

УДК 539.3

РАВНОВЕСНОЕ СОСТОЯНИЕ РАЗУПРОЧНЯЮЩЕЙСЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ ПРИ РАСШИРЕНИИ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ

К. В. Бердников, В. В. Стружанов

Институт машиноведения УрО РАН, 620049 Екатеринбург, Россия
E-mails: kir.berdnikov@mail.ru, stru@imach.uran.ru

Рассматривается задача о напряженно-деформированном состоянии в разупрочняющемся пространстве, возникающем при расширении сферической полости под действием нарастающего внутреннего давления. Свойства среды описываются единой кривой с ниспадающим участком (среда Генки с разупрочнением) при условии неположительности объемной деформации. Предлагается итерационная процедура расчета параметров состояния равновесия, основанная на схеме метода простых итераций. Проведены численные расчеты, подтверждающие разработанную методику.

Ключевые слова: среда Генки, полярно-симметричное деформирование, разупрочнение, метод простых итераций, сходимость, устойчивость.

DOI: 10.15372/PMTF20180113

Введение. В работах [1–6] показано, что учет закритической стадии деформирования (стадии деформационного разупрочнения материала) позволяет использовать деформационные резервы материала и, следовательно, рассчитать наиболее близкие к реальным значения предельной несущей способности элементов конструкций. Однако при использовании в расчетах прочностных характеристик разупрочнения возникают трудности при формулировке соответствующих определяющих соотношений для сложнопластического состояния, а также при исследовании математических задач, что обусловлено возможной неединственностью и неустойчивостью решений краевых задач при явном учете разупрочнения [7, 8].

В то же время существует класс неоднородных задач, в которых при описании стадии разупрочнения возможно применение гипотез, используемых при построении некоторых теорий пластичности, например деформационной (модель Генки), при условии деформирования материала в стесненных условиях, когда объемная деформация неположительна. В этом случае свойства материала и определяющие соотношения задаются единой кривой с ниспадающим участком [9]. Другое упрощение возможно в случае полярно-симметричного деформирования. В этом случае можно построить достаточно просто реализуемую итерационную схему расчета напряженно-деформированных состояний при постепенном увеличении нагрузки и переходе системы из одного устойчивого состояния равновесия в другое сколь угодно близкое состояние равновесия.

Краевая задача. Сферическая полость радиусом a расположена в пространстве, материал которого является упругопластическим и обладает свойством деформационного

разупрочнения. Полость расширяется под действием монотонно возрастающего равномерного внутреннего давления p . В силу полярной симметрии в окружающем полость материале имеют место только радиальные перемещения $u(r)$, затухающие на бесконечности (r — расстояние от начала сферической системы координат, расположенного в центре полости). При этом в пространстве возникают радиальные $\varepsilon_r(r)$ и тангенциальные $\varepsilon_\theta(r) = \varepsilon_\varphi(r)$ деформации, определяемые соотношениями Коши

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}. \quad (1)$$

Эти деформации однозначно представляются в виде суммы упругих и неупругих деформаций. Следовательно, связь между напряжениями и деформациями можно записать в виде $\sigma = C \cdot \cdot \varepsilon^e = C \cdot \cdot (\varepsilon - \varepsilon^p)$, где σ — тензор напряжений; ε^e , ε^p , ε — тензоры упругих, неупругих и полных деформаций соответственно; C — тензор модулей упругости; двумя точками обозначено двойное скалярное произведение тензоров [10]. Поскольку тензоры напряжений и деформаций имеют диагональный вид (касательные составляющие отсутствуют), определяющие соотношения можно записать в векторно-матричной форме

$$\begin{pmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_r - \varepsilon_r^p \\ \varepsilon_\theta - \varepsilon_\theta^p \\ \varepsilon_\varphi - \varepsilon_\varphi^p \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Здесь λ , μ — коэффициенты Ламе. Напряжения должны удовлетворять уравнению равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2}{r} \sigma_r - \frac{2}{r} \sigma_\theta = 0 \quad (3)$$

и граничным условиям

$$\sigma_r(a) = -p, \quad \sigma_r|_{r=\infty} = 0. \quad (4)$$

Следует отметить, что неупругие составляющие деформаций заранее неизвестны и должны вычисляться при решении задачи. Поэтому систему (1)–(4) необходимо дополнить уравнениями, определяющими кинетику накопления неупругих деформаций, в соответствии с принимаемой моделью материала.

Модель материала. Для среды с полярно-симметричным напряженно-деформированным состоянием в случае неположительности объемной деформации в изотермическом процессе активного деформирования приращение свободной энергии представляет собой элементарную работу напряжений (среда Генки) [9]:

$$dF = 3K\varepsilon_0 d\varepsilon_0 + T d\Gamma.$$

Здесь K — объемный модуль, значение которого не изменяется на всех стадиях деформирования; $\varepsilon_0 = (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_\varphi)/3 = \theta/3$; θ — относительное изменение объема материального элемента; $T = [(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_r)^2]^{1/2}/\sqrt{6}$ — интенсивность касательных напряжений; $\Gamma = \sqrt{2/3}[(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2 + (\varepsilon_\theta - \varepsilon_\varphi)^2 + (\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r)^2]^{1/2}$ — интенсивность деформаций сдвига. Величины T и Γ связаны уравнением так называемой единой кривой $T = G^s(\Gamma)\Gamma$ [11], которая имеет ниспадающий участок, характеризующий разупрочнение материала. В уравнении единой кривой G^s — секущий модуль.

Процесс деформирования можно интерпретировать как движение точки (θ, Γ) по некоторой кривой L в двумерном евклидовом пространстве (θ, Γ) . Тогда свободная энергия равна криволинейному интегралу второго рода [9]

$$F(\theta, \Gamma) = \int_L \left[\frac{1}{3} K\theta d\theta + G^s(\Gamma)\Gamma d\Gamma \right].$$

После ряда преобразований функция свободной энергии принимает вид [9]

$$F(\theta, \Gamma) = F(\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_\varphi) = \frac{1}{6} K \theta^2 + \int_0^\Gamma G^s(\Gamma) \Gamma d\Gamma.$$

Свойства материала определяются матрицей тангенциальных модулей C^P , которая в данном случае совпадает с матрицей Гессе функции свободной энергии $H(F)$ [9]:

$$C^P = H(F) = \begin{pmatrix} C_{rr}^P & C_{r\theta}^P & C_{r\varphi}^P \\ & C_{\theta\theta}^P & C_{\theta\varphi}^P \\ & & C_{\varphi\varphi}^P \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} C_{rr}^P &= \frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon_r^2} = A(\Gamma) + B(\Gamma) M_r^2(\varepsilon), & C_{\theta\theta}^P &= \frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon_\theta^2} = A(\Gamma) + B(\Gamma) M_\theta^2(\varepsilon), \\ C_{\varphi\varphi}^P &= \frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon_\varphi^2} = A(\Gamma) + B(\Gamma) M_\varphi^2(\varepsilon), & C_{r\theta}^P &= \frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon_r \partial \varepsilon_\theta} = D(\Gamma) + B(\Gamma) M_r(\varepsilon) M_\theta(\varepsilon), \\ C_{r\varphi}^P &= \frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon_r \partial \varepsilon_\varphi} = D(\Gamma) + B(\Gamma) M_r(\varepsilon) M_\varphi(\varepsilon), & C_{\theta\varphi}^P &= D(\Gamma) + B(\Gamma) M_\theta(\varepsilon) M_\varphi(\varepsilon), \\ A(\Gamma) &= \frac{1}{3} (K + 4G^s), & B(\Gamma) &= \frac{4}{9\Gamma} \frac{dG^s(\Gamma)}{d\Gamma}, & D(\Gamma) &= \frac{1}{3} (K - 2G^s), \\ M_r(\varepsilon) &= 2\varepsilon_r - \varepsilon_\theta - \varepsilon_\varphi, & M_\theta(\varepsilon) &= 2\varepsilon_\theta - \varepsilon_r - \varepsilon_\varphi, & M_\varphi(\varepsilon) &= 2\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r - \varepsilon_\theta. \end{aligned} \quad (5)$$

Зная матрицу тангенциальных модулей и полагая, что разгрузка происходит по линейному закону (упругопластический материал), определим неупругие составляющие приращения полной деформации, используя инкрементальный закон пластичности [8]

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = (I - SC^P) d\boldsymbol{\varepsilon},$$

где I — единичная матрица третьего порядка; $d\boldsymbol{\varepsilon}^p$ — вектор-столбец с компонентами $d\varepsilon_r^p$, $d\varepsilon_\theta^p$, $d\varepsilon_\varphi^p$; $d\boldsymbol{\varepsilon}$ — вектор-столбец приращений полных деформаций; S — матрица коэффициентов упругой податливости, обратная матрице модулей упругости:

$$S = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{pmatrix},$$

E , ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Используя инкрементальный закон, найдем

$$\begin{aligned} d\varepsilon_r^p &= [1 - E^{-1}(C_{rr}^P - \nu C_{r\theta}^P - \nu C_{r\varphi}^P)] d\varepsilon_r - E^{-1}(C_{r\theta}^P - \nu C_{\theta\theta}^P - \nu C_{\theta\varphi}^P) d\varepsilon_\theta - \\ &\quad - E^{-1}(C_{r\varphi}^P - \nu C_{\theta\varphi}^P - \nu C_{\varphi\varphi}^P) d\varepsilon_\varphi, \\ d\varepsilon_\theta^p &= [1 - E^{-1}(C_{\theta\theta}^P - \nu C_{r\theta}^P - \nu C_{\theta\varphi}^P)] d\varepsilon_\theta - E^{-1}(C_{r\theta}^P - \nu C_{rr}^P - \nu C_{r\varphi}^P) d\varepsilon_r - \\ &\quad - E^{-1}(C_{\theta\varphi}^P - \nu C_{r\varphi}^P - \nu C_{\varphi\varphi}^P) d\varepsilon_\varphi, \quad (6) \\ d\varepsilon_\varphi^p &= [1 - E^{-1}(C_{\varphi\varphi}^P - \nu C_{r\varphi}^P - \nu C_{\theta\varphi}^P)] d\varepsilon_\varphi - E^{-1}(C_{r\varphi}^P - \nu C_{r\theta}^P - \nu C_{rr}^P) d\varepsilon_r - \\ &\quad - E^{-1}(C_{\theta\varphi}^P - \nu C_{r\theta}^P - \nu C_{\theta\theta}^P) d\varepsilon_\theta. \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что из (6) следует равенство $d\varepsilon_r^p + d\varepsilon_\theta^p + d\varepsilon_\varphi^p = 0$, т. е. при неизменном модуле K объемная деформация сохраняет упругость на всех стадиях деформирования.

Пусть $\varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi$. Тогда $\sigma_\theta = \sigma_\varphi$, $\Gamma = 2(\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r)/\sqrt{3} = 2\gamma/\sqrt{3}$, $T = (\sigma_\varphi - \sigma_r)/\sqrt{3} = 2\tau/\sqrt{3}$. Здесь γ — максимальный сдвиг; τ — максимальное касательное напряжение. Поскольку касательный модуль к единой кривой равен $G^p = G^s + \Gamma dG^s/d\Gamma$, выражения (5) принимают вид

$$\begin{aligned} C_{rr}^P &= (K + 4G^p)/3, & C_{\varphi\varphi}^P &= C_{\theta\theta}^P = (K + G^p)/3 + G^s, \\ C_{r\varphi}^P &= C_{r\theta}^P = (K - 2G^p)/3, & C_{\theta\varphi}^P &= (K + G^p)/3 - G^s. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $G^s(\Gamma) = \frac{1}{\Gamma} \int_0^\Gamma G^p(\Gamma) d\Gamma$. После преобразования формул (6) с учетом выражений (7) приращения неупругих деформаций определяются равенствами

$$d\varepsilon_r^p = -\frac{2}{3} \left(1 - \frac{G^p(\Gamma)}{G}\right) d\gamma, \quad d\varepsilon_\theta^p = d\varepsilon_\varphi^p = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{G^p(\Gamma)}{G}\right) d\gamma,$$

где $d\gamma = d\varepsilon_\varphi - d\varepsilon_r$ — приращение максимального сдвига; G — модуль сдвига. Очевидно, что $d\varepsilon_r^p + d\varepsilon_\theta^p + d\varepsilon_\varphi^p = 0$. Приращение максимального неупругого сдвига равно

$$d\gamma^p = \left(1 - \frac{G^p(\Gamma)}{G}\right) d\gamma, \quad d\varepsilon_r^p = -\frac{2}{3} d\gamma^p, \quad d\varepsilon_\theta^p = d\varepsilon_\varphi^p = \frac{1}{3} d\gamma^p. \quad (8)$$

Соотношения (8) дополняют систему (1)–(4).

Решение краевой задачи при известной зависимости $\gamma^p(r)$ и фиксированном давлении. Если функция $\gamma^p(r)$ непрерывна и давление p задано, то решение краевой задачи (1)–(4) проводится в два этапа. На первом этапе, полагая неупругие деформации равными нулю, получаем известное решение упругой задачи, удовлетворяющее граничным условиям на поверхности полости и на бесконечности [12]:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2G} \frac{a^3}{r^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4G} \frac{a^3}{r^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4G} \frac{a^3}{r^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ p \\ p \end{pmatrix}; \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a^3}{r^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{a^3}{r^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{a^3}{r^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ p \\ p \end{pmatrix}; \quad (10)$$

$$\tau = (\sigma_\theta - \sigma_r)/2, \quad \gamma = \varepsilon_\theta - \varepsilon_r.$$

На втором этапе находим решение задачи определения собственных (остаточных) напряжений, соответствующих неупругим деформациям $\gamma^p(r)$, в случае свободной внешней границы (перемещение на бесконечности равно нулю). Решение этой задачи, полученное в работе [13], имеет вид

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_r' \\ \varepsilon_\theta' \\ \varepsilon_\varphi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & 0 & 0 \\ 0 & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^p \\ \gamma^p \\ \gamma^p \end{pmatrix}; \quad (11)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_r'' \\ \sigma_\theta'' \\ \sigma_\varphi'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & 0 & 0 \\ 0 & P_{22} & 0 \\ 0 & 0 & P_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^p \\ \gamma^p \\ \gamma^p \end{pmatrix}; \quad (12)$$

$$\tau'' = (P_{22} - P_{11})(\gamma^p)/2, \quad \gamma' = (Q_{22} - Q_{11})(\gamma^p).$$

Здесь

$$Q_{11}(\dots) = \frac{2(1-2\nu)}{3(1-\nu)} \left[\left(1 - \frac{(1+\nu)a^3}{(1-2\nu)r^3} \right) \int_a^\infty \frac{\dots}{r} dr - \int_a^r \frac{\dots}{r} dr - \dots \right],$$

$$Q_{22}(\dots) = Q_{33}(\dots) = \frac{2(1-2\nu)}{3(1-\nu)} \left[\left(1 + \frac{(1+\nu)a^3}{2(1-2\nu)r^3} \right) \int_a^\infty \frac{\dots}{r} dr - \int_a^r \frac{\dots}{r} dr \right],$$

$$P_{11}(\dots) = \frac{2E}{3(1-\nu)} \left[\left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \int_a^\infty \frac{\dots}{r} dr - \int_a^r \frac{\dots}{r} dr \right],$$

$$P_{22}(\dots) = P_{33}(\dots) = \frac{2E}{3(1-\nu)} \left[\left(1 + \frac{a^3}{2r^3} \right) \int_a^\infty \frac{\dots}{r} dr - \int_a^r \frac{\dots}{r} dr - \frac{\dots}{2} \right],$$

$\sigma_r'', \sigma_\theta'', \sigma_\varphi''$ — остаточные напряжения; $\varepsilon_r', \varepsilon_\theta', \varepsilon_\varphi'$ — совместные деформации, возникающие в результате появления первоначальных несовместных неупругих деформаций [8]. Напряженно-деформированное состояние определяется суммами решений (9) и (11), (10) и (12).

Решение краевой задачи с учетом кинетики образования неупругих деформаций. Краевая задача (1)–(4), (8) является нелинейной. При заданном давлении неупругие деформации заранее неизвестны. Их величина зависит от истории деформирования и кинетики развития после нагружения. Поэтому необходимо, во-первых, знать характер изменения напряженно-деформированного состояния при постепенном увеличении давления до заданного уровня, во-вторых, иметь методику вычисления неупругих деформаций при решении задачи, т. е. использовать некоторую итерационную процедуру.

Как правило, решение нелинейных задач основано на последовательном решении соответствующих линейных задач [14, 15]. Рассмотрим итерационный алгоритм вычисления напряжений и деформаций при постепенном увеличении давления в сферической полости. Пусть задана единая кривая $T(\Gamma)$, определяющая свойства материала на всех стадиях деформирования при неположительной объемной деформации. Инкрементальный (касательный) модуль равен $G^p = dT/d\Gamma$. Качественная зависимость $G^p(\Gamma)$ приведена на рис. 1 ($\Gamma^T, \Gamma^B, \Gamma^Z$ — интенсивности деформаций сдвига, соответствующие пределу текучести, пределу прочности и разрушению материала (равновесное разделение на фрагменты)).

Пусть при некотором значении давления $p = p_0$ в состоянии равновесия известны компоненты тензоров напряжений $\sigma_0(r)$ и деформаций $\varepsilon_0(r)$, функции $\Gamma_0(r)$ и $G_0^p(\Gamma_0(r))$, а также радиус r_0^T сферы, разделяющей области упругого и неупругого деформирования. Увеличим давление на малую величину Δp и будем искать решение исходной краевой задачи (1)–(4), (8) для давления $p_1 = p + \Delta p$.

Для определения напряженно-деформированного состояния в новом положении равновесия применим итерационную процедуру, на первом шаге которой будем решать упругую задачу для давления Δp . По формулам (9), (10), в которые вместо p подставим Δp , вычисляем компоненты тензоров $\Delta\sigma_1, \Delta\varepsilon_1$ и затем функцию $\Delta\Gamma_1(r)$. После этого находим

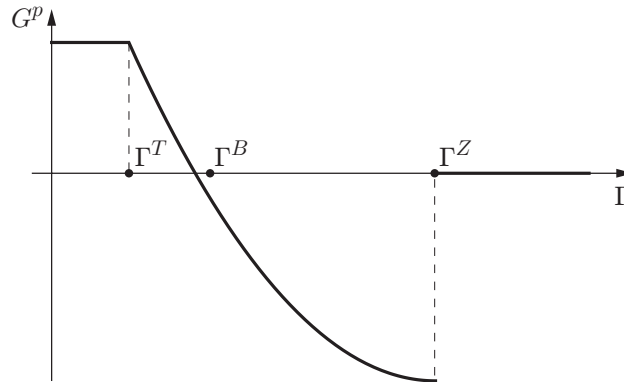


Рис. 1. Зависимость касательного модуля единой кривой от интенсивности деформаций сдвига

тензоры $\sigma_1(r) = \sigma_1(r) + \Delta\sigma_1(r)$ и $\varepsilon_1(r) = \varepsilon_1(r) + \Delta\varepsilon_1(r)$, а также $\Gamma_1(r) = \Gamma_0(r) + \Delta\Gamma_1(r)$. Из уравнения $\Gamma_1(r) = \Gamma^T$ получаем значение радиуса r_1^T сферы, разделяющей на данном этапе области упругого и неупругого деформирования. Для области неупругого деформирования записываем зависимость $G_1^p(\Gamma_1(r))$.

В результате изменения полных деформаций изменяется распределение неупругих деформаций. Для расчета дополнительных неупругих деформаций необходимо знать приращение интенсивности деформаций сдвига, влияющее на их образование. В области неупругого деформирования $d\Gamma_1 = \{\Delta\Gamma_1, r \in [a, r_0^T]; \Gamma_1(r) - \Gamma^T, r \in [r_0^T, r_1^T]\}$. Используя связь между деформациями сдвига и их интенсивностью, определяем приращение полных деформаций сдвига в области неупругого деформирования $d\gamma_1(r)$ и приращение неупругих деформаций сдвига $d\gamma_1^p(r)$ по формуле (8).

В результате появления дополнительных неупругих деформаций должно измениться напряженно-деформированное состояние. Следовательно, полученные на первом этапе суммарные напряжения и деформации не являются решением исходной краевой задачи. Необходима их коррекция, которую осуществим следующим образом. Для найденной функции $d\gamma_1^p(r)$ решаем задачу об определении остаточных напряжений в пространстве в случае свободной границы полости. По формулам (11), (12) находим остаточные напряжения $\Delta\sigma_2''(r)$, совместные деформации $\Delta\varepsilon_2'(r)$ и $\Delta\Gamma_2(r)$. Затем проводим коррекцию: $\sigma_2 = \sigma_1 + \Delta\sigma_2''$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \Delta\varepsilon_2'$, $\Gamma_2 = \Gamma_1 + \Delta\Gamma_2$. Из уравнения $\Gamma_2(r) = \Gamma^T$ определяем радиус r_2^T сферы, разделяющей области упругого и неупругого деформирования, а также записываем зависимость $G_2^p(\Gamma_2(r))$ для области неупругого деформирования.

При увеличении области неупругого деформирования коррекцию решения следует повторить с учетом того, что $d\Gamma_2 = \{\Delta\Gamma_2, r \in [a, r_1^T]; \Gamma_2(r) - \Gamma^T, r \in [r_1^T, r_2^T]\}$. Затем процесс итерации продолжается. На рис. 2 показан процесс определения величины $d\Gamma_n$ в ходе итераций.

Если итерационная процедура сходится ($r_n^T \rightarrow r_*^T, \Gamma_n \rightarrow \Gamma_*$), то в результате решения определяем равновесное напряженно-деформированное состояние пространства с полостью для заданного давления p_1 . Граница области разупрочнения (если она существует) определяется из уравнения $\Gamma_*(r) = \Gamma^B$, граница зоны разрушения — из уравнения $\Gamma_*(r) = \Gamma^Z$.

Пример. Горные породы обладают свойством деформационного разупрочнения, которое существенно влияет на эксплуатационные характеристики горных выработок, в

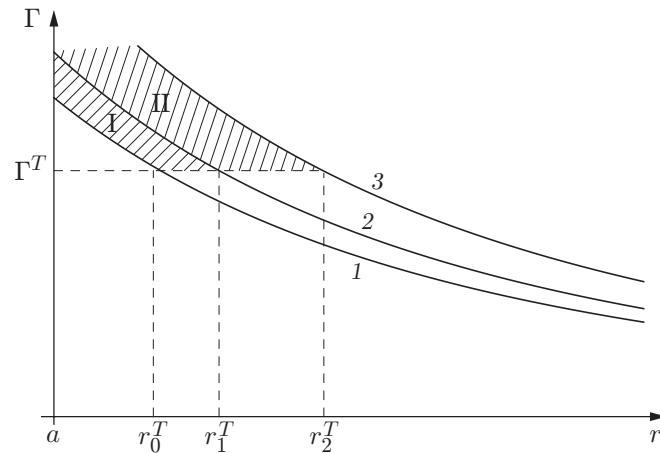


Рис. 2. Схема вычисления $d\Gamma_n$ в ходе итераций:
 I — область $d\Gamma_1$, II — область $d\Gamma_2$; 1 — Γ_0 , 2 — Γ_1 , 3 — Γ_2

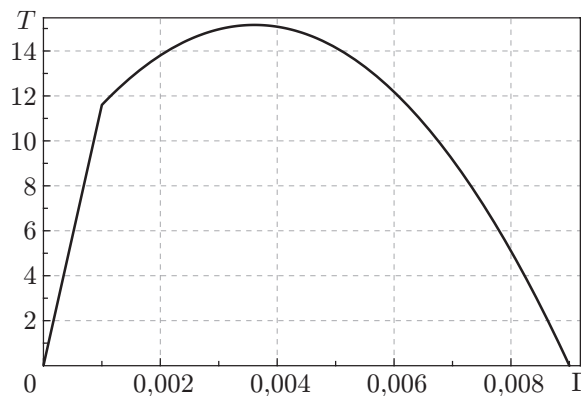


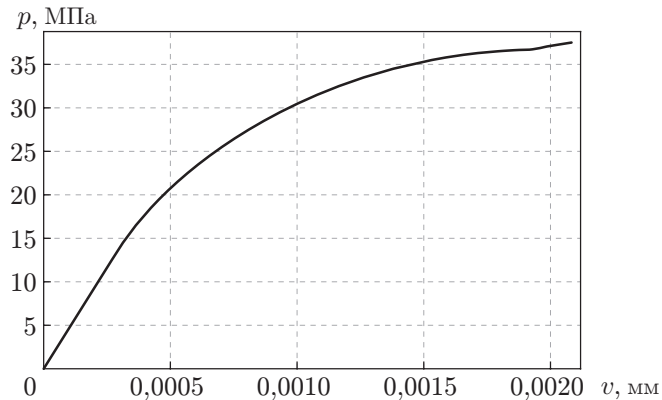
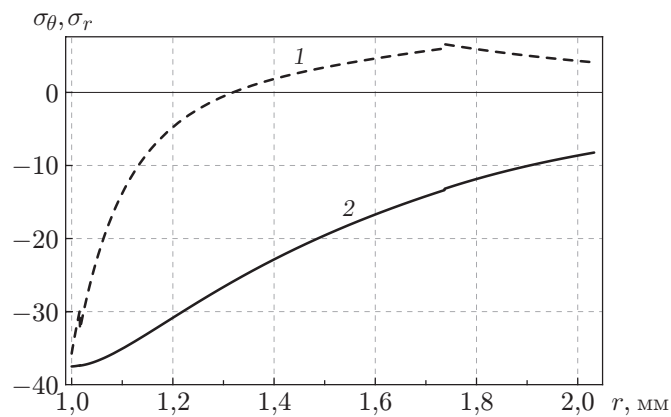
Рис. 3. Единая кривая $T(\Gamma)$

частности при проведении взрывных работ. Рассмотрим задачу о расширении сферической полости радиусом $a = 1$ мм в массиве породы. При описании механических свойств породы использовались следующие характеристики сельвенитов [16]: модуль Юнга $E = 2,86 \cdot 10^4$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,23$, модуль сдвига $G = 1,16 \cdot 10^4$ МПа. Единая кривая аппроксимирована выражением (рис. 3)

$$T(\Gamma) = \begin{cases} G\Gamma, & 0 \leq \Gamma \leq 0,001, \\ -45G\Gamma^2 + 0,325G\Gamma + 0,00072G, & 0,001 < \Gamma \leq 0,009, \\ 0, & \Gamma > 0,009. \end{cases}$$

Выполняя вычисления по предложенной выше методике при постепенном увеличении внутреннего давления, строим кривую равновесных состояний в координатах внутреннее давление p — перемещение точек границы в радиальном направлении v (рис. 4). Например, при $p = 37,51$ МПа границы зон упрочнения, разупрочнения и разрушения являются сферами с радиусами $r^T = 1,737$ мм, $r^B = 1,328$ мм и $r^Z = 1,016$ мм. На рис. 5 показаны эпюры напряжений в состоянии равновесия при $p = 37,51$ МПа.

Результаты решения данной задачи показывают, что с использованием предложенной итерационной процедуры можно определить напряжения и деформации в состоянии равновесия с заданной точностью.

Рис. 4. Кривая равновесных состояний $p(v)$ Рис. 5. Распределение напряжений σ_θ (1) и σ_r (2) при наличии зоны разрушения

Таким образом, использование изложенного в настоящей работе итерационного алгоритма расчета позволяет определить равновесное состояние рассматриваемой механической системы, если наряду с устойчивыми состояниями материала учитывается неустойчивая стадия деформирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Радченко В. П., Небогина Е. В., Басов М. В. Структурная модель закритического упругопластического деформирования материалов в условиях одноосного растяжения // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2000. № 9. С. 55–65.
2. Vařant Z. P. Stability of structures: elastic, inelastic, fracture and damage theories / Z. P. Vařant, L. Cedolin. N. Y.: Oxford Univ. Press, 2003.
3. Чаусов Н. Г. Полная диаграмма деформирования как источник информации о кинетике накопления повреждений и трещиностойкости материалов // Завод. лаб. Диагностика материалов. 2004. Т. 70, № 7. С. 42–49.
4. Volokh K. Y. Softening hyperelasticity for modeling material failure: Analysis of cavitation in hydrostatic tension // Intern. J. Solids Structures. 2007. N 44. P. 5043–5055.
5. Кадашевич Ю. И., Помыткин С. П. Формулировка критерия прочности материалов для эндохронной теории неупругости, учитывающей микроразрушения при больших деформациях // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2010. № 1. С. 53–59.

6. **Вильдеман В. Э., Третьяков М. П.** Испытания материалов с построением полных диаграмм деформирования // Пробл. машиностроения и надежности машин. 2013. № 2. С. 93–98.
7. **Стружанов В. В., Бахарева Е. А.** Математические методы в теории чистого изгиба прямоугольных балок из разупрочняющегося материала с симметричной диаграммой растяжения-сжатия // Вычисл. механика сплош. сред. 2012. Т. 5, № 2. С. 158–167.
8. **Стружанов В. В.** Деформационное разупрочнение материала в элементах конструкций / В. В. Стружанов, В. И. Миронов. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1995.
9. **Стружанов В. В., Бердников К. В.** Об определяющих соотношениях среды Генки для разупрочняющегося материала при диагональном тензоре деформаций // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2012. № 3. С. 72–80.
10. **Лурье А. И.** Теория упругости. М.: Наука, 1970.
11. **Ильюшин А. А.** Пластичность. Ч. 1. Упругопластические деформации / Репрод. воспр. текста изд. 1948 г. М.: Логос, 2004.
12. **Тимошенко С. П.** Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. М.: Наука, 1975.
13. **Бердников К. В., Стружанов В. В.** Остаточные напряжения в упругопластическом пространстве, возникающие после расширения сферической полости // Вестн. Урал. гос. ун-та путей сообщ. 2013. № 2. С. 18–26.
14. **Самарский А. А.** Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. М.: Наука, 1989.
15. **Березин И. С.** Численные методы / И. С. Березин, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. М.: Изд-во Бином. Лаб. знаний, 2003.
16. **Барях А. А.** Физико-механические свойства соляных пород Верхнекамского калийного месторождения / А. А. Барях, В. А. Асанов, И. Л. Паньков. Пермь: Перм. гос. техн. ун-т, 2008.

*Поступила в редакцию 15/VII 2016 г.,
в окончательном варианте — 9/I 2017 г.*
