

УДК 622.023

**УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРАБОТОК
РАЗЛИЧНЫХ ФОРМ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ
ПРИ УСЛОВИИ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ КУЛОНА**

А. Г. Протосеня, М. А. Карасев, Н. А. Беляков

*Национальный минерально-сырьевой университет “Горный”, E-mail: kaf-sgp@mail.ru,
В. О., 21 линия, 2, 199026, г. Санкт-Петербург, Россия*

Для выработок эллиптического, сводчатого, квадратного и полигонального поперечных сечений рассмотрена плоская упруго-пластическая задача при условии предельного равновесия Кулона и различных коэффициентах бокового распора в нетронутым массиве. Решение задачи выполнено методом малого параметра и численным методом конечных элементов. Для взаимовлияющих выработок получены решения упруго-пластических задач. Установлены закономерности концентрации вертикальных напряжений в целике между взаимовлияющими выработками.

Упруго-пластическая задача, условие Кулона, выработка, напряжение, зона предельного состояния

Точные решения упруго-пластической задачи для двухосного сжатия плоскости и пластины с круговым отверстием появились в [1–3], где в качестве условия наступления пластических деформаций рассматривалось условие Треска. Основные приближенные методы и подходы — это прежде всего метод коллокаций, примененный в [4], и метод малого параметра, используемый в [5, 6]. Обстоятельный обзор и анализ тех и других способов дан в [7]. Кроме условия Треска при решении задачи брались и другие условия пластичности (в [8] задача исследовалась при экспоненциальном условии пластичности). В данной работе в качестве условия пластичности использовано условие предельного равновесия Кулона.

Несколько слов о постановке задачи при этом условии пластичности. Прежде всего отметим, что для описания предельного состояния горных пород и грунтов используется огибающая кругов напряжений Мора, полученная при испытаниях образцов в условиях объемных напряженных состояний. На практике наибольшее распространение получила линейная аппроксимация в форме огибающей, предложенной Кулоном. Из существующих подходов и методов решений задачи о двухосном сжатии плоскости с круговым отверстием при условии пластичности Кулона выделим решения [9–11]. В [9] задача решалась методом малого параметра, в [10] получено точное решение для однородного и неоднородного пластического состояний, в [11] — приближенное решение задачи с применением метода коллокаций для случаев полного и неполного охватов упруго-пластической границей контура выработки с круговым сечением. Ставится цель — решить задачу о двухосном сжатии массива горных пород с выработками

эллиптического, сводчатого, квадратного и полигонального поперечных сечений при условии Кулона. Отметим, что с начальным гидростатическим напряженным состоянием породного массива для выработок указанных сечений задача рассматривалась в [12].

Рассмотрим упруго-пластическое распределение напряжений вокруг выработок различных форм поперечных сечений, расположенных в изотропном однородном массиве пород с коэффициентом бокового распора λ . Решение задачи сводится к нахождению напряжений и границы пластической зоны для бесконечной плоскости с отверстиями различной формы, по контуру которых действует равномерное нормальное давление, равное отпору крепи.

Уравнение контура выработки запишем в виде разложения по малому параметру ε :

$$r_* = r_0 \left[1 + \varepsilon \cos(n+1)\theta - \varepsilon^2 \frac{\cos^2(n+1)}{2} + \dots \right], \quad (1)$$

где $r_0 = R_0 \sqrt{1+c^2}$; $\varepsilon = \frac{c}{1+c^2}$; θ — угловая координата; R_0 — величина, определяющая размеры контура; c, n — величины, определяющие очертание контура.

При $c=0, n=0$ контур является окружностью, при $0 < c < 1, n=1$ — эллипсом, при $c=0.1, n=2$ — криволинейным сводом, при $1/10 < c < 1/3, n=3$ — криволинейным квадратом, при $0 < c < 1/2, n > 3$ — криволинейным многоугольником.

На контуре выработки действует равномерное нормальное давление P_0 :

$$\sigma_r = P_0, \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad (2)$$

где $\sigma_r, \tau_{r\theta}$ — радиальное и касательное напряжения.

Будем считать, что вокруг выработки образуется область предельного состояния, которая полностью охватывает контур, напряжения в ней удовлетворяют условию пластичности Кулона:

$$(\sigma_\Theta - \sigma_r)^2 + 4\tau_{r\theta}^2 = \sin^2 \varphi (\sigma_\Theta + \sigma_r + 2k \operatorname{ctg} \varphi)^2, \quad (3)$$

где σ_Θ — тангенциальное нормальное напряжение; k, φ — соответственно сцепление и угол внутреннего трения горной породы.

Перейдем к безразмерным координатам. Для этого все величины, имеющие размерность напряжения, отнесем к величине сцепления k , а величины, имеющие размерность длины, к начальному значению радиуса пластической зоны $r_s^{(0)}$.

Обозначим:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= \frac{\sigma_r}{k}, \quad \tau_{\rho\theta} = \frac{\tau_{r\theta}}{k}, \quad \sigma_\theta = \frac{\sigma_\Theta}{k}, \\ q &= \frac{P_0}{k}, \quad \rho = \frac{r}{r_s^{(0)}}, \quad \alpha = \frac{r_0}{r_s^{(0)}}, \quad \rho_* = \frac{r_*}{r_s^{(0)}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнение контура выработки в безразмерных координатах

$$\rho_* = \alpha \left(1 + \varepsilon \cos m\theta - \varepsilon^2 \frac{1 + \cos 2m\theta}{4} + \dots \right), \quad (5)$$

где $m = n+1$, это уравнение можно записать так:

$$\rho_* = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \rho_n. \quad (6)$$

Решение упруго-пластической задачи будем искать в виде разложения по малому параметру ε :

$$\begin{aligned}\sigma_\rho &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \sigma_\rho^{(n)}, & \sigma_\theta &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \sigma_\theta^{(n)}, \\ \tau_{\rho\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \tau_{\rho\theta}^{(n)}, & \rho_s &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \rho_s^{(n)},\end{aligned}\quad (7)$$

здесь ρ_s — радиус пластической зоны.

Найдем компоненты напряжений в пластической зоне. В качестве нулевого приближения возьмем соответствующие напряжения около выработки круговой формы [9, 13]:

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^{(0)p} &= (q + \operatorname{ctg} \varphi) \left(\frac{\rho}{\alpha} \right)^\beta - \operatorname{ctg} \varphi, \\ \sigma_\theta^{(0)p} &= (q + \operatorname{ctg} \varphi) \left(\frac{\rho}{\alpha} \right)^\beta \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} - \operatorname{ctg} \varphi, \\ \tau_{\rho\theta}^{(0)p} &= 0,\end{aligned}\quad (8)$$

где $\beta = \frac{2 \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}$; q — усилие на контуре выработки.

Переходя в условия пластичности (3) к безразмерным величинам (4), внося в них разложение (7), сравнивая коэффициенты в левой и правой частях при одинаковых степенях ε и учитывая (8), получаем:

$$\begin{aligned}\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_\rho^{(0)} &= \sin \varphi (\sigma_\theta^{(0)} + \sigma_\rho^{(0)} + 2 \operatorname{ctg} \varphi), & \sigma_\theta^{(1)} &= \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \sigma_\rho^{(1)}, \\ \tau_\theta^{(2)} &= \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \sigma_\rho^{(2)} - \frac{2}{\sigma_\rho^{(0)} - \sigma_\theta^{(0)}} \cdot \frac{\tau_{\rho\theta}^{(1)2}}{1 - \sin \varphi}, & \sin \varphi &> 0.\end{aligned}\quad (9)$$

Выражение для напряжений в первом приближении ищем следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^{(1)p} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}, \\ \sigma_\theta^{(1)p} &= \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2}, \\ \tau_{\rho\theta}^{(1)p} &= -\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right),\end{aligned}\quad (10)$$

где $U = U(\rho, \theta)$ — функция напряжений.

Тогда уравнения равновесия удовлетворяются автоматически. Подставляя данные выражения во второе уравнение (9), получаем уравнение для определения функции $U(\rho, \theta)$:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right).\quad (11)$$

Решение (11) ищем в виде

$$U = f(\rho) \cos m\theta,\quad (12)$$

где $f(\rho)$ — неизвестная функция.

Опуская выкладки, запишем полученное решение

$$U = \rho^{\frac{1}{1-\sin\varphi}} \left[c_1 \cos\left(\frac{t}{1-\sin\varphi} \ln \rho\right) + c_2 \sin\left(\frac{t}{1-\sin\varphi} \ln \rho\right) \right] \cos m\theta, \quad (13)$$

где $t = \sqrt{m^2 \cos^2 \varphi - 1}$; $m \geq 2$; c_1, c_2 — произвольные постоянные.

Тогда из формулы (10) получаем выражения для напряжений:

$$\sigma_{\rho}^{(1)p} = \frac{\cos m\theta}{1-\sin\varphi} \rho^{\frac{2\sin\varphi-1}{1-\sin\varphi}} \left\{ \begin{aligned} & (c_1(1-m^2+m^2\sin\varphi)+tc_2) \cos\left(\frac{t}{1-\sin\varphi} \ln \rho\right) + \\ & (c_2(1-m^2+m^2\sin\varphi)+tc_1) \sin\left(\frac{t}{1-\sin\varphi} \ln \rho\right) \end{aligned} \right\}, \quad (14)$$

$$\tau_{\rho\theta}^{(1)p} = \frac{m \sin m\theta}{1-\sin\varphi} \rho^{\frac{2\sin\varphi-1}{1-\sin\varphi}} \left\{ \begin{aligned} & (c_1 \sin\varphi + tc_2) \cos\left(\frac{t}{1-\sin\varphi} \ln \rho\right) + \\ & (c_2 \sin\varphi + tc_1) \sin\left(\frac{t}{1-\sin\varphi} \ln \rho\right) \end{aligned} \right\}.$$

Для нахождения произвольных постоянных используем граничные условия в первом приближении [6] и с учетом связей (14), найдем:

$$c_1 = \frac{2\sin\varphi}{t} (q + \operatorname{ctg}\varphi) \rho_0^{\frac{2\sin\varphi-1}{1-\sin\varphi}} \sin \gamma_0, \quad (15)$$

$$c_2 = -\frac{2\sin\varphi}{t} (q + \operatorname{ctg}\varphi) \rho_0^{\frac{2\sin\varphi-1}{1-\sin\varphi}} \cos \gamma_0,$$

где $\gamma_0 = \frac{t \ln \rho_0}{1-\sin\varphi}$.

Внося найденные c_1 и c_2 в соотношения (14), после преобразования получаем выражения для напряжений в пластической зоне в первом приближении:

$$\sigma_{\rho}^{(1)p} = -A_1 [(1-m^2+m^2\sin\varphi)\sin x + t \cos x] \cos m\theta,$$

$$\tau_{\rho\theta}^{(1)p} = -A_1 [\sin\varphi \sin x + t \cos x] m \sin m\theta, \quad (16)$$

$$\sigma_{\theta}^{(1)p} = \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} \sigma_{\rho}^{(1)p},$$

где $x = \frac{t}{1-\sin\varphi} \ln \frac{\rho}{\alpha}$; $A_1 = \left(\frac{\rho}{\alpha}\right)^{\frac{-1+2\sin\varphi}{1-\sin\varphi}} \beta(q + \operatorname{ctg}\varphi)$.

Общий вид упругого решения определяем как линейную комбинацию решений для различных граничных условий. Произвольные постоянные и радиус пластической зоны определяются из условий непрерывности компонентов напряжений на границе L_s упругой и пластической зон. Поскольку они являются непрерывными величинами, то их приращения на этой границе равны нулю [5], т. е.

$$[\sigma_{\rho}] = [\sigma_{\theta}] = [\tau_{\rho\theta}] = 0, \quad (17)$$

где $[\sigma_{\rho}] = \sigma_{\rho}^e \Big|_{L_s^{(0)}} - \sigma_{\rho}^p \Big|_{L_s^{(0)}}$; σ_{ρ}^e — напряжение в упругой зоне. Аналогично записываются другие приращения. Условия сопряжения для любого приближения записываются для исходной

границы пластической и упругой зоны $L_s^{(0)}$. Отметим, что $L_s^{(0)}$ — окружность радиуса $r_s^{(0)}$. В безразмерных координатах радиус этой окружности равен 1.

Запишем уравнение контура L_s в безразмерных координатах в виде разложения в ряд по малому параметру ε :

$$\rho_s = 1 + \varepsilon \rho_s^{(1)} + \varepsilon^2 \rho_s^{(2)} + \dots \quad (18)$$

Граничные условия на бесконечности имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^e \Big|_{\rho=\infty} &= q_1 - \varepsilon b \cos 2\theta, \\ \sigma_\theta^e \Big|_{\rho=\infty} &= q_1 + \varepsilon b \cos 2\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^e \Big|_{\rho=\infty} &= \varepsilon b \sin 2\theta, \end{aligned} \quad (19)$$

где $q_1 = \frac{1}{2}(1 + \lambda)\gamma H$; $b = \frac{1}{2\varepsilon}(1 + \lambda)\gamma H$, H — глубина заложения выработки; λ — коэффициент бокового распора; γ — удельный вес пород.

Нулевое приближение для упругого решения возьмем в виде

$$\sigma_\rho^{(0)e} = A - B \frac{1}{\rho^2}, \quad \sigma_\theta^{(0)e} = A + B \frac{1}{\rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)e} = 0, \quad (20)$$

где A, B — постоянные.

Тогда уравнения равновесия удовлетворяются автоматически. Из граничных условий находим $A = q_1$.

Из условий сопряжения на границе пластической и упругой сред [5] имеем:

$$q_1 - B - (q + \operatorname{ctg} \varphi) \frac{1}{\alpha^\beta} + \operatorname{ctg} \varphi = 0, \quad (21)$$

$$q_1 + B - (q + \operatorname{ctg} \varphi) \frac{1}{\alpha^\beta} \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} + \operatorname{ctg} \varphi = 0.$$

Отсюда определяем B и радиус пластической зоны $\rho_s^{(0)}$ в нулевом приближении, при этом учтем, что $\alpha = \rho_0 / \rho_s^{(0)}$:

$$B = (q_1 + \operatorname{ctg} \varphi) \sin \varphi, \quad (22)$$

$$\left(\rho_s^{(0)}\right)^\beta = \frac{(q_1 + \operatorname{ctg} \varphi)(1 - \sin \varphi)}{(q + \operatorname{ctg} \varphi)} \rho_0^\beta.$$

Подставляя найденные значения A и B , получаем выражения напряжений в нулевом приближении:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(0)e} &= q_1 - (q_1 + \operatorname{ctg} \varphi) \sin \varphi \frac{1}{\rho^2}, \\ \sigma_\theta^{(0)e} &= q_1 + (q_1 + \operatorname{ctg} \varphi) \sin \varphi \frac{1}{\rho^2}, \\ \tau_{\rho\theta}^{(0)e} &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Найдено первое приближение для упругого решения. Для этого запишем условия сопряжения:

$$\left[\sigma_\rho^{(1)} - (d\sigma_\rho^{(0)}/d\rho) \rho_s^{(1)} \right] = 0 \text{ при } \rho = 1. \quad (24)$$

На границе $\rho = 1$ имеем

$$\left[\frac{d\sigma_\rho^{(0)}}{d\rho} \right] = \frac{d\sigma_\rho^{(0)e}}{d\rho} \Big|_{\rho=1} - \frac{d\sigma_\rho^{(0)p}}{d\rho} \Big|_{\rho=1} = 0. \quad (25)$$

Следовательно, $[\sigma_\rho^{(1)}] = 0$, $\sigma_\rho^{(1)e} \Big|_{\rho=1} = \sigma_\rho^{(1)p} \Big|_{\rho=1}$.

Для $\sigma_\theta^{(1)}$ и $\tau_{\rho\theta}^{(1)}$ условия сопряжения записываются аналогично.

Учитывая формулы (16), получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(1)e} \Big|_{\rho=1} &= A_e (-m^2 \sin x_0 - t \cos x_0) \cos m\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(1)e} \Big|_{\rho=1} &= mA_e (\sin \varphi \sin x_0 + t \cos x_0) \sin m\theta, \end{aligned} \quad (26)$$

где $x_0 = \frac{t}{1 - \sin \varphi} \ln \alpha$; $A_e = 2\alpha^{\frac{1}{1 - \sin \varphi}} \sin \varphi (q_1 + \operatorname{ctg} \varphi) \frac{1}{t}$.

Из условий сопряжения для $\sigma_\theta^{(1)}$ найдем первое приближение для радиуса пластической зоны:

$$\rho_s^{(1)} = \frac{1 - \sin \varphi}{4 \sin \varphi (q_1 + \operatorname{ctg} \varphi)} \sigma_\theta^{(1)e} \Big|_{\rho=1} - \frac{1 + \sin \varphi}{2t} \alpha^{\frac{1}{1 - \sin \varphi}} [(1 - m^2 + m^2 \sin \varphi) \sin x_0 - t \cos x_0] \cos m\theta. \quad (27)$$

Будем искать первое приближение для упругого решения, используя граничные условия на бесконечности (19) и на границе сред (26). Решение будем искать в три этапа, расчлняя граничные условия таким образом, чтобы можно было воспользоваться полученными формулами для напряжений [6].

Опуская громоздкие выкладки, запишем окончательные зависимости для компонент напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(1)e} &= -\left(1 - \frac{4}{\rho^2} + \frac{3}{\rho^4}\right) b \cos 2\theta + \frac{A_e \cos m\theta}{2\rho^m} \left\{ \left[(m+2)(m-1) - \frac{m(m+1)}{\rho^2} \right] t \cos x_0 + \right. \\ &\quad \left. + \left[(m+2)(m-1) - \frac{m(m+1)}{\rho^2} \right] m \sin \varphi + (m^2 - 1) \left(\frac{m}{\rho^2} - m - 2 \right) \sin x_0 \right\}; \\ \sigma_\theta^{(1)e} &= \left(1 + \frac{3}{\rho^4}\right) b \cos 2\theta + \frac{A_e \cos m\theta}{2\rho^m} \left\{ \left[m(m-2) \left(\frac{m+1}{\rho^2} + 1 - m \right) \right] \sin \varphi + (1 - m^2) \left(\frac{m}{\rho^2} - m + 2 \right) \right\} \times \\ &\quad \times \sin x_0 - \left[(m+2)(m-1) - \frac{m(m+1)}{\rho^2} \right] t \cos x_0 \Big\}; \\ \tau_{\rho\theta}^{(1)e} &= \left(1 + \frac{2}{\rho^2} - \frac{3}{\rho^4}\right) b \sin 2\theta + \frac{A_e \sin m\theta}{2\rho^m} \times \\ &\quad \times \left\{ \left[\sin \varphi \left(m(m-1) - \frac{(m-2)(m+1)}{\rho^2} \right) + (1 - m^2) \left(1 - \frac{1}{\rho^2} \right) \right] \sin x_0 - t \left(\frac{m+1}{\rho^2} - m + 1 \right) \cos x_0 \right\}. \end{aligned} \quad (28)$$

Определим теперь радиус пластической зоны для данного приближения. Для этого напряжение $\sigma_{\theta}^{(1)e}$ при $\rho = 1$ из соотношения (28) внесем в уравнение (27) и после преобразований получим выражение для радиуса пластической зоны в первом приближении:

$$\rho_s^{(1)} = \rho_{s_1}^{(1)} \cos 2\theta + \rho_{s_2}^{(1)} \cos m\theta,$$

где

$$\rho_{s_1}^{(1)} = \frac{2b(1 - \sin \varphi)}{\beta(q + \operatorname{ctg} \varphi)} \alpha^{\beta}, \quad (29)$$

$$\rho_{s_2}^{(1)} = \alpha^{\frac{1}{1 - \sin \varphi}} \left\{ (m - (m - 1) \sin \varphi) \cos x_0 + [m^2 - m - 1 - m(m - 1) \sin \varphi] \frac{\sin \varphi}{t} \sin x_0 \right\}.$$

Радиус пластической зоны вокруг выработки с учетом первого приближения записывается так:

$$\rho_s^{(1)} = 1 + \varepsilon \rho_{s_1}^{(1)} \cos 2\theta + \varepsilon \rho_{s_2}^{(1)} \cos m\theta. \quad (30)$$

Полученное решение имеет смысл, если $\rho_s^{(1)} \geq 1$.

В виде примера найдем размеры зоны предельного состояния вокруг выработки эллиптической формы поперечного сечения при следующих исходных данных: $H = 1000$ м, $\gamma = 25$ кН/м³, $k = 4.33$ МПа, $\varphi = 30^\circ$, $n = 1$, $c = 0.2$. Для расчета примем два случая заложения выработки в массиве пород с коэффициентами бокового распора $\lambda = 1.0$ и $\lambda = 0.8$.

Результаты расчета, проведенные с применением полученных формул по методу малого параметра, показывают, что область предельного состояния вокруг выработки имеет эллиптическую форму, вытянутую в горизонтальном направлении, с приведенными полуосями 1.6 и 1.33 при $\lambda = 1.0$ и 1.69 и 1.23 при $\lambda = 0.8$. Для сравнения было выполнено решение данной задачи с использованием конечно-элементного программного комплекса “Simulia Abaqus”. Расчет показал, что приведенные полуоси эллипса зоны предельного состояния при $\lambda = 1.0$ равны 1.66 и 1.33, а при $\lambda = 0.8$ — 1.74 и 1.19. Наибольшее расхождение между результатами расчетов с применением двух разных методов составило 3.6 %. Таким образом, результаты расчетов можно считать согласующимися.

АНАЛИЗ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

Выявим закономерности развития зон предельного состояния вокруг выработок некругового очертания при условии пластичности Кулона.

Используя программный пакет “Simulia Abaqus”, найдем область предельного состояния вокруг выработки прямоугольной формы, вытянутой в горизонтальном направлении (ширина выработки больше ее высоты в 2 раза), при следующих исходных данных. Коэффициент бокового распора $\lambda = 0.8$, удельный объемный вес пород вмещающего массива $\gamma = 25$ кН/м³, сцепление горных пород $k = 2.0$ МПа, угол внутреннего трения $\varphi = 30^\circ$. Глубина заложения горной выработки принималась равной 500, 750 и 1000 м.

Полученные результаты расчета представлены на рис. 1а. Анализ результатов расчета показывает, что зона предельного состояния на относительно малых глубинах (500 м) заложения прямоугольной выработки при $\lambda = 0.8$ образуется только в ее боках. С увеличением глубины заложения выработки (750 м), соответственно и естественных напряжений в породном массиве, постепенно происходит смыкание зоны предельного состояния в кровле выработки. При

относительно большой глубине заложения выработки (1000 м и более) зона предельного состояния увеличивается в размерах и по форме начинает приближаться к эллипсу, вытянутому в горизонтальном направлении.

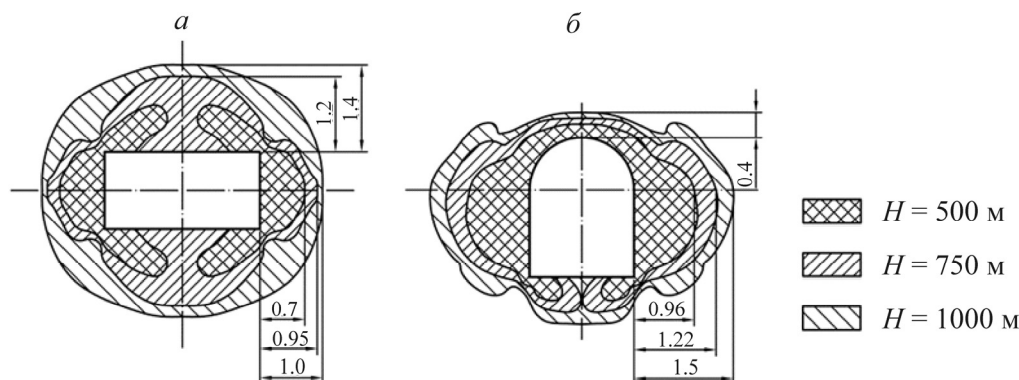


Рис. 1. Конфигурации зон предельного состояния по условию Кулона–Мора вокруг горных выработок прямоугольного очертания при $\lambda = 0.8$ (а) и сводчатого очертания при $\lambda = 0.6$ (б) в зависимости от глубины заложения, определенные на основе МКЭ

К похожим выводам можно прийти, анализируя конфигурации зоны предельного состояния, полученные расчетом вокруг выработки сводчатого очертания и представленные на рис. 1б. Исходные данные, использованные при расчетах, аналогичны исходным данным для определения конфигураций зон предельного состояния вокруг выработки прямоугольного очертания, за исключением коэффициента бокового распора, он здесь принимался равным 0.6.

Необходимо отметить, что выработка сводчатого очертания имеет наибольший линейный размер, ориентированный по вертикали, в отличие от рассмотренной ранее прямоугольной выработки. Это приводит к тому, что зона предельного состояния замыкается в своде выработки даже при относительно малых глубинах заложения (500 м). Вместе с тем для данной зоны предельного состояния так же, как и для зоны вокруг прямоугольной выработки, характерен рост линейных размеров с увеличением глубины заложения, а также постепенное стремление к форме эллипса, вытянутого в горизонтальном направлении.

Указанное позволяет заключить, что форма и размеры зоны предельного состояния вокруг горной выработки в значительной мере определяются глубиной заложения выработки и коэффициентом бокового распора, прочностными характеристиками пород массива и очертанием поперечного сечения горной выработки. При увеличении глубины заложения выработки, постепенно, зона предельного состояния по своей конфигурации при $\lambda < 1$ стремится к эллипсу, вытянутому в горизонтальном направлении. При этом разница в размерах полуосей эллипса зоны предельного состояния определяется значением коэффициента бокового распора, а абсолютные размеры этой зоны — размерами выработки и прочностными свойствами массива вмещающих пород.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ВЗАИМОВЛИЯЮЩИХ ВЫРАБОТОК

С применением метода конечных элементов установлены закономерности развития зон предельного состояния вокруг взаимовлияющих квадратных выработок при следующих исходных данных: $\lambda = 0.8$, $\gamma = 25$ кН/м³, $\varphi = 30^\circ$, глубина заложения горных выработок 1000 м. Сцепление принималось в двух вариантах: $k = 5.0$ и $k = 10.0$ МПа. Во всех случаях ширина целиков между выработками была равна пролету выработок. Результаты расчетов приведены на рис. 2 и рис. 3.

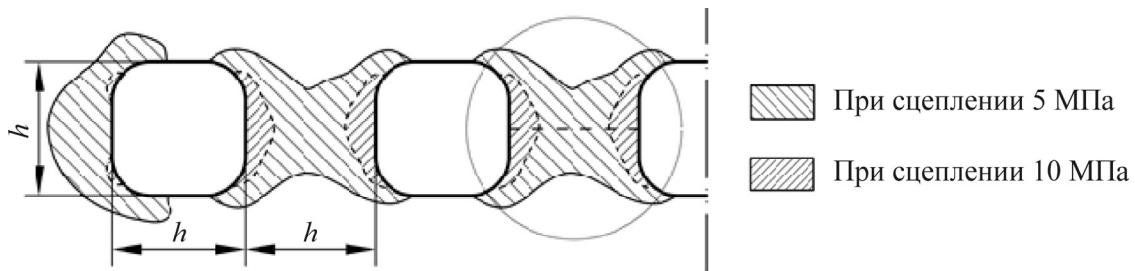


Рис. 2. Конфигурация зоны предельного состояния в массиве пород вокруг взаимовлияющих камер (при $\lambda = 0.8$)



Рис. 3. Распределение концентрации вертикальных напряжений в целике между камерами в зависимости от параметров объемной прочности пород вмещающего массива: 1 — упруго-пластическое решение, сцепление 5 МПа; 2 — упруго-пластическое решение, сцепление 10 МПа

Анализируя полученные результаты, следует отметить следующее. При значении сцепления горной породы 10 МПа зона предельного состояния локализуется вблизи боков выработок и не распространяется вглубь целика на значительное расстояние. В результате в центральной части целика породный массив работает в упругом режиме и коэффициент концентрации вертикальных напряжений стремится к 2.

При сцеплении горной породы 5 МПа зона предельного состояния в таких же условиях полностью охватывает целики между горными выработками, в результате чего целики по всей своей ширине работают в упруго-пластическом режиме. При этом центральная часть целика оказывается перегруженной по сравнению со случаем, когда сцепление в массиве пород составляло 10 МПа, и коэффициент концентрации напряжений в центральной части целика стремится к значению 2.5.

Рассмотренная задача имеет большое прикладное значение при выборе конструктивных параметров камерной системы разработки месторождений полезных ископаемых, оценке несущей способности целиков и устойчивости породных обнажений.

С применением метода конечных элементов получено решение задачи о формировании зоны предельного состояния вокруг подготовительной выработки квадратного очертания, находящейся в зоне влияния очистной выработки. Исходные данные приняты следующими: $\lambda = 1.0$, $\gamma = 25$ кН/м³, $k = 4.33$ МПа, $\varphi = 30^\circ$, глубина заложения горных выработок — 1000 м. Ширина целика между подготовительной и очистной выработками принималась равной одному, двум, трем и четырем пролетам подготовительной выработки ($m = 1, 2, 3, 4$). Исследовалось влияние ширины целика между выработками на конфигурацию зоны предельного состояния. Результаты расчетов представлены на рис. 4 и рис. 5.

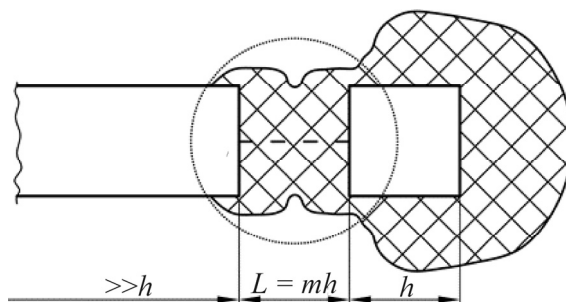


Рис. 4. Конфигурация зоны предельного состояния в массиве пород и целике вокруг взаимовлияющих выработок ($m = 1, \lambda = 1$)



Рис. 5. Распределение концентрации вертикальных напряжений в целике между выработками в зависимости от ширины целика: 1 — при $m = 1$; 2 — $m = 2$; 3 — $m = 3$; 4 — $m = 4$

Анализируя полученные результаты, следует отметить, что при ширине целика в один пролет подготовительной выработки ($m = 1$) происходит полный переход целика в упруго-пластический режим работы. Данный факт проявляется в виде снижения уровня напряжений в целике до уровня, равного $1.0\gamma H$. В целике накапливаются значительные деформации, в первую очередь неупругие, что можно с рядом допущений трактовать как потерю целиком устойчивости.

При ширине целика в два пролета подготовительной выработки ($m = 2$) в центральной его части возникает концентрация напряжений, равная 5.0 . Зона предельного состояния при этом распространяется на значительное расстояние вглубь целика, но не замыкается внутри него. Это обстоятельство и обуславливает значительную перегрузку центральной части целика.

При ширине целика более двух пролетов подготовительной выработки ($m = 3, 4$ и более) конфигурация зоны предельного состояния между подготовительной и очистной выработками аналогичная. Зона распространяется в целике внутри локальной области вблизи выработок, центральная же часть целика работает в упругом режиме. Максимальные концентрации напряжений перемещаются в целике на границу зоны предельного состояния. Увеличение ширины целика приводит к перемещению зоны максимальной концентрации напряжений ближе к контурам выработок.

Задача рассмотренного типа имеет прикладное значение при выборе конструктивных параметров систем разработки, предусматривающих применение лав, например при отработке месторождений угля.

ВЫВОДЫ

Получение точных решений упруго-пластических задач сопряжено со значительными затруднениями. Это обуславливает необходимость применения методов их приближенного решения. Рассмотренные в данной работе методы решения — метод малого параметра и метод конечных элементов (МКЭ) — являются приближенными и в значительной мере универсальными. Однако, ввиду значительной степени автоматизации алгоритмов решения задач с использованием компьютерных программ, метод конечных элементов получил гораздо более широкое распространение в мировой практике. Сравнение решений, выполненных с применением данных методов, позволило выявить их хорошее соответствие друг другу.

Существенным преимуществом численного метода решения упруго-пластических задач по сравнению с методом малого параметра является возможность получения решения в случаях, когда область предельного состояния не полностью охватывает контур выработки.

Приведенные решения для взаимовлияющих выработок квадратного и прямоугольного сечений позволяют выявить особенности геомеханических процессов в целиках между выработками, стадии перехода породы в упруго-пластический режим, размеры зон предельного состояния и коэффициенты концентрации вертикальных напряжений в целиках. Полученные результаты имеют не только научное, но и практическое значение при выборе конструктивных параметров системы разработки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Галин Л. А.** Плоская упруго-пластическая задача // Прикл. математика и механика. — 1946. — Т. 10. — Вып. 3.
2. **Черепанов Г. П.** Об одном методе решения упругопластической задачи // Прикл. математика и механика. — 1963. — Т. 27. — Вып. 3.
3. **Аннин Б. Д.** Упруго-пластическое распределение напряжений в плоскости с отверстиями // Докл. АН СССР. — 1969. — Т. 184. — № 2.
4. **Перлин П. И.** Решение плоских упруго-пластических задач для двухсвязных областей // Инж. журн. — 1961. — Т. 2. — Вып. 4.
5. **Ивлев Д. Д., Ершов Л. В.** Метод возмущений в теории упруго-пластического тела. — М.: Наука, 1978.
6. **Савин Г. Н.** Распределение напряжений около отверстий. — Киев: Наук. думка, 1968.
7. **Аннин Б. Д., Черепанов Г. П.** Упруго-пластическая задача. — Новосибирск: Наука, 1983.
8. **Аннин Б. Д.** Одна плоская упруго-пластическая задача при экспоненциальном условии текучести // Инж. журнал: Механика твердого тела. — 1966. — № 3.
9. **Руппенейт К. В.** Некоторые вопросы механики горных пород. — М.: Углетехиздат, 1954.
10. **Ставрогин А. Н., Протосеня А. Г.** Пластичность горных пород. — М.: Недра, 1979.
11. **Чанышев А. И., Имамутдинов Д. И.** Решение упругопластической задачи о протяженной цилиндрической выработке // ФТПРПИ. — 1988. — № 5.
12. **Сажин В. С.** Упруго-пластическое распределение напряжений вокруг выработок квадратной, овальной и сводчатой форм // Основания, фундаменты и подземные сооружения. — М.: Стройиздат, 1967.
13. **Протосеня А. Г., Карасев М. А., Беляков Н. А.** Разработка численной модели прогноза предельного состояния массива с использованием критерия прочности Ставрогина // ФТПРПИ. — 2015. — № 2.

Поступила в редакцию 10/IV 2015