

УДК 536.46

СЛУЧАЙНЫЙ ШУМ И ДИНАМИКА ПОЛЮСОВ ПРИ НЕУСТОЙЧИВОМ РАСПРОСТРАНЕНИИ ФРОНТА

О. Купервассер^{1,2}, З. Олами²¹ООО «Транзист Видео», 119296 Сколково, olegkup@yahoo.com²Институт им. Вейцмана, 76100 Реховот, Израиль

Рассматривается задача распространения пламени. Эта задача — пример неустойчивых фронтов, которые деформируются во многих масштабах. Используется аналитический инструмент разложения по полюсам в комплексной плоскости для анализа взаимодействия неустойчивого процесса роста со случайными начальными условиями и возмущениями. Доказано, что воздействие случайного шума огромно, и этим никогда нельзя пренебрегать в достаточно больших системах. Представлены расчеты, которые приводят к законам подобия для скорости и ускорения фронта как функции размера системы и уровня шума. Приведены аналитические аргументы, объясняющие эти результаты в терминах динамики полюсов, генерированных шумом.

Ключевые слова: распространение пламени, динамика полюсов, нестационарный фронт, случайный шум, самоускорение.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматривается задача описания нелинейной стадии развития гидродинамической неустойчивости пламени. Эту задачу можно решать в одномерной, двумерной и трехмерной постановках. Прямое численное моделирование можно выполнить исходя из уравнений Навье — Стокса с учетом химической кинетики в виде закона Аррениуса [1]. Для двух- и трехмерных случаев имеются экспериментальные наблюдения [2, 3] самоускорения фронта расходящегося пламени, образования ячеистой структуры и другие эффекты.

Для расчета скорости распространения фронта пламени существует намного более простое уравнение [4, 5] — это приближенная модель Михельсона — Сивашинского. Она предполагает очень серьезные ограничения, такие как малость коэффициента расширения газа и, следовательно, возможность течения в продуктах горения и исходной смеси, слабая нелинейность, стабилизирующее действие кривизны фронта пламени, линейная зависимость нормальной скорости распространения от кривизны фронта и др. Расчеты с шумовой составляющей в одномерной и двумерной постановках задачи были выполнены в наших преды-

дущих работах [6–11], а также в работах [12, 13] — для одно-, двух- и трехмерных случаев.

Модель Михельсона — Сивашинского представляет интерес, во-первых, потому, что несмотря на серьезные ограничения может качественно описывать сценарий гидродинамической неустойчивости, в частности самоускорение фронта расходящегося пламени, образование ячеистой структуры и т. д. Во-вторых, эта нелинейная модель имеет точные решения, которые могут быть построены на основе метода полюсных разложений [14–17]. В дальнейшем этот метод использовался для исследования взаимозависимости между полюсными решениями и результатами неполного разложения в ряд Фурье [18], между полем течения газа и полюсными решениями [19]. Получил развитие данный метод и в наших работах [6–11] (см. также приведенную в них библиографию).

Следует отметить, что простейший одномерный случай распространения фронта пламени очень важен. Исследование этого случая позволяет качественно и количественно понять динамику полюсов. Это является основой для рассмотрения более сложных двух- и трехмерных случаев. Работа [8] явно демонстрирует сказанное: ячеистая структура, показатель ускорения для двумерного случая были найдены на основе результатов для одномерного случая.

Дальнейшее развитие наших результатов получено в работах других авторов [20–22]. В

[20] шумовая составляющая рассматривалась в форме полюсов, численные результаты для одномерного случая оказались в хорошем согласии с теоретическими результатами.

Настоящая работа представляет собой усовершенствованный вариант нашей работы [6]. Здесь мы исправили ряд ошибок. Например, неправильно была выбрана ширина спектра белого шума с постоянной амплитудой при изменении размера канала L . В результате мы не получили в [6] насыщения скорости фронта пламени при увеличении L , в отличие от настоящей работы. Другая существенная ошибка связана с количеством режимов, определенных на «фазовой диаграмме» системы как функции от L и f . В [6] речь шла о трех режимах. На самом деле существует четыре таких режима. Теория влияния шума, развитая в [6], описывает переход от режима I к режиму II и сами эти два режима. Режим II не наблюдается из-за численного шума. Режим III нельзя объяснить с помощью теории [6]. Для его объяснения мы численно рассчитали и попытались объяснить аналитически такие величины, как дополнительное число полюсов в системе, число полюсов, возникающих в системе в единицу времени, время жизни полюса [11]. Разработанная в настоящей статье теория способна объяснить существование параметров задачи, слабо зависящих от шума в режиме III.

1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И РАЗЛОЖЕНИЯ НА ПОЛЮСА В ГЕОМЕТРИИ КАНАЛА

Известно, что плоское пламя, свободно распространяющееся по первоначально неподвижной гомогенной горючей смеси, по своей природе неустойчиво. Такие пламена развивают характерные структуры, которые включают острые изломы, и при обычных экспериментальных условиях фронт пламени ускоряется с течением времени. Модель в размерности $1 + 1$, которая описывает распространение фронтов пламени в каналах шириной \tilde{L} , была предложена в [4]. Уравнение записывается в терминах положения $h(x, t)$ фронта пламени над осью x . После соответствующего перемасштабирования оно принимает вид

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial h(x, t)}{\partial x} \right]^2 + \nu \frac{\partial^2 h(x, t)}{\partial x^2} + I\{h(x, t)\} + 1. \quad (1)$$

Область описания — домен $0 < x < \tilde{L}$; ν — коэффициент диффузии; используются периодические граничные условия. Функционал $I[h(x, t)]$ — преобразование Гильберта, которое удобно определить в терминах пространственного фурье-преобразования:

$$h(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx) \hat{h}(k, t) dk, \quad (2)$$

$$I[h(k, t)] = |k| \hat{h}(k, t). \quad (3)$$

С целью представления декомпозиции на полюса удобно повторно масштабировать домен к $0 < \theta < 2\pi$. Выполняя это перемасштабирование и сохраняя те же самые обозначения для получающихся величин, имеем

$$\frac{\partial h(\theta, t)}{\partial t} = \frac{1}{2L^2} \left[\frac{\partial h(\theta, t)}{\partial \theta} \right]^2 + \frac{\nu}{L^2} \frac{\partial^2 h(\theta, t)}{\partial \theta^2} + \frac{1}{L} I\{h(\theta, t)\} + 1, \quad (4)$$

где $L = \tilde{L}/2\pi$. После замены переменных $u(\theta, t) \equiv \partial h(\theta, t)/\partial \theta$ находим

$$\frac{\partial u(\theta, t)}{\partial t} = \frac{u(\theta, t)}{L^2} \frac{\partial u(\theta, t)}{\partial \theta} + \frac{\nu}{L^2} \frac{\partial^2 u(\theta, t)}{\partial \theta^2} + \frac{1}{L} I\{u(\theta, t)\}. \quad (5)$$

Хорошо известно, что плоское решение этого уравнения линейно неустойчиво. Линейный спектр в k -представлении есть

$$\omega_k = |k|/L - \nu k^2/L^2. \quad (6)$$

Существует типичный масштаб k_{\max} , который является последней неустойчивой модой

$$k_{\max} = L/\nu. \quad (7)$$

Нелинейные эффекты стабилизируют новое стационарное состояние, которое обсуждается ниже.

Важная особенность решений этого уравнения — появление структур в виде квази-острых изломов на распространяющихся фронтах. Поэтому представление в терминах фурье-разложения очень неэффективно. Целесообразно, по-видимому, представлять такие решения в терминах сумм функций с полюсами в комплексной плоскости. Как будет показано ниже,

положение острого излома на фронте определяется действительной координатой полюса, тогда как высота острого излома определяется мнимой координатой. Кроме того, ниже будет показано также, что динамика распространения фронта может быть хорошо описана в терминах динамики полюсов. Следуя [7, 14, 15, 17], развернем решения $u(\theta, t)$ в функциях, которые зависят от N полюсов, положение которых $z_j(t) \equiv x_j(t) + iy_j(t)$ в комплексной плоскости зависит от времени:

$$\begin{aligned} u(\theta, t) &= \nu \sum_{j=1}^N \operatorname{ctg} \left[\frac{\theta - z_j(t)}{2} \right] + c.c. = \\ &= \nu \sum_{j=1}^N \frac{2 \sin[\theta - x_j(t)]}{\operatorname{ch}[y_j(t)] - \cos[\theta - x_j(t)]}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} h(\theta, t) &= \\ &= 2\nu \sum_{j=1}^N \ln[\operatorname{ch}(y_j(t)) - \cos(\theta - x_j(t))] + C(t), \end{aligned} \quad (9)$$

где $c.c.$ — комплексно-сопряженный член по отношению к предыдущему, $C(t)$ — функция времени. Функция (9) является суперпозицией квазиострых изломов (т. е. острых изломов, округленных в точке излома). Вещественная часть положения полюса (т. е. x_j) служит координатой (в области $[0, 2\pi]$) максимума квазиострого излома, а мнимая часть положения полюса (т. е. y_j) — глубиной квазиострого излома. С уменьшением y_j глубина квазиострого излома увеличивается, а при $y_j \rightarrow 0$ она стремится к бесконечности. Наоборот, при $y_j \rightarrow \infty$ глубина стремится к нулю.

Основное преимущество этого представления состоит в том, что распространение и неровности фронта могут быть описаны через динамику полюсов. Подставляя (8) в (5), получаем следующие обыкновенные дифференциальные уравнения для положений полюсов:

$$\begin{aligned} -L^2 \frac{dz_j}{dt} &= \left[\nu \sum_{k=1, k \neq j}^{2N} \operatorname{ctg} \frac{z_j - z_k}{2} + \right. \\ &\quad \left. + i \frac{L}{2} \operatorname{sign}(\operatorname{Im}(z_j)) \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Отметим, что в (8) из-за комплексного сопряжения содержится $2N$ полюсов, которые упорядочены в парах таким образом, что при $j < N$

$z_{j+N} = \bar{z}_j$. Во второй сумме в (8) каждая пара полюсов вносит вклад в один член. В уравнении (10) мы снова используем $2N$ полюсов, так как все они взаимодействуют. Можно записать динамику полюсов в терминах вещественных и мнимых частей x_j и y_j . Из-за организации в пары достаточно записать уравнение либо для $y_j > 0$, либо для $y_j < 0$. Выбираем первое. Уравнения для положений полюсов имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} -L^2 \frac{dx_j}{dt} &= \nu \sum_{k=1, k \neq j}^N \sin(x_j - x_k) \times \\ &\quad \times \left(\frac{1}{\operatorname{ch}(y_j - y_k) - \cos(x_j - x_k)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\operatorname{ch}(y_j + y_k) - \cos(x_j - x_k)} \right), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} L^2 \frac{dy_j}{dt} &= \\ &= \nu \sum_{k=1, k \neq j}^N \left(\frac{\operatorname{sh}(y_j - y_k)}{\operatorname{ch}(y_j - y_k) - \cos(x_j - x_k)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\operatorname{sh}(y_j + y_k)}{\operatorname{ch}(y_j + y_k) - \cos(x_j - x_k)} \right) + \\ &\quad + \nu \operatorname{ch}(y_j) - L. \end{aligned} \quad (12)$$

Отметим, что, если начальные условия дифференциального уравнения (5) выражены в конечном числе полюсов, уравнения движения сохраняют это число как функцию времени. С другой стороны, это может быть неустойчивым решением для дифференциального уравнения (5) в частных производных и шум может изменить число полюсов. Эта проблема подробно исследована в § 3. Перейдем к обсуждению стационарного решения уравнений динамики полюсов.

1.1. Качественные свойства стационарного решения

Стационарное решение для фронта пламени, распространяющегося в каналах шириной 2π , представлено в работе [15]. Используя эти результаты, сразу перейдем к обсуждению случая с каналом шириной L . Получены следующие основные результаты.

1. Есть только одно устойчивое стационарное решение, которое геометрически представлено гигантским изломом (или, эквивалентно, «одним пальцем»), а аналитически — $N(L)$ полюсами, расположенными вдоль одной линии параллельно мнимой оси. Объяснение этого решения дано ниже.

2. Существует притяжение между полюсами вдоль вещественной оси. Это очевидно из уравнения (11), в котором знак dx_j/dt всегда определяется $\sin(x_j - x_k)$. В получающейся динамике происходит слияние всех положений x полюсов, а положения y остаются конечными.

3. Положения y различны, и полюса выстраиваются один выше другого в положениях $y_{j-1} < y_j < y_{j+1}$ с неким максимальным $y_{N(L)}$. Это можно понять из уравнения (12), в котором взаимодействие является отталкиванием на коротких интервалах, но изменяет знак на более длинных интервалах.

4. Если прибавить дополнительный полюс к такому решению, этот полюс (или другой) будет выкинут в бесконечность вдоль мнимой оси. Если в системе полюсов меньше, чем $N(L)$, она неустойчива к добавлению полюсов и любой шум будет приводить систему к этому единственному стационарному состоянию. Число $N(L)$ определяется по формуле

$$N(L) = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{L}{\nu} + 1 \right) \right], \quad (13)$$

где [...] означает целую часть. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим систему с N полюсами, такую что все значения y_j удовлетворяют условию $0 < y_j < y_{\max}$. Теперь добавим один дополнительный полюс с координатами $z_a \equiv (x_a, y_a)$, где $y_a \gg y_{\max}$. Из уравнения движения для y_a (12) видно, что все члены в сумме порядка единицы, так же как и член $\text{ctg}(y_a)$. Таким образом, уравнение движения для y_a следующее:

$$\frac{dy_a}{dt} \approx \nu \frac{2N + 1}{L^2} - \frac{1}{L}. \quad (14)$$

Судьба этого полюса зависит от числа других полюсов. Если N будет слишком большим, полюс уйдет в бесконечность, тогда как при малом N он будет стремиться к действительной оси. Условие, при котором полюс уходит в бесконечность, есть $N > N(L)$, где $N(L)$ задается выражением (13). С другой стороны, координата y полюсов не может достигать нуля. Ноль — отталкивающая линия, и полюса отталкиваются от нуля с бесконечной скоростью.

Чтобы в этом убедиться, рассмотрим полюс, координата y_j которого приближается к нулю. Для любого конечного значения L член $\text{cth}(y_j)$ растет неограниченно, в то время как все другие члены в уравнении (12) остаются ограниченными.

5. Высота излома пропорциональна L . Распределение положений полюсов вдоль линии с постоянным x найдено в [15].

Решение со всеми этими свойствами будем называть TFH-решением (Thual — Frisch — Henon).

1.2. Нелинейная устойчивость

Полученный опыт можно использовать для обсуждения проблемы стабильности устойчивой системы к большим возмущениям. Другими словами, мы можем добавить к системе новые полюса при конечных значениях y и проанализировать их судьбу. Покажем сначала, что полюса, у которых начальное значение y ниже $y_{\max} \approx \log(L^2/\nu^2)$, будут притянуты к вещественной оси. Сценарий подобен тому, который описан в последнем параграфе.

Предположим, что мы создаем устойчивую систему с гигантским острым изломом при $\theta_c = 0$ с полюсами, распределенными вдоль оси y до y_{\max} . Мы знаем, что сумма всех сил, действующих на верхний полюс, равна нулю. Рассмотрим теперь дополнительный полюс, расположенный в точке (π, y_{\max}) . Из уравнения (12) очевидно, что силы, действующие на этот полюс, переместят его вниз. С другой стороны, если его начальное положение будет значительно выше y_{\max} , то сила, действующая на него, окажется отталкивающей по направлению к бесконечности. Мы видим, что этот простой параметр идентифицирует y_{\max} как типичный масштаб для нелинейной неустойчивости.

Оценим y_{\max} и интерпретируем результат в терминах амплитуды возмущения фронта пламени. Мы объяснили ранее, что высшее положение полюса, вносящего неустойчивость, колеблется между минимальным значением и бесконечностью при изменении L . Нам необходимо оценить характерный масштаб минимального значения $y_{\max}(L)$. Воспользуемся результатами работы [15] относительно устойчивого распределения положений полюсов в устойчивой большой системе. Параметризация, принятая в [15], отличается от

нашей. Чтобы перейти от нашей параметризации в уравнении (5) к параметризации [15], мы должны изменить масштаб u на L^{-1} и t на L . Параметр ν в параметризации [15] — это ν/L в нашей. Согласно [15] число полюсов между y и $y + dy$ есть $\rho(y)dy$, где плотность $\rho(y)$ определяется следующим образом:

$$\rho(y) = \frac{L}{\pi^2\nu} \ln \left[\operatorname{cth} \frac{|y|}{4} \right]. \quad (15)$$

Для оценки минимального значения y_{\max} необходимо, чтобы хвост распределения $\rho(y)$, проинтегрированный в интервале между этим значением и бесконечностью, позволил только один полюс. Другими словами,

$$\int_{y_{\max}}^{\infty} dy \rho(y) \approx 1. \quad (16)$$

Разлагая (15) по большим значениям y и явно интегрируя результат в (16), получаем

$$y_{\max} \approx 2 \ln \frac{4L}{\pi^2\nu}. \quad (17)$$

Для больших значений L имеем $y_{\max} \approx \ln(L^2/\nu^2)$. Если теперь добавить дополнительный полюс в положение (θ, y_{\max}) , это будет эквивалентно возмущению решения $u(\theta, t)$ функцией $\nu \exp(-y_{\max}) \sin \theta$, как это видно из (8). Таким образом, система неустойчива к возмущению, большему, чем

$$u(\theta) \sim \nu^3 \sin(\theta)/L^2. \quad (18)$$

Это указывает на очень сильную зависимость чувствительности решения (в виде гигантского острого излома) к внешнему возмущению от размера системы. Этот факт важен для дальнейшего обсуждения систем с шумом.

2. УСКОРЕНИЕ ФРОНТА ПЛАМЕНИ, ДИНАМИКА ПОЛЮСОВ И ШУМ

Основная мотивация исследования, результаты которого приведены ниже, — наблюдение, что в радиальной геометрии то же самое уравнение движения показывает ускорение фронта пламени. Покажем, что это вызвано появлением новых полюсов, генерированных шумом. Кроме того, мы убеждены, что многое об ускорении в радиальной геометрии можно понять, если рассматривать воздействие шума на

развитие фронта пламени в геометрии плоского канала. В работе [15] показано, что любое начальное условие, которое представимо в полюсах, приводит к единственному стационарному решению. Это решение является гигантским острым изломом, который движется с постоянной скоростью $\nu = 1/2$ с точностью до малых коррекций порядка $1/L$. В свете обсуждения из последнего параграфа мы ожидаем, что любое достаточно гладкое начальное условие приводит к тому же самому стационарному решению. Таким образом, если нет никакого шума в динамике конечного канала, никакое ускорение фронта пламени невозможно. Рассмотрим, что произойдет, если мы добавим шум к системе.

Для конкретности введем дополнительный член белого шума $\eta(\theta, t)$ в уравнение движения (5), где

$$\eta(\theta, t) = \sum_k \eta_k(t) \exp(ik\theta) \quad (19)$$

и амплитуды Фурье η_k коррелированы согласно выражению

$$\langle \eta_k(t) \eta_{k'}^*(t') \rangle = \frac{f}{L} \delta_{k,k'} \delta(t - t'). \quad (20)$$

Сначала исследуем результат численного моделирования динамики, управляемой шумом, а затем вернемся к теоретическому анализу.

2.1. Численное моделирование с шумом

В предыдущих работах [5, 23] не вводился шум, которым можно управлять. Мы увидим в дальнейшем, что некоторые явления, возникающие при таком моделировании, могут быть приписаны неуправляемому численному шуму. Численное моделирование уравнения (5) выполнено нами псевдоспектральным методом. Выбрана схема временной дискретизации Адамса — Бэшфорта со вторым порядком точности по времени. Совокупный случайный шум был генерирован в фурье-пространстве путем выбора η_k для каждого k из плоского распределения в интервале $[-\sqrt{2f/L}, \sqrt{2f/L}]$. Среднюю скорость стационарного состояния фронта мы исследовали как функцию L для фиксированного f и как функцию f для фиксированного значения L . Обнаружены следующие интересные явления.

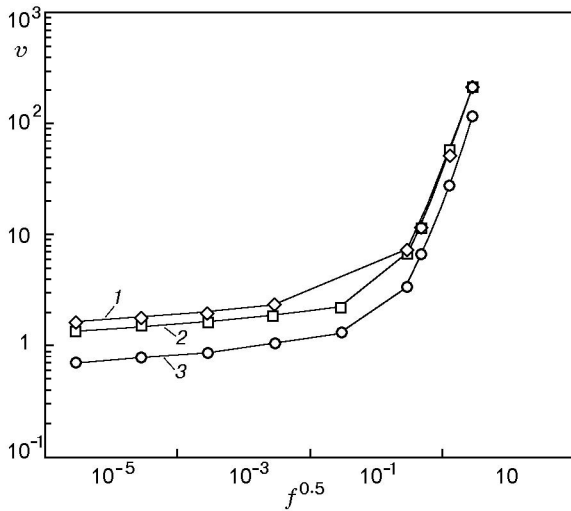


Рис. 1. Зависимость средней скорости v от шума $f^{0.5}$ при $L = 10, 40, 80$ (линии 1–3 соответственно)

1. На рис. 1 мы видим два различных режима поведения средней скорости v как функции шума $f^{0.5}$ для фиксированного размера системы L . Для шума f , меньшего критического значения f_{cr} ,

$$v \sim f^\xi. \quad (21)$$

При этих значениях f зависимость очень слабая и $\xi \approx 0.02$. При больших значениях f зависимость намного сильнее.

2. На рис. 2 виден рост средней скорости v

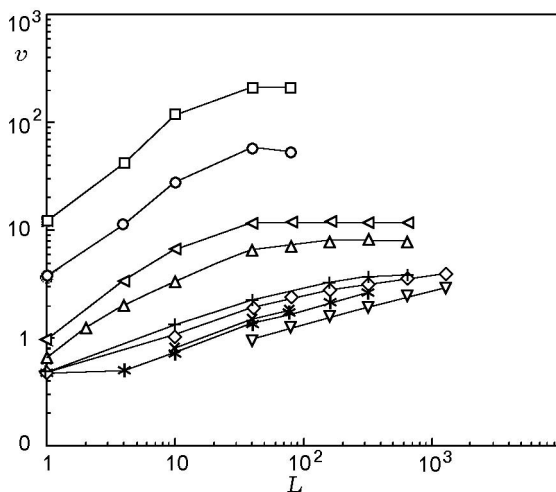


Рис. 2. Зависимость средней скорости v от размера системы L при $f^{0.5} = 0, 2.7 \cdot 10^{-6}, 2.7 \cdot 10^{-5}, 2.7 \cdot 10^{-4}, 2.7 \cdot 10^{-3}, 2.7 \cdot 10^{-2}, 2.7 \cdot 10^{-1}, 0.5, 1.3, 2.7$ (линии сверху вниз)

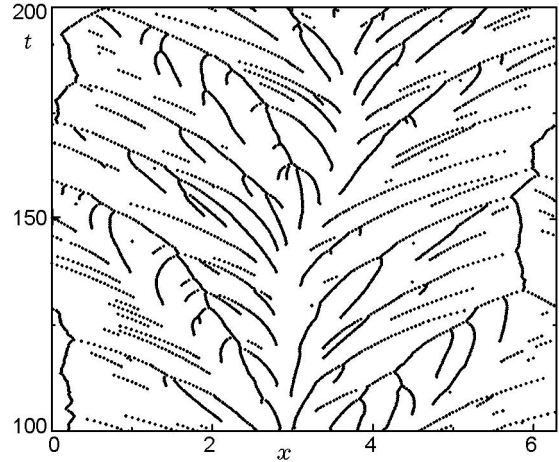


Рис. 3. Зависимость положений острых изломов от времени ($L = 80, \nu = 0.1, f = 9 \cdot 10^{-6}$)

с увеличением размера системы L . После некоторых значений L наблюдается насыщение скорости. Для режима $f < f_{cr}$ рост скорости может быть записан следующим образом:

$$v \sim L^\mu, \quad \mu \approx 0.40 \pm 0.05. \quad (22)$$

2.2. Расчет числа полюсов в системе

Определим число полюсов, существующих в системе вне гигантского острого излома. Это можно сделать, вычисляя число острых изломов (точек минимума или точек перегиба) и их положения на интервале $\theta = [0, 2\pi]$ в каждый момент времени и изображая положения острых изломов как функции времени (рис. 3).

Предположим, что система находится в квазистойчивом состоянии большую часть времени, т. е. каждый новый острый излом, появляющийся в системе, включает только один полюс. Используя зависимости, полученные таким образом, мы приходим к следующим результатам.

1. Вычисляя число острых изломов в некоторый момент времени и исследуя хронологию каждого острого излома (кроме гигантского острого излома), т. е. сколько начальных острых изломов участвует в форматировании этого острого излома, после осреднения числа полюсов, найденных в различные моменты времени, находим среднее число полюсов, существующих в системе вне гигантского острого излома. Обозначим это число δN . Имеются четыре режима, определяемые видом зависимости этого числа от шума f :

- I) шум настолько мал, что в системе не существует ни одного полюса вне гигантского излома;
- II) сильная зависимость числа полюсов δN от шума f ;
- III) насыщение числа полюсов δN от уровня шума f , так что это число слабо зависит от шума:

$$\delta N \sim f^{0.03}, \quad (23)$$

величина насыщения δN определяется формулой

$$\delta N \approx \frac{N(L)}{2} \approx \frac{1}{4} \frac{L}{\nu}, \quad (24)$$

где $N(L) \approx \frac{1}{2} \frac{L}{\nu}$ — число полюсов на гигантском изломе;

- IV) вновь сильная зависимость числа полюсов δN от шума f :

$$\delta N \sim f^{0.1}. \quad (25)$$

Из-за численного шума в большинстве численных расчетов наблюдаются только режимы III и IV. В дальнейшем, если не оговорено иное, мы обсуждаем режим III.

2. Вычисляя число новых острых изломов, можно найти число полюсов, которые появляются в системе в единицу времени $\frac{dN}{dt}$. В режиме III

$$\frac{dN}{dt} \sim f^{0.03}. \quad (26)$$

Зависимость от L и ν определяется следующим образом:

$$\frac{dN}{dt} \sim L^{0.8}, \quad (27)$$

$$\frac{dN}{dt} \sim \frac{1}{\nu^2}. \quad (28)$$

В режиме IV

$$\frac{dN}{dt} \sim f^{0.1}. \quad (29)$$

2.3. Обсуждение влияния шума

2.3.1. Порог неустойчивости к добавленному шуму. Переход от режима I к режиму II

Рассмотрим чувствительность решения в виде гигантского острого излома к действию добавленного шума. Эта чувствительность в значительной степени увеличивается с ростом размера системы L . Чтобы показать это, снова используем взаимосвязь линейного анализа устойчивости с динамикой полюсов.

Добавленный шум вносит возмущение для всех векторов k . Ранее мы показали, что самая неустойчивая мода — $k = 1$ с компонентом $A_1 \sin(\theta)$. Таким образом, самым эффективным шумовым возмущением является $\eta_1 \sin(\theta)$, которое может потенциально привести к росту самой неустойчивой моды. Будет ли эта мода расти, зависит от амплитуды шума. Чтобы в этом убедиться, вернемся к описанию полюсов. При малых значениях амплитуды A_1 представляем $A_1 \sin(\theta)$ как решение для одиночного полюса функциональной формы $\nu \exp(-y) \sin \theta$. Положение y определяется как $y = -\log |A_1|/\nu$, а для положения θ имеем $\theta = \pi$ при $A_1 > 0$ и $\theta = 0$ при $A_1 < 0$. При очень маленькой амплитуде A_1 полюс должен уйти в бесконечность независимо от его положения θ ; динамика симметрична при $A_1 \rightarrow -A_1$, когда значение y достаточно большое. В случае, когда A_1 увеличивается и симметрия нарушена, положение θ и знак A_1 становятся очень важны. Если $A_1 > 0$, существует пороговое значение y , ниже которого полюс падает вниз. Если $A_1 < 0$ и $\theta = 0$, отталкивание от полюсов гигантского острого излома растет с уменьшением y . Таким образом, на качественном уровне динамика A_1 характеризуется асимметричным «потенциалом»:

$$\dot{A}_1 = -\frac{\partial V(A_1)}{\partial A_1}, \quad (30)$$

$$V(A_1) = \lambda A_1^2 - a A_1^3 + \dots \quad (31)$$

Из линейного анализа устойчивости известно, что $\lambda \approx \nu/L^2$ (ср. с уравнением (14)). Кроме того, нелинейная неустойчивость достигает порога при $A_1 \approx \nu^3/L^2$ (ср. с уравнением (18)). Этим определяется величина коэффициента $a \approx 2/3\nu^2$. Величина «потенциала» в максимуме есть

$$V(A_{\max}) \approx \nu^7/L^6. \quad (32)$$

Воздействие шума на развитие моды $A_1 \sin \theta$ можно понять из следующего стохастического уравнения:

$$\dot{A}_1 = -\frac{\partial V(A_1)}{\partial A_1} + \eta_1(t). \quad (33)$$

Хорошо известно [24], что для такой динамики скорость истечения через «потенциальный» барьер для малого шума определяется выражением

$$R \sim \frac{\nu}{L^2} \exp \left[-\frac{\nu^7}{(f/L)L^6} \right]. \quad (34)$$

Отсюда заключаем, что любой произвольно малый шум становится эффективным при увеличении размера системы и уменьшении ν . При введении в систему шума с амплитудой f/L система всегда может быть чувствительной к этому шуму, если ее размер превышает критическое значение L_{cr} , определяемое выражением $f/L_{cr} \sim \nu^7/L_{cr}^6$. Эта формула определяет переход от режима I (нет полюсов) к режиму II. При $L > L_{cr}$ шум вносит новые полюса в систему. Даже численный шум при моделировании, включающем системы большого размера, может иметь макроскопическое влияние.

Появление новых полюсов увеличивает скорость фронта. Скорость пропорциональна среднему от $(u/L)^2$. Новые полюса искажают гигантский острый излом дополнительными меньшими острыми изломами на «крыльях» гигантского острого излома, увеличивая u^2 . После увеличения амплитуды шума все больше маленьких острых изломов появляется на фронте, что неизбежно ведет к росту скорости. Количественно это явление обсуждается ниже.

2.3.2. Проверка асимметричной «потенциальной» формы

Из уравнений движения для полюсов можно найти распределение полюсов в гигантском остром изломе [15]. Если это распределение известно, можно найти форму «потенциала» и проверить численно выражения для величин λ , A_{\max} и $\frac{\partial V(A_1)}{\partial A_1}$, которые обсуждались выше. Связь между амплитудой A_1 и положением полюса y определена как $A_1 = 4\nu \exp(-y)$, связь между потенциальной функцией $\frac{\partial V(A_1)}{\partial A_1}$

и положением полюса y — как $\frac{\partial V(A_1)}{\partial A_1} = 4\nu \frac{dy}{dt} \exp(-y)$, где производная $\frac{dy}{dt}$ может быть определена из уравнений движения для полюсов. Можно найти A_{\max} как нулевую точку $\frac{\partial V(A_1)}{\partial A_1}$, а λ — как $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 V(A_1)}{\partial A_1^2}$ при $A_1 = 0$. Численный анализ был выполнен для набора значений $L = 2n\nu$, где n — целое и $n > 2$. Мы использовали константу $\nu = 0.005$ и переменную $L = [1, 150]$ или же переменную $\nu = [0.005, 0.05]$ и постоянную $L = 1$. Получены следующие результаты:

$$\frac{A_{\max} L^2}{\nu^3} \approx 6.5, \quad (35)$$

$$\frac{A_{\max}}{A_{N(L)}} \approx 0.465, \quad (36)$$

где $A_{N(L)}$ определяется положением верхнего полюса,

$$\frac{\lambda L^2}{\nu} = 0.5. \quad (37)$$

Кроме того, мы проверили границу между режимом I (никаких новых острых изломов) и режимом II (появляются новые острые изломы). Зависимость f/L_{cr} от L_{cr} приведена на рис. 4. Видно, что

$$f/L_{cr} \sim 1/L_{cr}^6.$$

Все эти результаты находятся в хорошем согласии с теорией.

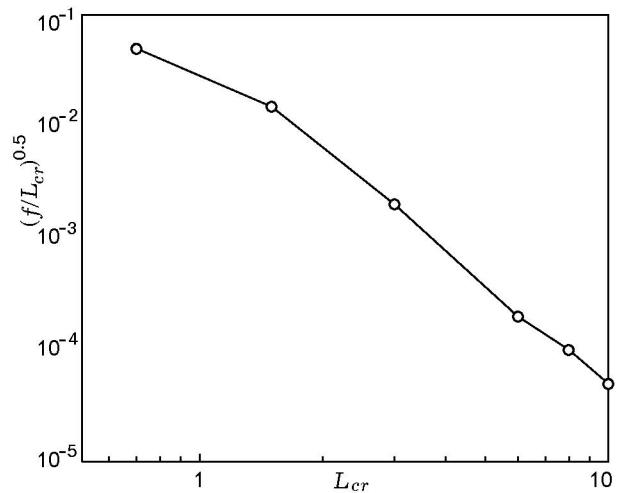


Рис. 4. Первая нечетная собственная функция, полученная в рамках классического анализа устойчивости

2.3.3. Стационарное состояние в присутствии шума и его разрушение при увеличении шума или размера системы

Рассмотрим реакцию решения в виде гигантского острого излома на уровень шума, который в состоянии ввести большое количество дополнительных полюсов, помимо тех, что уже существуют в гигантском остром изломе. Обозначим дополнительное число полюсов через δN . Выясним вначале, насколько трудно вставить еще один дополнительный полюс, если уже существует избыток δN . С этой целью оценим эффективный потенциал $V_{\delta N}(A_1)$, который подобен (31), но учитывает существование дополнительного числа полюсов. Основное допущение, которое мы используем, состоит в том, что фундаментальная форма решения в виде гигантского острого излома серьезно не изменяется из-за существования дополнительного числа полюсов. Конечно, это приближение количественно искажается с введением уже одного лишнего полюса. Качественно, однако, оно выполняется хорошо до тех пор, пока число дополнительных полюсов не имеет порядка характерного числа $N(L)$ для решения в виде гигантского острого излома. Другое допущение — это то, что остальная часть линейных мод не играет серьезной роли в данном случае. С этого момента ограничиваем обсуждение ситуацией $\delta N \ll N(L)$ (режим II).

Чтобы оценить параметр λ в эффективном потенциале, рассмотрим динамику одного полюса, положение y которого сильно выше y_{\max} . Согласно уравнению (14) динамика дает выражение

$$\frac{dy_a}{dt} \approx \frac{2\nu(N(L) + \delta N)}{L^2} - \frac{1}{L}. \quad (38)$$

Так как член $N(L)$ пренебрежимо мал в сравнении с членом L^{-1} (ср. с § 1.1), остается отталкивающий член, который в эффективном потенциале транслируется в

$$\lambda = \frac{\nu\delta N}{L^2}. \quad (39)$$

Оценим значение потенциала в точке равновесия между областями притяжения и отталкивания. В предыдущем пункте было показано, что новый полюс должен быть вставлен ниже y_{\max} , чтобы быть притянутым к вещественной оси. Теперь нам нужно поместить новый полюс ниже положения существующего полюса,

индекс которого $N(L) - \delta N$. Это положение оценено в § 1.2 с использованием функции распределения ТФН (15). Находим

$$y_{\delta N} \approx 2 \ln \left(\frac{4L}{\pi^2 \nu \delta N} \right). \quad (40)$$

Как и прежде, это подразумевает пороговое значение амплитуды однополюсного решения $A_{\max} \sin \theta$, которое получено из равенства $A_{\max} = \nu \exp(-y_{\delta N})$. Таким образом, в данном случае $A_{\max} \sim \nu^3 (\delta N)^2 / L^2$. Используя снова кубическое представление для эффективного потенциала, находим $a = 2/(3\nu^2 \delta N)$ и

$$V(A_{\max}) = \frac{1}{3} \frac{\nu^7 (\delta N)^5}{L^6}. \quad (41)$$

Повторяя вычисление скорости истечения через потенциальный барьер, запишем

$$R \sim \frac{\nu \delta N}{L^2} \exp \left[- \frac{\nu^7 (\delta N)^5}{(f/L)L^6} \right]. \quad (42)$$

Для данной амплитуды шума f/L всегда есть значение L и ν , при которых скорость истечения имеет величину $O(1)$ до тех пор, пока значение δN не слишком велико. При увеличении δN скорость истечения уменьшается и в конечном счете никакие дополнительные полюса не смогут попасть в систему. Типичное значение δN при фиксированных значениях параметров оценено путем приравнивания к единице аргумента экспоненты:

$$\delta N \approx \left[\frac{(f/L)L^6}{\nu^7} \right]^{1/5}. \quad (43)$$

Видно, что δN сильно зависит от шума f , в отличие от режима III. Найдем условия перехода от режима II к III, где имеет место насыщение δN относительно уровня шума f .

(i) Используем выражение $A_{\max} = 4\nu \exp(-y_{\delta N})$ для амплитуды полюсного решения, которое равняется $\frac{2\nu \sin \theta}{\operatorname{ch} y_{\delta N} - \cos \theta}$. Однако это происходит только для больших значений $y_{\delta N}$. При $y_{\delta N} < 1$ лучшее приближение $A_{\max} = \frac{4\nu}{y_{\delta N}^2}$. Из уравнения (40) находим, что граничная величина $y_{\delta N} = 1$ соответствует $\delta N \approx N(L)/2$.

(ii) Используем выражение $y_{\delta N} \approx 2 \ln \frac{4L}{\pi^2 \nu \delta N}$. Но при больших значениях

δN лучше применять приближение, которое может быть найдено тем же самым путем:

$$y_{\delta N} \approx \frac{\pi^2 \nu}{2L} (N(L) - \delta N) \ln \frac{8eL}{\pi^2 \nu (N(L) - \delta N)}.$$

Это выражение дает почти тот же самый результат для $\delta N \approx N(L)/2$.

Из (i) и (ii) можно сделать следующие выводы:

(а) переход от режима II к режиму III происходит при $\delta N \approx N(L)/2$;

(б) используя новые выражения в (i) и (ii) для амплитуды A_{\max} и $y_{\delta N}$, можно найти шум f/L в режиме III:

$$\begin{aligned} \frac{f}{L} &\sim V(A_{\max}) \sim \lambda A_{\max}^2 \sim \\ &\sim \frac{\nu \delta N}{L^2} \left(\frac{4\nu}{y_{\delta N}^2} \right)^2 \sim \frac{L^2}{\nu} \frac{\delta N}{(N(L) - \delta N)^4}. \end{aligned} \quad (44)$$

Это выражение определяет очень слабую зависимость δN от шума f/L при $\delta N > N(L)/2$, что объясняет насыщение δN от уровня шума для режима III;

(в) форма решения в виде гигантского острого излома определяется полюсами, которые расположены близко к нулю относительно y . Для режима III $N(L)/2$ полюсов, имеющих положение $y < y_{\delta N=N(L)/2} = 1$, остаются в данной позиции. Этот результат объясняет, почему решение в виде гигантского острого излома не может быть серьезно изменено для режима III.

Из уравнения (43), используя граничное условие

$$\delta N \approx N(L)/2, \quad (45)$$

можно найти пороговый шум f_b между режимами II и III:

$$f_b \sim \nu^2. \quad (46)$$

Динамика полюсов описывается уравнением

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\delta N}{T}, \quad (47)$$

где dN/dt — число полюсов, появляющихся в системе в единицу времени, δN — добавочное число полюсов, T — среднее время жизни полюса (между появлением и объединением с гигантским острым изломом). Используя результат численного моделирования для dN/dt и граничное условие (45), находим

$$T = \frac{\delta N}{dN/dt} \sim \nu L^{0.2}. \quad (48)$$

Таким образом, время жизни пропорционально ν и слабо зависит от размера системы L .

Кроме того, время жизни полюса определяется временем жизни полюсов, которые находятся в остром изломе. Из точки максимума линейной части уравнения (1) можно найти средний характерный размер

$$\lambda_m \sim \nu, \quad (49)$$

который определяет характерный размер изломов. Этот результат был подтвержден численными расчетами, выполненными в работе [25] и представленными там на рис. 9. Среднее число полюсов в изломе

$$n_{big} \approx \frac{\lambda_m}{2\nu} \sim \text{const} \quad (50)$$

не зависит от величин L и ν . Среднее число изломов

$$N_{big} \sim \frac{\delta N}{n_{big}} \sim \frac{L}{\nu}. \quad (51)$$

Предположим, что некий острый излом существует в основном минимуме системы. Время жизни полюса в таком остром изломе определяется тремя компонентами.

(I) Время формирования острого излома. Оно пропорционально размеру острого излома (с логарифмическими коррекциями) и числу полюсов в остром изломе (из уравнений движения полюсов):

$$T_1 \sim \lambda_m n_{big} \sim \nu. \quad (52)$$

(II) Время, которое острый излом находится в окрестности минимума:

$$T_2 \sim a/\nu, \quad (53)$$

где a — окрестность минимума, такая что сила от гигантского острого излома меньше, чем сила, связанная с колебаниями числа избыточных полюсов δN ; ν — скорость полюса в этой окрестности. Колебания числа избыточных полюсов δN даны выражением

$$N_{fl} = \sqrt{\delta N}. \quad (54)$$

Из этого результата и уравнения движения полюсов находим

$$v \sim \frac{\nu}{L} N_{fl} \sim \frac{\nu}{L} \sqrt{\frac{L}{\nu}} \sim \sqrt{\frac{\nu}{L}}. \quad (55)$$

Скорость от гигантского острого излома определена следующим образом:

$$v \sim \frac{\nu}{L} N(L) \frac{a}{L} \sim \frac{a}{L}. \quad (56)$$

Приравнивая два последних уравнения, получаем

$$a \sim \sqrt{\nu L}. \quad (57)$$

Таким образом,

$$T_2 \sim a/v \sim L. \quad (58)$$

(III) Время притяжения к гигантскому острому излому. Из уравнений движения для полюсов получаем

$$T_3 \sim L \ln(L/a) \sim L \ln \sqrt{L} \sim L. \quad (59)$$

Для исследованной области размеров системы

$$T_1 \gg T_2, T_3. \quad (60)$$

Следовательно, полное время жизни

$$T = T_1 + T_2 + T_3 \sim \nu + sL, \quad (61)$$

где s — постоянная,

$$0 < s \ll 1. \quad (62)$$

Этот результат качественно и частично количественно объясняет зависимость (48). Из (48), (47), (45) видно, что в режиме III dN/dt насыщается как функция размера системы L .

2.4. Ускорение фронта пламени за счет шума

Оценим масштабирующие экспоненты, которые характеризуют скорость фронта пламени как функцию размера системы. Хотя приводимые здесь доказательства менее убедительны, чем были прежде, они, тем не менее, позволяют описать некоторые из основных качественных аспектов физики взаимодействия шума и неустойчивости, которое приводит к ускорению фронта пламени.

Чтобы оценить скорость фронта пламени, запишем уравнение для средней величины $\langle dh/dt \rangle$, задаваемой произвольным числом N полюсов в системе. Это уравнение следует непосредственно из (4):

$$\left\langle \frac{dh}{dt} \right\rangle = \frac{1}{L^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u^2 d\theta. \quad (63)$$

После подстановки (8) в (63), используя (11) и (12), получаем

$$\left\langle \frac{dh}{dt} \right\rangle = 2\nu \sum_{k=1}^N \frac{dy_k}{dt} + 2 \left(\frac{\nu N}{L} - \frac{\nu^2 N^2}{L^2} \right). \quad (64)$$

Оценка второго и третьего членов в уравнении (64) является прямолинейной. Записывая $N = N(L) + \delta N(L)$ и помня, что $N(L) \sim L/\nu$ и $\delta N(L) \sim N(L)/2$, находим, что эти члены вносят вклад порядка $O(1)$. Первый член вносит вклад, только если поток полюсов асимметричен. Шум вводит полюса на конечной величине y_{\min} , тогда как отклоненные полюса утекают в бесконечность и исчезают на границе нелинейности, определенной положением самого высокого полюса как

$$y_{\max} \approx 2 \ln \frac{4L}{\pi^2 \nu}. \quad (65)$$

Таким образом, у нас есть асимметрия, которая вносит вклад в скорость фронта. Для оценки первого члена определим

$$d \left(\sum \frac{dy_k}{dt} \right) = \sum_l^{l+dl} \frac{dy_k}{dt}, \quad (66)$$

где $\sum_l^{l+dl} \frac{dy_k}{dt}$ — сумма по полюсам, которые входят на интервале $y = [l, l + dl]$. Запишем

$$d \left(\sum \frac{dy_k}{dt} \right) = d \left(\sum \frac{dy_k}{dt} \right)_{up} - d \left(\sum \frac{dy_k}{dt} \right)_{down}, \quad (67)$$

где $d \left(\sum \frac{dy_k}{dt} \right)_{up}$ — поток полюсов,двигающихся вверх, $d \left(\sum \frac{dy_k}{dt} \right)_{down}$ — поток полюсов,двигающихся вниз. Для этих потоков

$$d \left(\sum \frac{dy_k}{dt} \right)_{up}, d \left(\sum \frac{dy_k}{dt} \right)_{down} \leq \frac{dN}{dt} dl. \quad (68)$$

Поэтому для первого члена

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \sum_{k=1}^N \frac{dy_k}{dt} = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \frac{d(\sum(dy_k/dt))}{dl} dl = \\
 &\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \frac{d(\sum(dy_k/dt))_{up} - d(\sum(dy_k/dt))_{down}}{dl} dl \leq \\
 &\leq \frac{dN}{dt} (y_{\max} - y_{\min}) \leq \frac{dN}{dt} y_{\max}. \quad (69)
 \end{aligned}$$

Из-за небольшой (логарифмической) зависимости y_{\max} от L и ν член dN/dt определяет порядок нелинейности для первого члена. Этот член равен нулю для симметричного потока полюсов и достигает максимума для максимально асимметричного потока полюсов. Сравнение $\nu \sim L^{0.42} f^{0.02}$ и $dN/dt \sim L^{0.8} f^{0.03}$ подтверждает это вычисление.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные два вывода настоящей работы, как и в [6], следующие: (i) существует сильное взаимодействие между неустойчивостью распространяющихся фронтов и случайным шумом; (ii) это взаимодействие можно понять, а в некоторых случаях оценить количественно, используя описание в терминах комплексных полюсов.

Описание в форме полюсов естественно в этом контексте в первую очередь потому, что обеспечивает точное (и эффективное) представление стационарного состояния без шума. Как только удастся описать еще и возмущения этого стационарного состояния в терминах полюсов, получаем очень ясный язык для исследования взаимодействия между шумом и неустойчивостью. Этот язык позволяет также описывать качественно и полуколичественно процесс обратного каскада увеличения типичных длин, когда система релаксирует к стационарному состоянию из малых и случайных начальных условий.

Основные концептуальные шаги в этой статье следующие. Во-первых, очевидно, что стационарное решение, которое характеризуется $N(L)$ полюсами, выровненными вдоль мнимой оси, слабо устойчиво по отношению к шуму в периодическом массиве значений L . Для всех значений L стационарное состояние нелинейно неустойчиво по отношению к шуму. Основное и главное воздействие шума данной

амплитуды f — введение дополнительного числа полюсов $\delta N(L, f)$ в систему. Существование избыточного числа полюсов ответственно как за дополнительную деформацию переднего фронта пламени на вершине гигантского острого излома, так и за наблюдаемое ускорение фронта пламени. Рассматривая появление новых полюсов в результате шума, можно описывать наблюдаемые законы подобия как функции амплитуды шума и размера системы.

«Фазовая диаграмма» как функция L и f в этой системе состоит из четырех режимов (что противоречит нашим прежним результатам [6]). В режиме I шум слишком мал, чтобы воздействовать на решение в виде гигантского острого излома. Режим II (небольшое число дополнительных полюсов) не наблюдается из-за численного шума и обсуждается только теоретически. В режиме III шум вводит дополнительные полюса, которые добавляют к гигантскому острому излому побочные острые изломы. Для этого режима нами найдены законы подобия для скорости как функции L и f и оценены экспоненты масштабирования. В режиме IV шум является достаточно большим, чтобы создать мелкомасштабные структуры, которые не интерпретируются в терминах индивидуальных полюсов. Из проведенных численных расчетов видно, что в этом режиме мелкомасштабная структура вносит вклад в огрубление фронта пламени путем, подобным устойчивым моделям роста, управляемым шумом, таким как модель Кардара — Паризи — Жанга.

Одна из основных целей настоящего исследования — понять явления, наблюдаемые в радиальной геометрии с расширяющимися фронтами пламени. Полный анализ этой проблемы невозможно представить в рамках данной статьи. Отметим лишь, что многие из идей, предложенных выше, немедленно переносятся на эту проблему. Действительно, в радиальной геометрии фронт пламени ускоряется и острые изломы множатся и формируют иерархическую структуру с течением времени. Так как радиус (и типичный масштаб) в системе все время увеличивается, новые полюса будут добавляться к системе даже при незначительном шуме. Предельная устойчивость, найденная выше, существует также и в этом случае, и система позволяет введение дополнительных полюсов в результате шума. Результаты, обсуждаемые в работе [7], объединенные с изло-

женными идеями, позволяют создать теорию радиального роста. Такая теория была предложена в работе [8].

Для цилиндрического случая осталась одна нерешенная проблема [10], связанная с возможностью появления режима насыщения скорости после режима ускорения. Она была недавно успешно решена в работах [12, 13]. Для цилиндрического случая задачи распространения фронта пламени в отсутствие шума (только численный шум [26–30]) с помощью численных методов [26–30] показано, что фронт пламени непрерывно ускоряется. В течение всего времени, учитываемого в расчете, не обнаружено никаких признаков насыщения. Увеличение времени численного расчета — сложная задача. Поэтому вопрос о том, существует или нет скорость насыщения в цилиндрическом случае как следствие уравнения движения фронта пламени, оставался открытым до появления работ [12, 13].

Для того чтобы лучше понять зависимость скорости фронта пламени от радиуса в цилиндрическом случае, была проанализирована численными методами подобная зависимость скорости фронта от ширины канала в плоском случае. Рост скорости также наблюдался, и в отсутствие шума (только численный шум!) также не наступало насыщения скорости. Введение простого гауссова шума приводит к появлению точки насыщения и ее смещению от начала координат при уменьшении амплитуды шума, что позволяет экстраполировать результаты на малый численный шум (см. рис. 1).

Следовательно, аналогично вводя гауссов шум в численные расчеты для цилиндрического случая, можно получить возникновение точки насыщения и исследовать ее поведение как функцию амплитуды шума, экстраполируя результаты на малый численный шум. Такое исследование было проведено в работах [12, 13] и наблюдалось насыщение для одно-, двух- и трехмерных случаев.

Наконец, успех обсуждаемого подхода в случае распространения пламени показывает, что подобные идеи можно применить к картинам лапласовского роста в каналах, в которых пальцевидное стационарное решение, как известно, существует. Известно, что устойчивость такого пальцевидного решения к шуму быстро уменьшается с увеличением ширины канала. Кроме того, ясно, что шум вызывает дополнительные геометрические особен-

сти на вершине пальца. Имеется достаточно много общих черт, указывающих, что тщательный анализ аналитической теории может пролить свет на эту проблему.

Авторы выражают благодарность рецензенту за предложения по улучшению представления материала работы, И. Прокачия за рекомендации и полезные идеи, Б. Галанти за проведенные им численные расчеты, результаты которых использовались в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Liberman M. A., Ivanov M. F., Peil O. E., Valiev D. M., Eriksson L.-E.** Self-acceleration and fractal structure of outward freely propagating flames // *Phys. Fluids*. — 2004. — V. 16, N 7. — P. 2476–2482.
2. **Гостинцев Ю. А., Истратов А. Г., Шулепин Ю. В.** Автомодельный режим распространения свободного турбулентного пламени в перемешанных газовых смесях // *Физика горения и взрыва*. — 1988. — Т. 24, № 5. — С. 63–70.
3. **Wu F., Jomaas G., Law C. K.** On self-acceleration of cellular spherical flames // Fall Technical Meeting of the Eastern States Section of the Combustion Institute Hosted by the University of Connecticut, Storrs, CT. — 2011. — <http://lcg.princeton.edu/publications/conference-publications/wu-on-self-acceleration-of-cellular-spherical-flames.aspx>.
4. **Sivashinsky G. I.** Nonlinear analysis of hydrodynamics instability in laminar. I. Derivations of basic equations // *Acta Astronaut.* — 1977. — V. 4. — P. 1177–1206.
5. **Filyand L., Sivashinsky G. I., Frankel M. L.** On self-acceleration of outward propagating wrinkled flames // *Physica D*. — 1994. — V. 72. — P. 110–118.
6. **Olami Z., Glanti B., Kupervasser O., Procaccia I.** Random noise and pole-dynamics in unstable front propagation // *Phys. Rev. E*. — 1997. — V. 55, N 3. — P. 2649–2663.
7. **Kupervasser O., Olami Z., Procaccia I.** Geometry of developing flame fronts: Analysis with pole decomposition // *Phys. Rev. Lett.* — 1996. — V. 76. — P. 146–149.
8. **Glanti B., Kupervasser O., Olami Z., Procaccia I.** Dynamics and wrinkling of radially propagation fronts inferred from scaling law in channel geometries // *Phys. Rev. Lett.* — 1998. — V. 80, N 11. — P. 2477–2480.
9. **Kupervasser O., Olami Z., Procaccia I.** Stability analysis of flame fronts: Dynamical systems approach in the complex plane // *Phys. Rev. E*. — 1999. — V. 59, N 3. — P. 2587–2593.
10. **Kupervasser O.** Pole solutions in the case of problems of flame front propagation and Saffman — Taylor «Finger» formation without

- surface tension: Open problems and possible ways of their solutions. — 2003. — arXiv:nlin/0306038.
11. **Kupervasser O.** Random noise and pole-dynamics in unstable front propagation. — 2003. — arXiv:nlin/0302017.
 12. **Karlin V., Sivashinsky G.** The rate of expansion of spherical flames // *Combust. Theory Model.* — 2006. — V. 10, N 4. — P. 625–637.
 13. **Karlin V., Sivashinsky G.** Asymptotic modelling of self-acceleration of spherical flames // *Proc. Combust. Inst.* — 2007. — V. 31, N 1. — P. 1023–1030.
 14. **Lee Y. C., Chen H. H.** Nonlinear dynamical models of plasma turbulence // *Phys. Scr. (Sweden)*. — 1982. — T. 2A. — P. 41–47.
 15. **Thual O., Frisch U., Henon M.** Application of pole decomposition to an equation governing the dynamics of wrinkled flame fronts // *J. Physique*. — 1985. — T. 46. — P. 1485–1494.
 16. **Joulin G.** On the hydrodynamic stability of curved premixed flames // *J. Phys. France*. — 1989. — T. 50. — P. 1069–1082.
 17. **Joulin G.** On the Zhdanov-Trubnikov equation for premixed flame instability // *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* — 1990. — Bd 100, is. 2(8). — S. 428–432.
 18. **Минаев С. С.** Набор стационарных решений, описывающих ячеистое пламя в случае гидродинамической неустойчивости // *Физика горения и взрыва*. — 1992. — Т. 28, № 1. — С. 35–39.
 19. **Минаев С. С., Пирогов Е. А., Шарыпов О. В.** Нелинейная модель гидродинамической неустойчивости расходящегося пламени // *Физика горения и взрыва*. — 1996. — Т. 32, № 5. — С. 8–17.
 20. **Fursenko R. V., Pan K. L., Minaev S. S.** Noise influence on pole solutions of the Sivashinsky equation for planar and outward propagating flames // *Phys. Rev. E*. — 2008. — V. 78, N 5. — 056301.
 21. **Pan K. L., Fursenko R. V.** Characteristics of cylindrical flame acceleration in outward expansion // *Phys. Fluids*. — 2008. — V. 20, N 9. — 094107.
 22. **Фурсенко Р. В., Минаев С. С.** Гидродинамическая неустойчивость сходящегося цилиндрического пламени // *Физика горения и взрыва*. — 2009. — Т. 45, № 5. — С. 8–15.
 23. **Gutman S., Sivashinsky G. I.** The cellular nature of hydrodynamic instability // *Physica D*. — 1990. — V. 43. — P. 129–139.
 24. **Risken H.** *The Fokker — Planck Equation*. — Berlin: Springer, 1984. — P. 124 (Eq.(5.111)).
 25. **Cambray P., Joulin G.** Length-scales of wrinkling of weakly-forced, unstable premixed flames // *Combust. Sci. Technol.* — 1994. — V. 97. — P. 405–428.
 26. **Rahibe M., Aubry N., Sivashinsky G. I., Lima R.** Formation of wrinkles in outwardly propagating flames // *Phys. Rev. E*. — 1995. — V. 52, N 4. — P. 3675–3686.
 27. **Rahibe M., Aubry N., Sivashinsky G. I.** Stability of pole solution for planar propagating flames // *Phys. Rev. E*. — 1996. — V. 54, N 5. — P. 4958–4972.
 28. **Rahibe M., Aubry N., Sivashinsky G. I.** Instability of pole solutions for planar propagating flames in sufficiently large domains // *Combust. Theory Model.* — 1998. — V. 2, N 1. — P. 19–41.
 29. **Ashurst Wm. T.** Darrieus — Landau instability, growing cycloids and expanding flame acceleration // *Combust. Theory Model.* — 1997. — V. 1. — P. 405–428.
 30. **Kortsarts Y., Brailovsky I., Sivashinsky G. I.** On hydrodynamic instability of stretched flames // *Combust. Sci. Technol.* — 1997. — V. 123. — P. 207–225.

Поступила в редакцию 14/XII 2011 г.