УДК 517.958

О нахождении точных решений двумерного уравнения эйконала для случая, когда фронт волны, распространяющейся в среде, является окружностью*

Е.Д. Москаленский

Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

E-mail: edm@omzg.sscc.ru

Москаленский Е.Д. О нахождении точных решений двумерного уравнения эйконала для случая, когда фронт волны, распространяющейся в среде, является окружностью // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2014. — Т. 17, № 4. — С. 363–372.

Рассматривается задача о распространении в двумерной среде волны, фронт которой в каждый момент времени t представляет собой окружность с центром в точке $(a(t), 0)$ и радиусом $r(t)$. Ставится вопрос, каково в этом случае распределение скоростей в среде. Приведены общие характеристики и примеры таких сред.

Ключевые слова: *распространение волн, фронт волны, уравнение эйконала.*

Moskalensky E.D. On finding exact solutions of the two-dimensional eikonal equation when the front of the wave propagating in a medium is a circle // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2014. — Vol. 17, № 4. — P. 363–372.

Wave propagation in a two-dimensional medium is considered in the case when the front of the wave is a circle with the center $(a(t), 0)$ and radius $r(t)$. A question is posed: what is the distribution of velocity in the medium? Common characteristics and examples of such media are given.

Key words: *wave propagation, front of wave, eikonal equation.*

1. Постановка задачи

Рассмотрим двумерное уравнение эйконала $f_x^2 + f_y^2 = \frac{1}{v^2}$, где $f(x, y)$ задаёт время прихода волны в точку (x, y), а $v(x, y)$ — скорость волны. Кривая

$$f(x, y) = t \tag{1}$$

описывает положение фронта волны в момент времени t. Рассмотрим случай, когда семейство кривых (1) (t — параметр) представляет собой семейство окружностей с радиусом $r(t)$ и с центром в точке, лежащей на оси Ox с абсциссой $a(t)$. Уравнение окружностей из этого семейства выглядит так:

$$(x - a)^2 + y^2 = r^2. \tag{2}$$

Поставим вопрос о нахождении таких сред, (т. е. таких функций $v(x, y)$), в которых фронты волн задаются семейством (2) хотя бы для одного расположения источника. Известными примерами таких сред являются:

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-07-00406).

1) $v = v_0$ — однородная среда (v_0 — постоянная). Фронты представляют собой концентрические окружности с центром в точке $(a, 0)$, где a — постоянная. Источник находится в этой же точке.

2) $v = v_0(1 + kx)$, где v_0, k постоянны. Источник находится в начале координат. Скорость растёт линейно с ростом координаты x. Этот случай рассмотрен в [1]. Фронт волны (в наших обозначениях) имеет вид (2), где $a(t) = \frac{1}{k}(\operatorname{ch}(kv_0t) - 1)$, $r(t) = \frac{1}{k}\operatorname{sh}(kv_0t)$, а функция поля времён имеет вид
$$t = \frac{1}{kv_0}\operatorname{arch}\left(1 + \frac{k^2(x^2 + y^2)}{2(1 + kx)}\right). \tag{3}$$

3) Рассмотрим случай
$$v = k \cdot R_1 \cdot R_2, \tag{4}$$
где k — положительный коэффициент (размерность м$^{-1}$с$^{-1}$), $R_1 = \sqrt{(x-a)^2+y^2}$, $R_2 = \sqrt{(x + a)^2 + y^2}$, a — заданное число. Поскольку этот случай в литературе не описан, рассмотрим его более подробно. Представление о функции v можно получить из рис. 1. Изолиниями этой функции являются овалы Кассини [2], уравнение которых в нашем случае имеет вид $R_1 \cdot R_2 = b^2$, где b — постоянная. Скорость обращается в нуль в точках $(-a, 0)$ и $(a, 0)$.

Функция $L = \ln\frac{1}{v} = -\ln R_1 - \ln R_2 - \ln k$ является гармонической, сопряженная функция U имеет вид: $U = -A_1 - A_2$, где $A_1 = \operatorname{arctg}\frac{x-a}{y}$, $A_2 = \operatorname{arctg}\frac{x+a}{y}$.

Согласно [3], одним из решений уравнения эйконала с правой частью, определяемой (4), является функция
$$f = \int \frac{1}{v}\cos U\,dx + \frac{1}{v}\sin U\,dy. \tag{5}$$

Имеем $\cos A_1 = \frac{y}{R_1}$, $\sin A_1 = \frac{x-a}{R_1}$; аналогично выражаются и $\cos A_2$, $\sin A_2$. Значит,
$$\cos U = \cos(-A_1 - A_2) = \cos(A_1 + A_2) = \frac{1}{R_1R_2}(y^2 - (x - a)(x + a)),$$
$$\sin U = \sin(-A_1 - A_2) = -\sin(A_1 + A_2) = -\frac{2}{R_1R_2}xy.$$

Подставляя в (5), получим
$$f = \frac{1}{k}\int \frac{1}{R_1^2R_2^2}(y^2 - (x - a)(x + a))\,dx - \frac{2}{R_1^2R_2^2}xy\,dy = -\frac{2}{k}x\int \frac{y}{R_1^2R_2^2}\,dy$$
$$= -\frac{2}{k}x\int \frac{y}{4ax}\left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2}\right)dy = -\frac{1}{2ak}(\ln R_1 - \ln R_2) = \frac{1}{2ak}\ln\frac{R_2}{R_1}.$$

Найдём уравнение изолиний этой функции. Имеем $\frac{1}{2ak}\ln\frac{R_2}{R_1} = C$. Отсюда $R_2^2 = R_1^2 \cdot e^{4akC}$. После очевидных преобразований получим
$$x^2\big(e^{4akC} - 1\big) - 2ax\big(e^{4akC} + 1\big) + a^2\big(e^{4akC} - 1\big) + y^2\big(e^{4akC} - 1\big) = 0.$$

При $C = 0$ изолинией является прямая $x = 0$; если же $C \neq 0$, то, разделив обе части последнего уравнения на $e^{4akC} - 1$, получим $x^2 - 2a\frac{e^{4akC}+1}{e^{4akC}-1}x + a^2 + y^2 = 0$. Окончательно

$$\left(x - a\frac{e^{4akC}+1}{e^{4akC}-1}\right)^2 + y^2 = 4a^2\frac{e^{4akC}}{(e^{4akC}-1)^2}.$$

Таким образом, фронт волны в момент времени C представляет собой окружность радиуса $2a\frac{e^{2akC}}{e^{4akC}-1}$ с центром в точке $\left(a\frac{e^{4akC}+1}{e^{4akC}-1}, 0\right)$.

Изолинии функции f представлены на рис. 2.

Отметим, что если рассматривать полупространство $x \geq 0$, то плоская волна, падающая перпендикулярно на его границу, фокусируется в такой среде в точку.

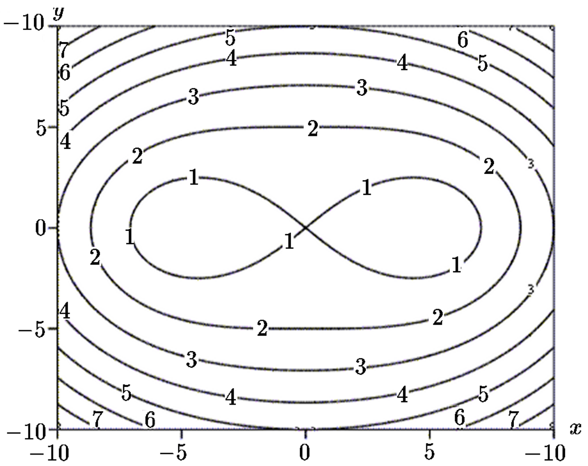

Рис. 1. Изолинии функции v; $a = 5$, $k = 0.2$

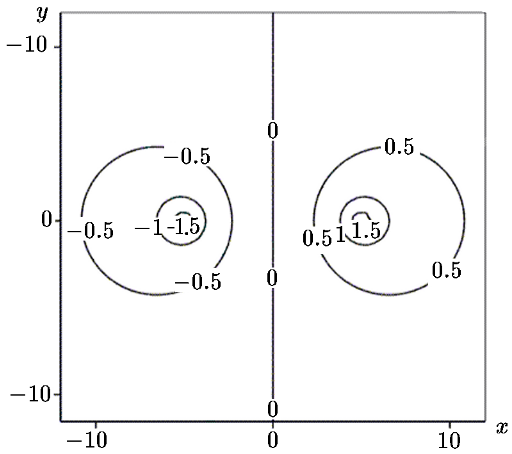

Рис. 2. Изолинии функции f; $a = 5$, $k = 0.2$

2. Результаты общего характера

Поставленная задача может быть решена, если удастся по заданным функциям $a(t)$ и $r(t)$ выразить из уравнения (2) переменную t через координаты. Тогда из уравнения эйконала $t_x^2 + t_y^2 = \frac{1}{v^2}$ получим распределение скорости в среде. Однако нахождение точного решения этого уравнения возможно только для отдельных частных наборов функций $a(t)$, $r(t)$. Для получения общих характеристик таких сред обратимся к принципу Гюйгенса. Пусть в момент времени t фронт волны представляет собой окружность с центром в точке $A_0(a, 0)$ и радиусом r, а в момент $t+\Delta t$ — окружность с центром в точке $A(a+\Delta a, 0)$ и радиусом $r+\Delta r$ (рис. 3).

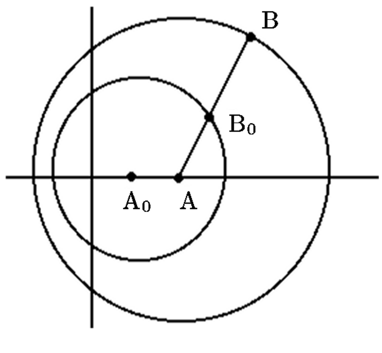

Рис. 3

Возьмём на первой из этих окружностей произвольную точку $B_0(x, y)$. По принципу Гюйгенса её можно рассматривать как источник сферической волны, распространяющейся со скоростью $v(x, y)$. Окружность с центром в точке A и радиусом AB является огибающей таких волн, создаваемых каждой точкой первой окружности. Отсюда следует, что $BB_0 = v(x, y) \cdot \Delta t$.

Имеем $BB_0 = AB - B_0A = r + \Delta r - \sqrt{(x-(a+\Delta a))^2 + y^2}$.

Получаем систему:

$$\begin{cases} v(x,y)\cdot\Delta t = r + \Delta r - \sqrt{(x-(a+\Delta a))^2 + y^2}, \\ (x-a)^2 + y^2 = r^2. \end{cases}$$

Из первого уравнения, с учетом второго, следует, что

$$v(x,y)\Delta t = r + \Delta r - \sqrt{r^2 - 2(x-a)\Delta a + \Delta a^2}.$$

Умножим и разделим полученное выражение на $r+\Delta r+\sqrt{r^2 - 2(x-a)\Delta a + \Delta a^2}$, имеем

$$v(x,y) = \frac{1}{\Delta t}\cdot\frac{(r+\Delta r)^2 - r^2 + 2(x-a)\Delta a - \Delta a^2}{r+\Delta r+\sqrt{r^2 - 2(x-a)\Delta a + \Delta a^2}} = \frac{\frac{(r+\Delta r)^2 - r^2}{\Delta t} + 2(x-a)\frac{\Delta a}{\Delta t} - \frac{\Delta a^2}{\Delta t}}{r+\Delta r+\sqrt{r^2 - 2(x-a)\Delta a + \Delta a^2}}.$$

Окончательно

$$v(x,y) = \frac{(2r+\Delta r)\cdot\frac{\Delta r}{\Delta t} + 2(x-a)\cdot\frac{\Delta a}{\Delta t} - \Delta a\cdot\frac{\Delta a}{\Delta t}}{r+\Delta r+\sqrt{r^2 - 2(x-a)\Delta a + \Delta a^2}}.$$

Если r, a дифференцируемые функции по времени, то при $\Delta t \to 0$ получаем $v(x,y) = \frac{2rr' + 2(x-a)a'}{r+r}$. И теперь

$$v(x,y) = \frac{x-a}{r}\cdot a' + r', \tag{6}$$

где $y = \pm\sqrt{r^2 - (x-a)^2}$.

С помощью формулы (6) можно получить ответ на следующий вопрос: пусть скорость в среде зависит только от координаты x, тогда какова должна быть эта зависимость, чтобы в среде могли распространяться волны, фронт которых в любой момент времени представляет собой окружность? Действительно, если скорость в среде зависит только от x, то при фиксированном $x = x_0$ выражение $\frac{x_0-a}{r}a' + r'$ не зависит от времени, т. е. $\left(\frac{x_0-a}{r}a' + r'\right)' = 0$ или

$$x_0\left(\frac{a'}{r}\right)' - \left(\frac{aa'}{r}\right)' + r'' = 0. \tag{7}$$

Так как последнее равенство имеет место при любом x_0, то $\frac{a'}{r} = k$, где k — постоянная. Отсюда $a' = kr$, подставив это выражение в (7), получим $r'' - k^2 r = 0$.

Если $k = 0$, то $r = C_1 t + C_2,\ a = C_1$, отсюда $v = C_1$, и среда однородная.

Если же $k \neq 0$, то $r = C_1 \operatorname{ch} kt + C_2 \operatorname{sh} kt$, $a = C_1 \operatorname{sh} kt + C_2 \operatorname{ch} kt + C_3$, и после подстановки в (6) получим $v = kx + C$.

Итак, если скорость в среде зависит только от координаты x, то волны рассматриваемого типа могут существовать в такой среде только в двух случаях: либо среда однородна, либо скорость линейно зависит от x.

Если учесть, что для определения параметров a, r в момент времени t достаточно знать положение двух, несимметричных относительно оси абсцисс, точек фронта, то, имея эту информацию для каждого момента времени, можно по формуле (6) определить $v(x,y)$. Например, в случае если рассматривается распространение волны цунами, эта формула позволяет определить глубину океана во всех точках, пройденных волной.

Для дальнейшего изложения нам потребуется понятие пучка окружностей [4]. Применительно к рассматриваемому случаю оно выглядит следующим образом. Пусть даны уравнения двух окружностей: $(x-a_1)^2 + y^2 - r_1^2 = 0$ и $(x-a_2)^2 + y^2 - r_2^2 = 0$. Обозначим левые части этих уравнений через C_1 и C_2, тогда уравнение

$$C_1 - \lambda C_2 = 0 \tag{8}$$

задаёт пучок окружностей (λ — параметр). Окружности C_1 и C_2 называются основными окружностями пучка. Координаты центра и радиус окружности пучка выражаются через λ следующим образом (d — расстояние между центрами):

$$a = \frac{a_1 - \lambda a_2}{1-\lambda}; \qquad r^2 = \frac{r_1^2 - (r_1^2 + r_2^2 - d^2)\lambda + r_2^2\lambda^2}{(1-\lambda)^2}.$$

При $\lambda = 1$ уравнение (8) задаёт прямую, которая называется радикальной осью пучка. В рассматриваемом случае эта прямая перпендикулярна оси абсцисс. Если какая-либо окружность пучка имеет с радикальной осью общую точку, то все окружности пучка проходят через эту точку. В зависимости от числа таких общих точек выделяют эллиптические пучки (каждая окружность пучка имеет две общие точки с радикальной осью), параболические пучки (одна общая точка) и гиперболические (нет общих точек). Указанные типы пучков представлены на рис. 4, взятом из [4]. Отметим ещё, что любая точка радикальной оси, лежащая вне пучка, является центром окружности, ортогональной ко всем окружностям пучка.

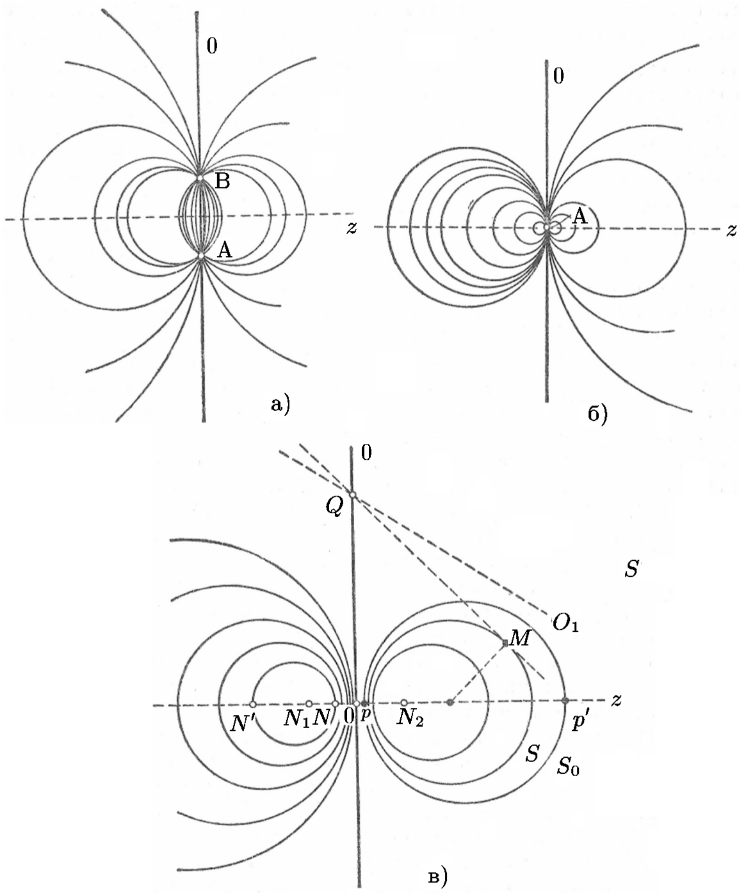

Рис. 4. Пучки окружностей: а) эллиптический, б) параболический, в) гиперболический

Легко видеть, что изолиниями функции $u(x, y) = \frac{C_1}{C_2}$ будут являться окружности соответствующего пучка (8). В зависимости от выбора основных окружностей C_1 и C_2 этот пучок будет относиться к одному из трёх указанных типов. Это даёт возможность получить полное описание среды, в которой фронты волн представляют собой пучок соответствующего типа. Приведём это описание.

а) Эллиптический пучок. Пусть $x = b$ — уравнение радикальной оси, и в качестве основных выбраны окружности, проходящие через точки (b, q) и $(b, -q)$, лежащие на радикальной оси с центрами в точках $(b, 0)$ и $(b+1, 0)$. Тогда $u = \frac{(x-b)^2+y^2-q^2}{(x-b-1)^2+y^2-q^2-1}$. Прямым подсчётом можно получить, что $u_x^2 + u_y^2 = \frac{1}{(x-b)^2}(u-1)^2(u^2+q^2(u-1)^2)$. Точечных источников, создающих такое волновое поле нет, так как среди окружностей пучка нет окружности нулевого радиуса.

б) Параболический пучок. Пусть опять $x = b$ — уравнение радикальной оси, и все окружности пучка проходят через точку $(b, 0)$. Соответствующие формулы получаются из формул, полученных в пункте а), если положить в них $q = 0$, то $u = \frac{(x-b)^2+y^2}{(x-b-1)^2+y^2-1}$; $u_x^2 + u_y^2 = \frac{1}{(x-b)^2}(u-1)^2u^2$. Семейство лучей задаётся уравнением $(x-b)^2 + (y-p)^2 = p^2$, где p — параметр. Лучи являются дугами окружностей, проходящих через точку $(b, 0)$ с центром на радикальной оси.

в) Гиперболический пучок. В качестве основных окружностей пучка выберем две окружности нулевого радиуса с центрами в точках $(m, 0)$ и $(n, 0)$, тогда $u = \frac{(x-m)^2+y^2}{(x-n)^2+y^2}$, уравнение радикальной оси пучка имеет вид $x = \frac{m+n}{2}$, а семейство лучей описывается уравнением $\left(x - \frac{m+n}{2}\right)^2 + (y-p)^2 = p^2 + \left(\frac{m+n}{2}\right)^2$, где p — параметр. Прямым подсчётом можно показать, что имеет место равенство $u_x^2 + u_y^2 = u(u-1)^2 \frac{1}{\left(x - \frac{m+n}{2}\right)^2}$.

Заметим, что если $u(x, y)$ является решением уравнения эйконала и, кроме того, изолинии этой функции являются окружностями, то и функция $p(u)$ также имеет в качестве изолиний те же окружности при условии, что p — монотонная функция (иначе изолинии для разных моментов времени могут иметь общие точки). То есть, если $v(x, y)$ описывает среду указанного типа, то и функция $\frac{v(x,y)}{p'}$ описывает среду, в которой фронт распространяющейся волны может представлять собой окружность. Таким образом, задавая функцию p, можно получать новые среды изучаемого типа. При этом будем опираться на очевидное утверждение: если $p = p(u)$, то $p_x^2 + p_y^2 = p'^2\left(u_x^2 + u_y^2\right)$.

Важным следствием отмеченного выше факта является следующее утверждение: поскольку изолиниями произвольных функций $p(u)$ и $g(u)$ являются те же кривые, что и для функции u, то семейство лучей, вдоль которых распространяется волна, будет одинаковым для этих функций и можно ограничиться нахождением уравнения этого семейства только для функции u. Поскольку для изотропных сред лучи ортогональны фронту волны, то для нахождения лучей можно пользоваться следующим фактом [4]: две окружности, заданные уравнениями $x^2+y^2+M_1x+N_1y+P_1 = 0$ и $x^2+y^2+M_2x+N_2y+P_2 = 0$, являются ортогональными тогда и только тогда, когда

$$M_1M_2 + N_1N_2 = 2(P_1 + P_2). \tag{9}$$

3. Примеры

Приведём примеры, причём будем сохранять их нумерацию, начатую в начале статьи.
4) $u = \frac{(x+m)^2+y^2}{(x+n)^2+y^2}$ (соответствует гиперболическому пучку). Найдём изолинии этой функции. Имеем $\frac{(x+m)^2+y^2}{(x+n)^2+y^2} = C$. Отсюда $(x+m)^2 + y^2 = C(x+n)^2 + Cy^2$ или

$$(C-1)x^2 + 2(nC-m)x + Cn^2 - m^2 + (C-1)y^2 = 0.$$

При $C = 1$ изолинией функции u является прямая $x = -\frac{m+n}{2}$, в противном случае после деления обеих частей равенства на $C-1$ и выделения полного квадрата получим

$$\left(x+\frac{nC-m}{C-1}\right)^2+y^2=\frac{C(m-n)^2}{(C-1)^2}. \tag{10}$$

Таким образом, изолинии являются окружностями с центром в точке $\left(\frac{m-Cn}{C-1},0\right)$ и радиусом $\frac{\sqrt{C}|m-n|}{|C-1|}$. Найдём семейство лучей. Пусть оно является семейством окружностей вида $x^2+y^2+M_2x+N_2y+P_2=0$. Для семейства окружностей (10) имеем $M_1=2\frac{nC-m}{C-1}$, $N_1=0$, $P_1=\frac{n^2C-m^2}{C-1}$. Используя условие ортогональности (9), получим $2\frac{nC-m}{C-1}M_2+0\cdot N_2=2(\frac{n^2C-m^2}{C-1}+P_2)$, или после упрощений $(nC-m)M_2=n^2C-m^2+(C-1)P_2$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях параметра C, получим систему:

$$nM_2=n^2+P_2, \qquad -mM_2=-m^2-P_2.$$

Отсюда $M_2=m+n,\ P_2=mn$. Уравнение лучей принимает вид $x^2+y^2+(m+n)x+P_2y+mn=0$. Заменим параметр P_2 на $2p$ и, после выделения полных квадратов, получим окончательно

$$\left(x+\frac{m+n}{2}\right)^2+(y+p)^2=p^2+\frac{(m-n)^2}{4},$$

где p — параметр.

Прямым подсчётом можно убедиться, что

$$\frac{1}{v^2}=u_x^2+u_y^2=4(n-m)^2u\frac{1}{((x+n)^2+y^2)^2}. \tag{11}$$

Имеем далее

$$u-1=\frac{(x+m)^2+y^2}{(x+n)^2+y^2}-1=(m-n)\frac{2x+m+n}{(x+n)^2+y^2}.$$

Значит,

$$\frac{1}{(x+n)^2+y^2}=\frac{u-1}{(m-n)(2x+m+n)}. \tag{12}$$

Подставляя в (11), получим окончательно

$$u_x^2+u_y^2=4u(u-1)^2\frac{1}{(2x+m+n)^2}. \tag{13}$$

Рассмотрим частные случаи:

а) если $p(u)=\ln u=\ln\frac{(x+m)^2+y^2}{(x+n)^2+y^2}$, то $p_x^2+p_y^2=\frac{4(n-m)}{u}(u-1)^2\frac{1}{(2x+m+n)^2}$, с учётом (12),

$$p_x^2+p_y^2=4(n-m)\frac{1}{(x+m)^2+y^2)((x+n)^2+y^2)},$$

т. е. $v=\frac{1}{4(n-m)}\sqrt{(x+m)^2+y^2}\times\sqrt{(x+n)^2+y^2}$.

Выше (в примере 3) эти формулы, с точностью до постоянного множителя, были получены другим путём (для $m=-a, n=a$);

б) если $p'(u)=\frac{1}{(u-1)\sqrt{u}}$, то

$$p_x^2+p_y^2=\frac{4}{(2x+m+n)^2}=\frac{1}{(x+\frac{m+n}{2})^2}. \tag{14}$$

Интегрируя, получим $p=2\operatorname{arth}\sqrt{u}$.

Преобразуем правую часть уравнения (14):

$$v = x + \frac{m+n}{2} = \frac{1}{kv_0} kv_0 \left(x + \frac{m+n}{2} \right) = \frac{1}{kv_0} \left(v_0 \left(kx + k\frac{m+n}{2} \right) \right).$$

Если положить $\frac{m+n}{2} = \frac{1}{k}$, т. е. $n = \frac{2}{k} - m$, то в полупространстве $x \geq 0$ скорость линейно растёт с ростом x, $v = v_0(1 + kx)$, и функция

$$p(x, y) = 2 \cdot \frac{1}{kv_0} \operatorname{arth} \sqrt{\frac{(x+m)^2 + y^2}{\left(x + \frac{2}{k} - m \right)^2 + y^2}} \tag{15}$$

описывает распространение волн в этой среде от точечного источника, расположенного в точке $(-m, 0)$. Уравнением семейства лучей для этого случая является полученное выше уравнение, в котором положено $n = \frac{2}{k} - m$. Оно принимает вид

$$\left(x + \frac{1}{k} \right)^2 + (y + p)^2 = p^2 + \left(m - \frac{1}{k} \right)^2. \tag{16}$$

Лучи представляют собой дуги окружностей, проходящих через точку $(-m, 0)$ с центром, находящимся на прямой $x = -\frac{1}{k}$.

Покажем, что если источник расположен на поверхности полупространства, т. е. при $m = 0$, то формула (15) даёт тот же результат, что и формула (3). Положим $b = 2 \operatorname{arth} \sqrt{\frac{x^2+y^2}{(x+\frac{2}{k})^2+y^2}}$. Тогда $\operatorname{th} \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{(x+\frac{2}{k})^2+y^2}}$. Из формулы $1 - \operatorname{th}^2 \alpha = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \alpha}$ находим $\operatorname{ch}^2 \frac{b}{2} = 1 + \frac{k^2(x^2+y^2)}{4(kx+1)}$. Наконец, из формулы $\operatorname{ch} 2\alpha = 2 \operatorname{ch}^2 \alpha - 1$ получаем $\operatorname{ch} b = 1 + \frac{k^2(x^2+y^2)}{2(kx+1)}$. Окончательно

$$\operatorname{arch} \left(1 + \frac{k^2(x^2 + y^2)}{2(kx+1)} \right) = 2 \operatorname{arth} \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{(x + \frac{2}{k})^2 + y^2}}.$$

Отсюда и следует равенство правых частей формул (3) и (15) для случая, когда источник находится на поверхности.

На рис. 5 представлен процесс распространения волны для случая, когда источник находится в точке $(-m, 0)$.

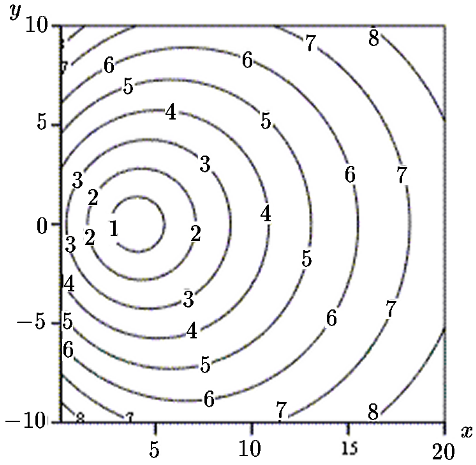

Рис. 5. $k = 0.1$; $m = -4$

5) положим

$$u = -kx + \sqrt{m^2x^2 + n^2y^2}.$$

Найдём изолинии этой функции. Имеем

$$-kx + \sqrt{m^2x^2 + n^2y^2} = C.$$

Отсюда

$$\sqrt{m^2x^2 + n^2y^2} = kx + C.$$

После возведения обеих частей равенства в квадрат получим

$$(m^2 - k^2)x^2 + n^2y^2 - 2kCx = C^2.$$

Положим $n^2 = m^2 - k^2 \neq 0$, тогда $\big(m^2 - k^2\big)x^2 + (m^2 - k^2)y^2 - 2kCx = C^2$. После деления обеих частей на $m^2 - k^2$ и выделения полного квадрата получим

$$\Big(x - \frac{kC}{m^2 - k^2}\Big)^2 + y^2 = \frac{C^2m^2}{(m^2 - k^2)^2}.$$

Итак, при условии $n^2 = m^2 - k^2$ изолинии функции u представляют собой окружности с центром в точке $\big(\frac{kC}{m^2-k^2}, 0\big)$ и радиусом $r = \frac{Cm}{m^2-k^2}$.

Прямым подсчётом можно убедиться, что $u_x^2 + u_y^2 = \frac{m^2u^2}{m^2x^2+(m^2-k^2)y^2}$. Если теперь выбрать $p(u) = \ln u = \ln(-kx + \sqrt{m^2x^2 + (m^2 - k^2)y^2})$, то $p_x^2 + p_y^2 = \frac{m^2}{m^2x^2+(m^2-k^2)y^2}$. Таким образом, функция p описывает распространение волн в среде, скорость волны в которой задаётся формулой

$$v(x, y) = \frac{1}{m}\sqrt{m^2x^2 + (m^2 - k^2)y^2}.$$

Если $m^2 - k^2 > 0$, то изолинии функции v являются эллипсами. Источники расположены на окружности с центром в точке $\big(\frac{k}{m^2-k^2}, 0\big)$ и радиусом $r = \frac{m}{m^2-k^2}$. Положение фронта волны для различных моментов времени показано на рис. 6а, а соответствующее распределение скорости в среде — на рис. 6б. Легко видеть, что полученное семейство окружностей не является пучком окружностей.

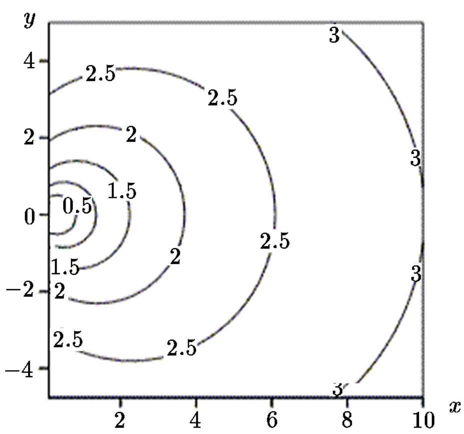

Рис. 6а. $m = 4$; $k = 3$

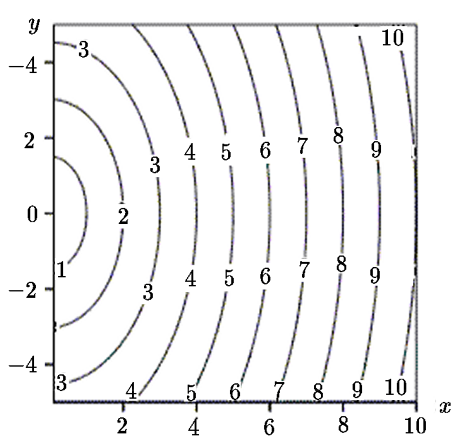

Рис. 6б. $m = 4$; $k = 3$

4. Заключение

Основные результаты, полученные в статье:

а) получена формула (6), позволяющая находить распределение скорости в среде по известным функциям $a(t), r(t)$;

б) показано, что если скорость в среде зависит только от одной координаты, то волны рассматриваемого типа могут существовать, только если эта зависимость описывается линейной функцией (в частности, постоянной);

в) для случая, когда семейство (2) представляет собой пучок окружностей, получены общие формулы, описывающие распределение скоростей в среде для каждого из трёх типов пучков;

г) получена формула (15), описывающая распространение волн в практически важном случае линейной зависимости скорости от координаты, когда точечный источник расположен на произвольной глубине. Она обобщает соответствующую формулу из [1], в которой источник расположен на поверхности полупространства;

д) в примерах 3) и 5) получены точные решения уравнения эйконала для сред, распределение скоростей в которых описывается достаточно простыми функциями. В частности, эти решения можно использовать при тестировании численных методов.

В статье не приведено исчерпывающего ответа на поставленный вопрос — полного описания сред указанного типа не получено. В частности, хотелось бы получить ответы на следующие вопросы:

1. Во всех рассмотренных в статье случаях функция $a(t)$ была монотонна — центр окружности перемещался в положительном направлении оси абсцисс. Не видно никаких запретов на немонотонное перемещение центра, когда в какие-то промежутки времени он движется в отрицательном направлении оси абсцисс, а в какие-то — в положительном направлении. Каковы в этом случае особенности распределения скоростей в среде?

2. Каково распределение скоростей в среде, в которой фронты волн задаются семейством окружностей вида $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, где $a(t), b(t), r(t)$ — функции времени? То есть центры окружностей располагаются в этом случае на произвольной кривой

$$\begin{cases} x = a(t), \\ y = b(t). \end{cases}$$

Может ли эта кривая быть замкнутой?

Литература

1. **Гурвич И.И., Боганик Г.Н.** Сейсмическая разведка. — М.: Недра, 1980.

2. **Савелов А.А.** Плоские кривые. Систематика, свойства, применения. — М.: Либроком, 2010.

3. **Москаленский Е.Д.** О нахождении точных решений двумерного уравнения эйконала // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2009. — Т. 12, № 2. — С. 201–209.

4. Энциклопедия элементарной математики. Книга 4. Геометрия. — М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963.

Поступила в редакцию 31 октября 2013 г.,
в окончательном варианте 26 февраля 2014 г.