname{tg}(A\alpha/2).$$

Подставляя выражение (5.4) для γ в уравнение (2.8) при $\lambda = 1$, можно найти θ^1:

$$\theta^1(\alpha) = \theta^1_0 + \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \Big(\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} + \frac{A\operatorname{ctg}(A\alpha)}{Rq^2} - \frac{1}{R^2q^4}}\,\Big)\,d\alpha$$

(θ^1_0 — произвольная константа).

Из уравнений (5.2), (1.5) следует

$$\theta(\alpha, \lambda) = \theta^1(\alpha) - A(p(\alpha, \lambda) - p_a).$$

Заметим, что зависимость давления $p(\alpha, \lambda)$ от эйлеровой координаты z можно определить из уравнения, полученного из (1.2):

$$z = \int\limits_{p(\alpha,\lambda)}^{p(\alpha,0)} \frac{dp'}{R(p')}.$$

Здесь $p(\alpha, 0) = p_a + \int\limits_0^1 H\,d\lambda = p_a + \alpha$. Следовательно, картина течения в эйлеровых координатах будет определена полностью, если будет найден параметр простой волны $\alpha(x, y)$. Для того чтобы полностью определить течение в эйлерово-лагранжевых координатах x, y, λ, требуется также найти функцию $H(x, y, \lambda)$.

Рассмотрим частное решение, для которого в уравнении (2.6) $C(\alpha) \equiv 0$, что соответствует простой волне, центрированной в начале координат. Тогда параметр простой волны α определяется из уравнения

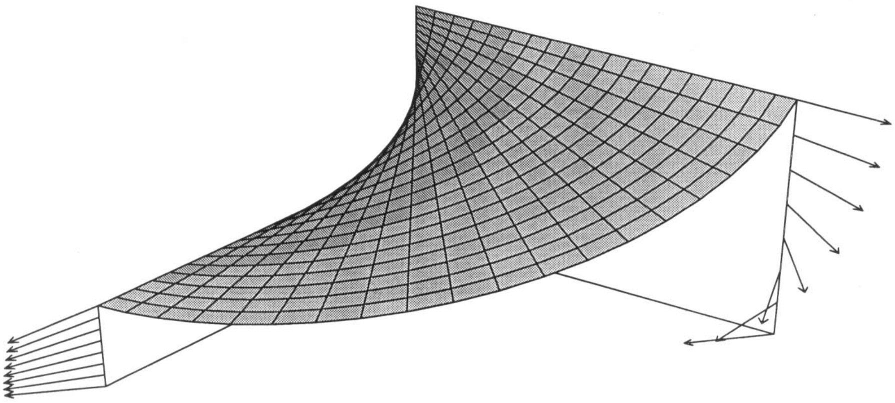
$$\operatorname{tg}\gamma(\alpha) = y/x.$$

В полярных координатах $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ данное уравнение означает, что $\gamma(\alpha) = \varphi$. Тогда функция $\alpha(\varphi)$ находится из уравнения

$$\varphi = \theta^1(\alpha) + \operatorname{arcctg}\Big(\frac{AR(\alpha)q^2(\alpha)}{2} \pm \sqrt{\Big(\frac{AR(\alpha)q^2(\alpha)}{2}\Big)^2 + AR(\alpha)q^2(\alpha)\operatorname{ctg}(A\alpha) - 1}\Big).$$

Величины A, q_m, θ^1_0, α_0 вычисляются по начальным данным:

$$\theta^1_0 = \theta_0(1), \quad \alpha_0 = \int\limits_0^1 H_0\,d\lambda, \quad A = \frac{\theta_0(1) - \theta_0(0)}{\alpha_0}, \quad q_m = \sqrt{q_0^2 + 2\int\limits_{p_a}^{p_a+\alpha_0} \frac{dp}{R(p)}}.$$



Найденное частное решение, рассматриваемое на интервале $[\alpha_0, \alpha_1]$, соединяет два стационарных сдвиговых потока с глубинами

$$h_0 = \int\limits_{p_a}^{p_a+\alpha_0} \frac{dp}{R(p)}, \qquad h_1 = \int\limits_{p_a}^{p_a+\alpha_1} \frac{dp}{R(p)}$$

и со скоростями $(q_0, \theta_0(\lambda))$, $(q(\alpha_1), \theta(\alpha_1, \lambda))$. Область простой волны заключена между лучами $\varphi(\alpha_0)$ и $\varphi(\alpha_1)$.

На рисунке показана форма свободной поверхности и поля скоростей в начале и конце интервала $[\alpha_0, \alpha_1]$ в случае политропной зависимости $p = S\rho^{æ}$ ($S = \text{const}$, $æ > 1$).

Автор выражает благодарность В. М. Тешукову за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Тешуков В. М.** Пространственные простые волны на сдвиговом течении // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 5. С. 28–40.
2. **Елемесова Б. Н.** Простые волны в слое баротропной завихренной жидкости // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 5. С. 56–64.
3. **Тешуков В. М.** О гиперболичности уравнений длинных волн // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284, № 3. С. 555–559.
4. **Тешуков В. М.** Длинные волны в завихренной баротропной жидкости // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 6. С. 17–26.
5. **Овсянников Л. В.** Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.
6. **Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.** Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.

Поступила в редакцию 11/VI 2002 г.