

УДК 533.4.011

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ЗА ЛОКАЛЬНЫМ ЭНЕРГОИСТОЧНИКОМ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ СЛАБОНЕДОРАСШИРЕННОЙ СТРУЕЙ

Т.А. КОРОТАЕВА, А.П. ШАШКИН

*Институт теоретической и прикладной механики СО РАН,  
Новосибирск*

Для предварительных исследований воздействия локального энергоисточника на обтекание тела сверхзвуковым потоком предложена упрощенная модель следа за источником. Моделирование следа за локальным энергоисточником с помощью слабонедорасширенной струи позволяет получить аэродинамические характеристики тел, согласующиеся с результатами полного расчета трехмерных уравнений Эйлера.

Большой интерес к исследованию обтекания тел неоднородным потоком вызван прежде всего практическим вопросом о степени влияния этой неоднородности на аэродинамические характеристики летательных аппаратов. Неоднородность потока может быть обусловлена различными причинами, в том числе наличием в потоке областей энергоподвода. В работах [1–3] рассматривалось воздействие на параметры сверхзвукового потока модельного точечного источника, когда энергоподвод осуществляется по гауссовскому закону. Мощность источника энерговыделения  $\dot{Q}$  (количество тепла, подведенного к единице массы газа в единицу времени) принималась известной функцией координат и времени [1–3]:

$$\dot{Q} = q_0 \left( \frac{p_\infty}{\rho_\infty} \right)^{3/2} \frac{1}{R_s} \exp \left( -\frac{\Delta r^2}{R_s^2} \right), \quad (1)$$

где  $\dot{Q} = dQ/dt$ ,  $R_s$  — эффективный радиус теплового пятна,  $\Delta r$  — расстояние от текущей точки до источника энерговыделения,  $p_\infty, \rho_\infty$  — давление и плотность набегающего потока,  $q_0$  — параметр, характеризующий интенсивность энергоподвода. В [1] задача рассматривалась в невязкой двумерной постановке, в [2, 3] получено решение трехмерных уравнений Эйлера. В целом отмечено значительное влияние подвода тепла на суммарные аэродинамические характеристики: в [1] — на волновое сопротивление затупленных тел, в [2, 3] — на волновое сопротивление, а также коэффициент подъемной силы и момент тангажа заостренного тела. В то же время в этих работах нет практических рекомендаций по использованию областей энергоподвода с целью изменения режимов обтекания. Это связано с тем, что, во-первых, число и диапазон изменения параметров указанной задачи (углы атаки, числа Маха, формы обтекаемых тел, интенсивность, размеры и расположение области энергоподвода) велики, во-вторых, получение численного решения этой задачи даже в рамках

модели невязкого нетеплопроводного газа трудоемко. Поэтому крайне важно разработать приближенную методику определения суммарных аэродинамических характеристик тел, обтекаемых сверхзвуковым потоком в присутствии локального источника энергоподвода, которая позволила бы получить качественные оценки и выделить условия, когда это присутствие наиболее эффективно. При этом задача распадается на два этапа: 1) приближенное определение суммарных аэродинамических характеристик тел; 2) построение приближенной модели локального энергоисточника.

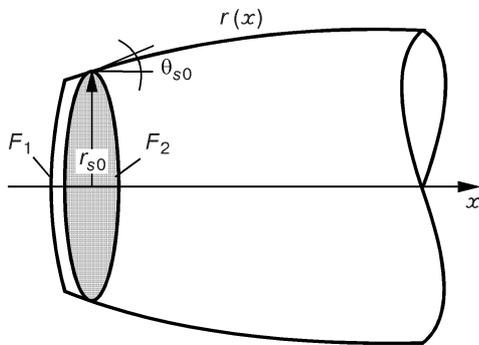
Для приближенного определения аэродинамических характеристик используются асимптотические допущения вблизи стенки в методе конечных объемов, подробно рассмотренные в работе [2]. Присутствие локального энергоисточника в приближенной методике сводится к изменению параметров набегающего потока. Фактически модель источника (1) представляет собой сферу с подводом энергии по экспоненциальному закону. При прохождении такой области газ сильно нагревается, при этом повышаются давление и энтропия [1 – 3]. В результате в следе за локальным источником поток ведет себя как слабонедорасширенная струя [2, 3]. Возможность использования струйной аналогии следует также из [4].

Задача приближенного построения недорасширенной струи сводится к следующим этапам: 1) определение параметров в начальном сечении струи, 2) построение формы струи, 3) получение внешнего по отношению к струе решения в спутном потоке, 4) определение параметров в текущем сечении  $x$ . Здесь и далее принимаем, что показатель адиабаты Пуассона  $\gamma = c_p / c_v = \text{const}$ . Рассмотрим перечисленные этапы подробнее.

1. Заменим сферическую область теплоподвода диском (слоем газа конечной толщины) с неравномерным по диаметру изменением температуры торможения (рис. 1; здесь  $F_1, F_2$  — начальное и конечное сечение диска). Если площадь  $F_1 = F_2$ , то при некоторых условиях в набегающем потоке (числе Маха и величине теплоподвода) возможно явление теплового кризиса. В рассматриваемой задаче при данных теплоподводе и числе Маха для того, чтобы течение при прохождении через область теплоподвода оставалось сверхзвуковым (что имеет место в полных расчетах для сферического энергоисточника [2, 3]), необходимо выполнение условия  $F_1 < F_2$  [5]. Температурную зависимость от радиуса диска принимаем пропорциональной величине подвода энергии в локальном энергоисточнике и аппроксимируем по результатам полного расчета [2]:

$$\Delta T_0 \sim a e^{-b(r/r_{s0})^2},$$

где  $\Delta T_0 = \frac{T_0}{T_\infty} - \frac{T_{0\infty}}{T_\infty}$  — приращение температур торможения, индекс  $\infty$  означает условия в набегающем потоке,  $r_{s0}$  — радиус диска,  $r$  — расстояние между



текущей точкой и центром области энергоподвода,  $a$  и  $b$  — коэффициенты, зависящие от условий в набегающем потоке. Для определения других параметров потока запишем уравнение неразрывности и уравнение сохранения импульса в виде

$$\rho_1 w_1 F_1 = \rho_2 w_2 F_2,$$

Рис. 1. Область теплоподвода с неравномерным по диаметру распределением температуры.

$$(p_1 + \rho_1 w_1^2)F_1 - (p_2 + \rho_2 w_2^2)F_2 + \frac{p_2 + p_1}{2}(F_2 - F_1) = 0,$$

здесь  $\rho, w, p, F$  — соответственно плотность, скорость, давление, площадь в сечениях до энергоподвода (индекс 1) и после него (индекс 2). Из этой системы получим

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{1}{2}(\Psi + \sqrt{\Psi^2 + 4A}),$$

где

$$\Psi = A(2\gamma M_2^2 + 1) - (2\gamma M_1^2 + 1)$$

( $M$  — число Маха). Задача о прохождении потока газа через диск нагрева хорошо изучена для случая постоянного давления и постоянной площади трубки тока [6]. В частности, при  $p = \text{const}$

$$\frac{F_2}{F_1} \sim (T_{02} - T_{01}).$$

Это выражение дает распределение чисел Маха, давления и других газодинамических параметров по радиусу в сечении 2.

2. Для нахождения параметров в каждом текущем сечении  $X$  необходимо задать форму струи. Течение внутри слабонедорасширенной струи рассматриваем как слоистое [7], и вдоль каждой криволинейной трубки тока могут быть применены одномерные изэнтропические соотношения. Вблизи оси струи принимаем

$$\frac{d\left(\frac{dF_x}{dF_{s0}}\right)}{dr} = 0, \quad \frac{d^2\left(\frac{dF_x}{dF_{s0}}\right)}{dr^2} = 0,$$

т. е. с точностью до второй производной может быть использовано околоосевое приближение [8]. Здесь и далее индекс  $s0$  относится к параметрам струи в начальном сечении,  $x$  — в текущем сечении,  $s\infty$  — на бесконечности. Полагая, что при  $x \rightarrow \infty$  в слабонедорасширенной струе происходит выравнивание давления, причем  $p \rightarrow p_\infty$  [5 – 7], с помощью известных изэнтропических соотношений получим

$$r'_{s\infty} = r_{s0} \sqrt{\frac{M_{s0} \left(\frac{p_{s0}}{p_{s\infty}}\right)^{\frac{\gamma+1}{2}}}{M_{s\infty} \left(\frac{p_{s\infty}}{p_{s0}}\right)}}. \quad (2)$$

Для нахождения формы струи с учетом допущения о малости величины наклона вектора скорости к оси запишем уравнения газовой динамики для осесимметричного случая:

$$\frac{\partial}{\partial x}(r\rho w \cos \theta) + \frac{\partial}{\partial r}(r\rho w \sin \theta) = 0,$$

$$w \cos \theta \frac{\partial}{\partial x}(w \cos \theta) + w \sin \theta \frac{\partial}{\partial r}(w \cos \theta) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$w \cos \theta \frac{\partial}{\partial x}(w \sin \theta) + w \sin \theta \frac{\partial}{\partial r}(w \sin \theta) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (3)$$

Здесь  $x, r$  — координаты цилиндрической системы координат,  $w$  — модуль скорости,  $\theta$  — угол наклона вектора скорости к оси. Полагая, что  $\theta \ll 1$ ,  $\varepsilon = \theta^3 \rightarrow 0$  и  $\theta = \frac{\theta_x}{r_x} r$ , из (3) можно получить

$$a \frac{d\theta_x}{dx} + \frac{1}{r_x} (2 + \theta_{s0})^2 = 0. \quad (4)$$

Принимая, что

$$\operatorname{tg} \theta_x \approx \theta = \frac{dr_x}{dx}, \quad \theta_x \Big|_{x \rightarrow \infty} = 0, \quad (5)$$

из (4) с учетом (5) находим

$$\theta_{s0} = 2 \sqrt{\frac{\ln \left( \frac{r_{s\infty}}{r_{s0}} \right)}{B}}, \quad (6)$$

где  $B$  — константа, включающая в себя газодинамические постоянные.

Функция  $r(x)$ , определяющая форму струи в меридиональном сечении, достаточно гладкая, и для ее задания может быть использована полиномиальная зависимость вида

$$r(x) = a(1-t)^3 + bt(1-t)^2 + ct^2(1-t) + dt^3,$$

где параметр  $t = x/x_R$  меняется в интервале  $[0, 1]$ ,  $x_R$  — расстояние, начиная с которого влиянием источника на параметры набегающего потока можно пренебречь (в полных расчетах это  $\sim 16$  эффективных радиусов заряда). Коэффициенты  $a, b, c, d$  могут быть определены из четырех условий: (2), (5), (6) и известного значения  $r_{s0}$ :

$$\bar{r}(x) = \bar{r}_{s0}(1-t)^3 + (\theta_{s0} + 3\bar{r}_{s0})t(1-t)^2 + 3\bar{r}_{s\infty}t^2(1-t) + \bar{r}_{s\infty}t^3.$$

Тогда угол наклона границы струи  $\theta_x = \frac{d\bar{r}(x)}{dx}$ , т. е.

$$\theta_x = -3\bar{r}_{s0}(1-t)^2 + (\theta_{s0} + 3\bar{r}_{s0})(1-t)(1-3t) + 3\bar{r}_{s\infty}t(2-3t) + 3\bar{r}_{s\infty}t^2.$$

Здесь  $\bar{r}, \bar{r}_{s0}, \bar{r}_{s\infty}$  отнесены к  $x_R$ .

3. Внешнее по отношению к струе течение характеризуется малыми значениями угла наклона вектора скорости и практически постоянной энтропией. Исходя из этого, решение можно искать в рамках линейной теории для потенциальных течений.

Для потенциального сверхзвукового осесимметричного течения уравнения газовой динамики представимы в виде [6, 9]

$$(M_\infty^2 - 1) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = 0, \quad (7)$$

где  $\Phi$  — потенциал скорости. Для решения задачи о сверхзвуковом обтекании тонких осесимметричных тел обычно применяется метод источников [6, 9]. Однако поскольку рассматриваемая струя не может быть отнесена к классу тонких тел, решение проводится методом разделения переменных [10, 11]. Принимая в качестве переменной

$$y = r\sqrt{M_\infty^2 - 1},$$

из уравнения (7) получим волновое уравнение, в котором частное решение определяется в виде

$$\Phi_k(x, y) = X_k(x)Y_k(y).$$

В качестве граничных условий имеем следующие соотношения:

$$\Phi_k(0, y) = 0,$$

$$\Phi_k(x_R, y) = 0,$$

$$\Phi_k(x, r_x\sqrt{M_\infty^2 - 1}) = 0.$$

$$\frac{w_r}{w_x} = \operatorname{tg} \theta_x \text{ при } r = r_x.$$

Функции  $X, Y$  удовлетворяют уравнениям

$$X_{xx} + \lambda X = 0, \quad Y_{yy} + \frac{Y_y}{y} + \lambda Y = 0.$$

В рассматриваемой задаче  $\lambda = \frac{\pi k}{x_R} > 0$ . Частное решение  $X_k(x)$  имеет вид [11]

$$X_k(x) = D_k \sin\left(\frac{\pi k x}{x_R}\right).$$

Уравнение для  $Y$  можно преобразовать, введя переменную  $z_k = y \frac{\pi k}{x_R}$ :

$$Y_{zz} + \frac{Y_z}{z} + Y = 0,$$

где индекс  $z$  означает дифференцирование по  $z$ . Это уравнение Бесселя первого рода нулевого порядка, решение которого имеет вид [11]

$$Y(z_k) = C_1 J_0(z_k),$$

где  $C_1 = \text{const}$ ,  $J_0(z_k)$  — функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Тогда общее решение запишется как

$$\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} D'_k \sin \xi_k J_0(\eta_k),$$

где

$$\xi_k = \frac{\pi k x}{x_R}, \quad \eta_k = \frac{\pi k y}{x_R} = \frac{\pi k r \sqrt{M_\infty^2 - 1}}{x_R}, \quad D'_k = \text{const}.$$

Это решение автоматически удовлетворяет граничным условиям при  $x = 0$ ,  $x = x_R$ ,  $r \rightarrow \infty$ . Коэффициенты  $D'_k$  определяются из сопоставления разложений в ряд Фурье потенциала  $\Phi$  и наклона вектора скорости вдоль границы

струи. При этом в рамках используемых допущений ( $\theta \ll 1$ ) можно записать [9]:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = w_r = W_\infty \theta_x \text{ при } r = r_x.$$

Отсюда, учитывая, что

$$J'_0(z) = -J_1(z)$$

и

$$\frac{J_0(z)}{J_1(z)} \approx \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha_s}, \quad \frac{J_1(z)}{J_1(z_s)} \approx \left( \frac{r_x}{r} \right)^{1/2} \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_s},$$

где  $\alpha = \frac{\pi}{4}(\alpha' - \text{int}(\alpha'))$ ,  $\alpha' = \frac{4k\sqrt{M_\infty^2 - 1}}{x_R} - 1$ , индекс  $s$  означает принадлежность к

струе, получим:

$$\Phi = -W_\infty \left( \frac{r_x}{r} \right)^{1/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x_R}{(\pi k)^2 \sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left\{ \theta_0 + \frac{2a_2}{(\pi k)^2} ((-1)^k - 1) \right\} \sin \pi k \bar{x} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha_s},$$

$$\Phi_x = -W_\infty \left( \frac{r_x}{r} \right)^{1/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k \sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left\{ \theta_0 + \frac{2a_2}{(\pi k)^2} ((-1)^k - 1) \right\} \cos \pi k \bar{x} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha_s}, \quad (8)$$

$$\Phi_r = W_\infty \left( \frac{r_x}{r} \right)^{1/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} \left\{ \theta_0 + \frac{2a_2}{(\pi k)^2} ((-1)^k - 1) \right\} \sin \pi k \bar{x} \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_s}, \quad (9)$$

где  $a_2$  — коэффициент известного разложения

$$\theta_{xs} = \theta_0 + a_1 \bar{x} + a_2 \bar{x}^2 + \dots$$

В определении  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$  изменение  $r$  не оказывает существенного влияния, тогда

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_s} \approx 1; \quad \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha_s} \approx \text{ctg} \alpha_s = \frac{1}{\alpha_s} \text{ctg} \alpha_s,$$

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha_s} \approx \frac{1}{\alpha_s} = \frac{1}{4\pi k \sqrt{M_\infty^2 - 1} \cdot \bar{r}_x \delta_k},$$

где

$$\delta_k = 1 - \frac{\text{int} \left( 4k \sqrt{M_\infty^2 - 1} \cdot \bar{r}_x \right)}{4k \sqrt{M_\infty^2 - 1} \cdot \bar{r}_x} \quad (0 \leq \delta_k \leq 1), \quad (10)$$

$$\bar{r}_x = \frac{r_x}{x_R}, \quad \bar{r} = \frac{r}{x_R}.$$

При этом необходимо отметить, что величина  $\delta_k$  в интервале изменяется стохастически. Для суммирования получившихся бесконечных рядов применим метод неопределенных коэффициентов. Окончательно (8), (9) примут вид

$$\Phi_x = -W_\infty \frac{2\theta_0(1-\bar{x}) - (\theta_0 + a_2)(1-\bar{x}^2) + \frac{2}{3}a_2(1-\bar{x}^3)}{2(\bar{r}_x \bar{r})^{1/2} (M_\infty^2 - 1)},$$

$$\Phi_r = W_\infty \left( \frac{\bar{r}_x}{\bar{r}} \right)^{1/2} \theta_x(\bar{x}).$$

Давление в спутном потоке определяется из линеаризованного уравнения Бернулли [9]

$$C_p = \frac{P - P_\infty}{\frac{\gamma}{2} M_\infty^2} \approx 2 \left( -\frac{\Phi_x}{W_\infty} + \frac{\Phi_r^2}{2W_\infty^2} \right).$$

Далее, по известному давлению в спутном потоке, с учетом того, что энтропия на слабом головном скачке практически не меняется, с помощью изоэнтропических соотношений определяются остальные параметры потока.

4. После определения формы струи и давления на границе струи из внешнего решения по изоэнтропическим соотношениям [5, 6] находим числа Маха на границе струи и через них отношение  $F_x/F_{s0}$  в каждом текущем сечении  $X$ . Величина  $F/F_{s0}$  для каждого слоя в сечении должна определяться, вообще говоря, из решения двумерной задачи. Однако, полагая, что функция  $f(r) = F/F_{s0}$  — гладкая и известны условия на концах интервала (вблизи оси и на границе струи), используем аппроксимацию этой функции с помощью рационального локального сплайна [12]. В результате величина  $F/F_{s0}$ , определенная таким образом для каждого слоя при допущении о постоянстве энтропии вдоль трубки тока, позволяет определить все параметры потока по известным изоэнтропическим соотношениям [5, 6]. На рис. 2, 3 представлены результаты приближенного моделирования локального энергоисточника с использованием струйной аналогии в сопоставлении с результатами численных исследований методом конечных объемов. На рис. 2 показаны изменения параметров поперек струи на различных расстояниях от ее начального сечения (маркированные линии). Там же приведены распределения соответствующих параметров, полученные с помощью расчета [2, 3] в следе за моделируемым энергоисточником (сплошные линии). Расстояния  $r$  отнесены к эффективному радиусу источника  $R_s$ . Видно, что параметры потока претерпевают значительные (в несколько раз) изменения. В начале струи давление значительно выше давления в набегающем потоке (рис. 2, *a*). По мере удаления от начального участка струи, вследствие расширения потока, давление становится ниже значения  $P_\infty$ . На периферии струи и во внешнем течении давление остается выше, чем в набегающем потоке. Однако интенсивность этой волны сжатия резко убывает. Профиль температуры торможения является монотонной функцией и не меняет своего вида вдоль продольной координаты. Плотность на оси струи ниже, чем в набегающем потоке и продолжает убывать вдоль струи (рис. 2, *b*). На периферии струи в области внешнего решения плотность выше  $P_\infty$ , но затем быстро убывает до значения в невозмущенном течении. Число Маха в струе, сначала низкое на оси струи, постепенно увеличивается, оставаясь все же меньшим числа Маха набегающего потока

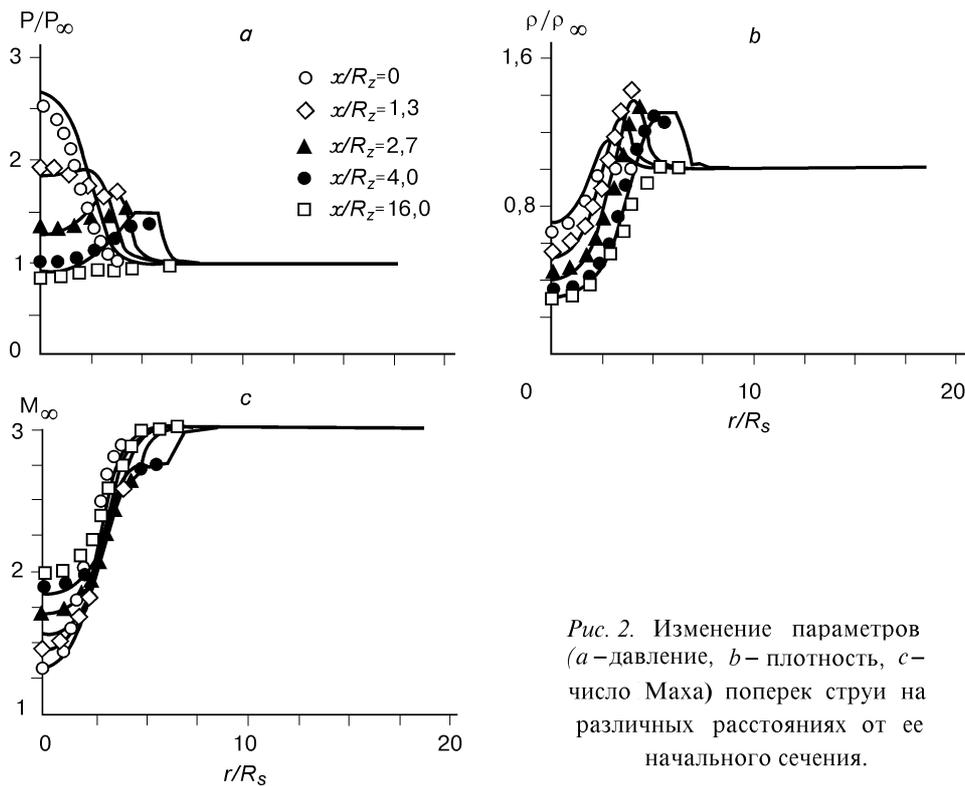
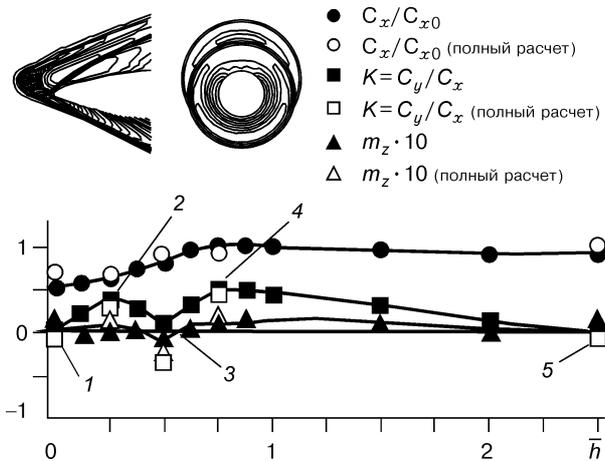


Рис. 2. Изменение параметров (а – давление, б – плотность, с – число Маха) поперек струи на различных расстояниях от ее начального сечения.

(рис. 2, с). На больших расстояниях от источника воздействие внешней волны на параметры потока может рассматриваться как при звуковом ударе. При этом, даже если источник будет не осесимметричен, течение в следе за ним может рассматриваться как осесимметричное [13]. Сравнение с данными полного расчета для локального энергоисточника показывает, что градиент давления в модельной струе с ростом  $x$  несколько меньше, чем в расчетах [2, 3]. Поведение плотности и числа Маха больше согласуется с данными [2, 3].

Рис. 3 иллюстрирует воздействие области энергоподвода на обтекание тела оживальной формы. Источник располагался на различных расстояниях от оси тела. Данные получены при численном решении трехмерных уравнений Эйлера и с помощью приближенной методики. Из рисунка видно, что структура потока сильно меняется при наличии энергоисточника и суммарные характеристики определяют два фактора: существенно неравномерный поток в следе за источником и поперечное “перетекание” волн сжатия и разрежения с нижней стороны тела на верхнюю и наоборот. Так, при перемещении источника вверх от оси тела

Рис. 3. Воздействие области энергоподвода на суммарные аэродинамические характеристики тела оживальной формы (1 — положение источника на оси). Поясн. см. в тексте.



сначала наблюдается рост отношения  $K = C_y/C_x$  за счет преобладающего воздействия на поверхность тела нижней поджатой части струи (положение 2). Затем в результате “перетекания” волны сжатия на верхнюю часть тела и волны разрежения от источника вниз значение  $K$  убывает (положение 3). Далее преобладание протяженной зоны разрежения над обтекаемым телом приводит к росту  $K$  и момента тангажа (4). Влияние этой зоны с ростом  $\bar{h}$  убывает (5) (здесь  $\bar{h}$  — расстояние от оси тела до источника, отнесенное к  $R_x$ ).

Сопоставление результатов расчета по приближенному алгоритму с данными полных расчетов показывает их удовлетворительную согласуемость. Предлагаемая модель может быть использована в достаточно широком диапазоне интенсивностей источников и чисел Маха набегающего потока.

В целом можно считать, что приближенное моделирование локального источника с использованием струйной аналогии позволяет получить качественно правильную картину течения в следе за сферической областью энергоподвода.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Георгиевский П.Ю., Левин В.А. Изменение режима обтекания сферы за счет локального энергетического воздействия на набегающий поток // Проблемы механики сплошной среды. — Владивосток, 1997. — С. 86–95.
2. Коротаева Т.А., Фомин В.М., Шашкин А.П. Численное исследование воздействия локального энергоисточника на пространственное сверхзвуковое обтекание заостренных тел. — Новосибирск, 1996. — 36 с. — (Препр. / Российская акад. наук. Сиб. отд-ние. Ин-т теор. и прикл. механики; № 1-96).
3. Коротаева Т.А. Численное исследование пространственного обтекания тел сверхзвуковым неравномерным потоком: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Новосибирск, 1997. — 168 с.
4. Баев В.К., Бузуков А.А., Шумский В.В. Структура реагирующей импульсной струи водорода, истекающей в атмосферный воздух при высоких степенях нерасчетности и ударном воспламенении. — Новосибирск, 1997. — 43 с. — (Препр. / Российская акад. наук. Сиб. отд-ние. Ин-т теор. и прикл. механики; № 8-97).
5. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. — М.: Наука, 1969.
6. Черный Г.Г. Газовая динамика. — М.: Наука, 1988.
7. Пирумов У.Г., Росляков Г.С. Газовая динамика сопел. — М.: Наука, 1990.
8. Дулов В.Г., Лукьянов Г.А. Газодинамика процессов истечения. — Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1984.
9. Краснов Н.Ф. Аэродинамика тел вращения. — М.: Машиностроение, 1964.
10. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. — М.: Мир, 1967.
11. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1972.
12. Коротаева Т.А., Шашкин А.П. Численное представление поверхности по опорным точкам на базе рационального сплайна. — Новосибирск, 1987. — 17 с. — (Препр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т теор. и прикл. механики; № 21-87).
13. Korotaeva T.A., Shashkin A.P. Estimation of sonic boom near a thin wing in supersonic flow // Intern. Conf. Meth. Aerophys. Research: Proc. Pt 2. — Novosibirsk, 1996. — P. 125–130.

*Статья поступила в редакцию 12 мая 1998 г.*