$\mathcal{AMS}$ subject classification: 34B10, 34B15, 47H11

Результаты по существованию для нелинейного дифференциального включения второго порядка с нелокальными граничными условиями

Н. Боутераа, С. Бенайха

Laboratory of Fundamental and Applied Mathematics of Oran (LMFAO), University of Oran1, Ahmed Benbella. Algeria
E-mails: bouteraa-27@hotmail.fr (Н. Боутераа), slimanebenaicha@yahoo.fr (С. Бенайха)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 1, Vol. 14, 2021.

Боутераа Н., Бенайха С. Результаты по существованию для нелинейного дифференциального включения второго порядка с нелокальными граничными условиями // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2021. — Т. 24, № 1. — С. 35–45.

В данной работе мы исследуем вопрос существования решений для дифференциального включения второго порядка с нелокальными граничными условиями. Чтобы получить результаты для данной проблемы, сначала используем теорему Шефера о неподвижной точке вместе с селекционной теоремой Брессана–Коломбо. Наш результат затем основывается на теореме о неподвижной точке для многозначных отображений Ковитца–Надлера. Приведен пример, иллюстрирующий полученные результаты.

DOI: 10.15372/SJNM20210103

Ключевые слова: *второй порядок, дифференциальное включение, многозначное, теорема выбора.*

Bouteraa N., Benaicha S. Existence results for second-order nonlinear differential inclusion with nonlocal boundary conditions // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2021. — Vol. 24, № 1. — P. 35–45.

In this paper, we investigate the existence of solutions for a second-order differential inclusion with nonlocal boundary conditions. To establish the existence results for the given problem, first we apply Schaefer's fixed point theorem combined with a selection theorem due to Bressan and Colombo. Second, our result is based on the fixed point theorem for multivalued maps due to Covitz and Nadler. An example is given to illustrate the obtained results.

Keywords: *second-order, differential inclusion, multi-valued, selection theorem.*

1. Введение

Цель данной статьи — определить, существуют ли решения нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с нелокальными граничными условиями

$$u''(t) \in F(t, u(t)),\ t \in [0,1], \tag{1.1}$$

$$u(0) = \gamma u(\eta),\quad u'(1) = 0, \tag{1.2}$$

где η и γ — некоторые заданные постоянные, $\eta \in [0,1]$, $\gamma \in (0,1)$, $F: [0,1] \times \mathbb{R} \to P(\mathbb{R})$ — многозначное отображение и $P(\mathbb{R})$ — семейство всех подмножеств $\mathbb{R}$.

В последнее время многоточечные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений привлекают большое внимание. Многие авторы исследовали эти дифференциальные уравнения с различными граничными условиями, используя различные подходы. Например, авторы [8, 10] исследовали вопрос существования положительных решений краевых задач третьего и четвертого порядков. Результаты получены с помощью метода верхнего и нижнего решений, теоремы Шаудера о неподвижной точке и теоремы индекса неподвижной точки в комбинации с операторной спектральной теоремой. В [7] авторы исследовали существование трех положительных решений для двухточечной краевой задачи высокого порядка с использованием неподвижной точки Леггетта–Вильямса. Следует также упомянуть исследования А. Аширалыева с соавторами [1, 2], где рассмотрены нелокальные краевые задачи для параболических и эллиптических дифференциальных и разностных уравнений.

Впервые нелокальные краевые задачи (НКЗ) были рассмотрены М. Пиконе [22], А. Зоммерфельдом [24] и Р. Мизесом [21] в начале 20 века. В последние пятьдесят лет исследования НКЗ были мотивированы результатами совместной статьи Бицадзе и Самарского на двух страницах [4]. Ильин и Моисеев [18, 19] рассмотрели дифференциальные и разностные постановки НКЗ для операторов Штурма–Лиувилля с нелокальными граничными условиями первого и второго рода. В этих работах авторы в основном исследовали вопросы сходимости разностных схем на классах гладких решений, установлены априорные оценки и доказаны теоремы о единственности и существовании. С другой стороны, НКЗ первого рода для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка рассматривались этими авторами [18], существование решения изучено в том случае, когда правая часть линейна. В данной статье основное внимание уделяется дифференциальному включению, когда нелинейность F (правая часть) является как выпуклой, так и невыпуклой компактной мультифункцией. Известно, что многие вопросы математической физики, экономики и т. д. требуют исследования реалистичных проблем. Реалистичные проблемы экономики, оптимального управления и стохастического анализа могут моделироваться в виде дифференциальных включений. Многие авторы уделяют много внимания изучению проблем такого рода (см., например, [9, 11, 21]).

В данной работе исследуется существование решений краевых задач второго порядка для дифференциальных включений с нелокальными граничными условиями. Статья организована следующим образом. В пункте 2 мы вводим некоторые определения и даем предварительные результаты, которые будут использоваться в остальной части статьи. В пункте 3 представлены результаты по существованию задачи (1.1), (1.2), когда правая часть невыпуклая, где сначала мы используем теорему Шефера о неподвижной точке (см. [25, с. 29]) вместе с селекционной теоремой Брессана и Коломбо для полунепрерывных снизу многозначных отображений с непустыми замкнутыми и разложимыми значениями [5, 6], а второй результат основан на теореме о неподвижной точке многозначных сжимающих отображений Ковитца и Надлера [12]. Мы приводим пример, демонстрирующий применимость наших результатов.

2. Предварительные результаты

В этом пункте мы представим обозначения, определения и предварительные факты из многозначного анализа, которые используются на протяжении всей статьи.

Здесь $(C[0,1],\mathbb{R})$ — банахово пространство всех непрерывных функций из $[0,1]$ в $\mathbb{R}$ с нормой $\|u\| = \sup\{|u(t) :$ для всех $t \in [0,1]|\}$, $L^1([0,1],\mathbb{R})$ — банахово пространство измеримых функций $u: [0,1] \to \mathbb{R}$, которые интегрируемы по Лебегу и нормированы $\|u\|_{L^1} = \int_0^1 |u(t)|\,dt$. $AC^i([0,1],\mathbb{R})$ — пространство i-раз дифференцируемых функций $u\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, i-я производная $u^{(i)}$ которых является абсолютно непрерывной. Пусть A —

подмножество $[0,1]\times\mathbb{R}$. A является $L\otimes B$ измеримым, если A принадлежит σ-алгебре, генерируемой всеми множествами $J\times D$, где J измеримо по Лебегу в $[0,1]$, а D измеримо по Борелю в $\mathbb{R}$.

Определение 2.1. Подмножество A из $L^1([0,1],\mathbb{R})$ разложимо, если для всех $u,\ v\in A$ и измеримых $J\subset[0,1]=j$, функция $u\chi_J+v\chi_{j-J}\in A$, где χ_J означает характеристическую функцию J.

Пусть (X,d) — метрическое пространство, индуцированное из нормированного пространства $(X,\|\cdot\|)$. Обозначим

$$\begin{gathered}P_0(X)=\{A\in P(X)\colon A\neq\phi\},\\ P_{\mathrm{cl}}(X)=\{A\in P_0(X)\colon A\ \text{замкнуто}\},\\ P_{\mathrm{b}}(X)=\{A\in P_0(X)\colon A\ \text{ограничено}\},\\ P_{\mathrm{comp}}(X)=\{A\in P_0(X)\colon A\ \text{компактно}\}.\end{gathered}$$

Рассмотрим $H_d\colon P(X)\times P(X)\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$, задаваемое путем

$$H_d(A,B)=\max\left\{\sup_{a\in A}d(a,B),\sup_{b\in B}d(b,A)\right\},$$

где $d(a,B)=\inf_{b\in B}d(a,b)$ и $d(b,A)=\inf_{a\in A}d(a,b)$. Тогда $(P_{\mathrm{cl}}(X),H_d)$ — метрическое пространство и $(P_{\mathrm{b}}(X),H_d)$ — обобщенное метрическое пространство (см. [20]).

Пусть Y — непустое замкнутое подмножество банахова пространства E и $G: Y\to P_{\mathrm{cl}}(E)$ — многозначный оператор с непустыми замкнутыми значениями. G называется полунепрерывным снизу (п.н.с), если множество $\{x\in Y\colon G(x)\cap U\neq\phi\}$ открыто для любого открытого набора U в E. G имеет неподвижную точку, если есть $x\in Y$ такое что $x\in G(x)$.

Для более подробной информации о многозначных отображениях см. книги Обена и Селины [3], Демлинга [14], Горневича [16] и Ху и Папагеоргиу [17].

Определение 2.2. Пусть Y — сепарабельное метрическое пространство и $N: Y\to P_0\left(L^1([0,1],\mathbb{R})\right)$ — многозначный оператор. Мы говорим, что N имеет свойство (BC), если N полунепрерывно снизу и имеет непустые замкнутые и разложимые значения.

Пусть $F\colon[0,1]\times\mathbb{R}\to P_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R})$ — многозначное отображение с непустыми компактными значениями. Определим многозначный оператор

$$H\colon C([0,1]\times\mathbb{R})\to P_0\left(L^1([0,1],\mathbb{R})\right),$$

полагая

$$H(u)=\left\{w\in L^1([0,1],\mathbb{R})\colon w(t)\in F(t,u(t))\ \text{для п. в.}\ t\in[0,1]\right\}.$$

Назовем H оператором Немыцкого, связанным с F. Мы говорим, что F полунепрерывен снизу, если связанный с ним оператор Немыцкого H полунепрерывен снизу и имеет непустые замкнутые и разложимые значения.

Сформулируем селекционную теорему Брессана и Коломбо.

Лемма 2.1. ([5]). *Пусть Y — сепарабельное метрическое пространство и $N: Y\to P\left(L^1([0,1],\mathbb{R})\right)$ — многозначный оператор, имеющий свойство (BC). Тогда N имеет непрерывный выбор, т. е. существует непрерывная (однозначная) функция $g: Y\to L^1([0,1],\mathbb{R})$, такая что $g(u)\in N(u)$ для каждого $u\in Y$.*

Определение 2.3. Многозначный оператор $N: X \to P_{\mathrm{cl}}(X)$ называется
(i) ρ-липшицевым тогда и только тогда, когда существует $\rho > 0$, такое что $H_d(Nu, Nv) \leq \rho d(u, v)$ для каждого $u, v \in X$,
(ii) оператором сжатия тогда и только тогда, когда он является ρ-липшицевым при $\rho < 1$.

Лемма 2.2. ([12])*(Ковитца–Надлера). Пусть (X, d) — полное метрическое пространство. Если $N: X \to P_{\mathrm{cl}}(X)$ является сжатием, то $FixN \neq \phi$.*

Теорема 2.1. ([23]) *(Шефера). Пусть A — полностью непрерывное отображение банахова пространства X в себя, так что множество $\{u \in X: u = \lambda Au,\ 0 < \lambda < 1\}$ ограничено. Тогда A имеет неподвижную точку.*

3. Результаты по существованию

С помощью теоремы Шефера и селекционной теоремы Брессана и Коломбо для полунепрерывных снизу отображений с разложимыми значениями, сначала представим результат по существованию для задачи (1.1), (1.2). Перед этим введем следующие гипотезы, используемые в дальнейшем:

(H_1) $F: [0,1] \times \mathbb{R} \to P_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R})$ — многозначное отображение, удостоверяющее, что:
 (i) $(t, u) \longmapsto F(t, u)$ является $L \otimes B$ измеримым,
 (ii) $u \longmapsto F(t, u)$ полунепрерывно снизу для п. в. $t \in [0, 1]$,

(H_2) F интегрально ограниченная функция, т. е. существует функция $m \in L^1([0,1], \mathbb{R}^+)$ такая что $\|F(t, u)\| = \sup\{\|v\|: v \in F(t, u)\} \leq m(t)$ почти для всех $t \in [0, 1]$.

Лемма 3.1. ([12]) *Пусть $F: [0,1] \times \mathbb{R} \to P_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R})$ — многозначное отображение. Предположим, что (H_1) и (H_2) верны. Тогда F является п.н.с.*

Определение 3.1. Функция $u \in AC^2([0,1], \mathbb{R})$ называется решением краевой задачи (1.1), (1.2), если u удовлетворяет дифференциальному включению (1.1) почти всюду на $[0, 1]$ и условию (1.2), т. е. $\gamma u(\eta)$, $u'(1) = 0$ при $u(0) = \eta \in [0, 1]$, $\gamma \in (0, 1)$.

В первом результате нас интересует существование решений задачи (1.1), (1.2), когда правая часть не обязательно имеет выпуклые значения. Наша стратегия решения этой задачи основана на теореме Шефера о неподвижной точке и селекционной теореме Брессана и Коломбо [4] для полунепрерывных снизу отображений с разложимыми значениями.

Теорема 3.1. *Предположим, что (H_1) и (H_2) верны. Тогда задача* (1.1), (1.2) *имеет хотя бы одно решение.*

Доказательство. (H_1) и (H_2) согласно лемме 3.1 означают, что F полунепрерывно снизу. Тогда согласно лемме 2.1 существует непрерывная (однозначная) функция (см. определение многозначного оператора H) $h: C([0,1], \mathbb{R}) \to L^1([0,1], \mathbb{R})$ такая что $h(u) \in H(u)$ для всех $u \in C([0,1], \mathbb{R})$.

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} -u''(t) = h(t), & t \in [0, 1], \\ u(0) = \gamma u(\eta), & u'(1) = 0,\ \eta \in [0, 1],\ \gamma \in (0, 1). \end{cases} \tag{3.1}$$

Замечание 3.1. Если $u \in C([0,1],\mathbb{R})$ — решение задачи (3.1), то u — решение задачи (1.1), (1.2).

Преобразуем задачу (3.1) в задачу с неподвижной точкой.

Из $u''(t) = -h(t)$ мы имеем

$$u'(t) = u'(0) - \int_0^t h(s)\,ds,\ t \in [0,1].$$

Интегрируя по $[0,t]$, получим

$$u(t) = u(0) + tu'(0) - \int_0^t (t-s)\,h(s)\,ds. \tag{3.2}$$

Согласно граничным условиям (3.1), мы имеем

$$u(0) = \gamma u(0) + \gamma\eta u'(0) - \gamma \int_0^\eta (\eta - s)\,h(s)\,ds$$

и

$$u'(1) = u'(0) - \int_0^1 h(s)\,ds.$$

Таким образом,

$$(1-\gamma)\,u(0) = \gamma\eta u'(0) - \gamma \int_0^\eta (\eta - s)\,h(s)\,ds$$

и

$$u'(0) = \int_0^1 h(s)\,ds.$$

Поэтому

$$u(0) = \frac{\eta\gamma}{1-\gamma}\int_0^1 h(s)\,ds - \frac{\gamma}{1-\gamma}\int_0^\eta (\eta-s)\,h(s)\,ds.$$

Заменив эти выражения в (3.2), получим

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{\eta\gamma}{1-\gamma}\int_0^1 h(s)\,ds - \frac{\gamma}{1-\gamma}\int_0^\eta (\eta-s)\,h(s)\,ds + t\int_0^1 h(s)\,ds - \int_0^t (t-s)\,h(s)\,ds \\ &= \left(t + \frac{\eta\gamma}{1-\gamma}\right)\int_0^1 h(s)\,ds - \frac{\gamma}{1-\gamma}\int_0^\eta (\eta-s)\,h(s)\,ds - \int_0^t (t-s)\,h(s)\,ds. \end{aligned}$$

Чтобы преобразовать задачу (3.1) в задачу с неподвижной точкой, определим оператор $T\colon C([0,1],\mathbb{R}) \to C([0,1],\mathbb{R})$ следующим образом:

$$(Tu)(t) = \left(t + \frac{\eta\gamma}{1-\gamma}\right)\int_0^1 h(u)\,ds - \frac{\gamma}{1-\gamma}\int_0^\eta (\eta-s)\,h(u)\,ds - \int_0^t (t-s)\,h(u)\,ds.$$

Покажем, что T — компактный оператор.

Шаг 1. T является непрерывным.

Пусть (u_n) — последовательность такая, что $u_n \to u$ в $C([0,1],\mathbb{R})$. Тогда

$$
\begin{aligned}
|T(u_n)(t) - (Tu)(t)| \le \left(t + \frac{\eta\gamma}{1-\gamma}\right) \int\limits_0^1 |h(u_n) - h(u)|\, ds + \\
\frac{\gamma}{1-\gamma} \int\limits_0^\eta (\eta - s)\, |h(u_n) - h(u)|\, ds + \int\limits_0^t (t-s)\, |h(u_n) - h(u)|\, ds.
\end{aligned}
$$

Поскольку h непрерывно, мы имеем

$$
\|T(u_n)(t) - (Tu)(t)\| \to 0, \quad n \to \infty.
$$

Шаг 2. T ограничено в ограниченных множествах $C([0,1],\mathbb{R})$.

Действительно, достаточно показать, что существует положительная постоянная c такая, что для каждого $g \in T(u)$, $u \in B_r = \{u \in C([0,1],\mathbb{R})\colon \|u\| \le r\}$ имеем $\|g\| \le c$. С использованием (H_2), мы имеем для каждого $t \in [0,1]$

$$
|g(t)| \le \left(2 + \frac{\eta\gamma}{1-\gamma}\right) \int\limits_0^1 m(s)\, ds + \frac{\eta\gamma}{1-\gamma} \int\limits_0^\eta m(s)\, ds = c.
$$

Тогда $|g| \le c$.

Шаг 3. T преобразует ограниченные множества $C([0,1],\mathbb{R})$ в равностепенно непрерывные множества.

Пусть $t_1,\, t_2 \in [0,1]$, $t_1 < t_2$, и пусть B_r — ограниченное множество $C([0,1],\mathbb{R})$. Тогда мы получим

$$
\begin{aligned}
|g(t_2) - g(t_1)| &\le (t_2 - t_1) \int\limits_0^1 |h(u)|\, ds + \int\limits_{t_1}^{t_2} |t_2 - s|\, |h(u)|\, ds + \int\limits_0^{t_1} |t_1 - t_2|\, |h(u)|\, ds \\
&\le (t_2 - t_1) \int\limits_0^1 m(s)\, ds + \int\limits_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)\, m(s)\, ds + \int\limits_0^{t_1} |t_1 - t_2|\, m(s)\, ds.
\end{aligned}
$$

При $t_2 \to t_1$ правая часть неравенства стремится к нулю.

Как следствие использования шагов 1–3 и теоремы Арцела–Асколи мы можем заключить, что T вполне непрерывно.

Шаг 4. Множество $\Omega = \{u \in C([0,1],\mathbb{R})\colon \lambda u = T(u)$ для некоторого $\lambda > 1\}$, ограничено.

Пусть $u \in \Omega$. Тогда $\lambda u = T(u)$ для некоторого $\lambda > 1$ и

$$
u(t) = \frac{1}{\lambda}\left(t + \frac{\eta\gamma}{1-\gamma}\right) \int\limits_0^1 h(u)\, ds - \frac{\gamma}{\lambda(1-\gamma)} \int\limits_0^\eta (\eta - s)\, h(u)\, ds - \frac{1}{\lambda} \int\limits_0^t (t-s)\, h(u)\, ds.
$$

Это означает, согласно (H_2), что для каждого $t \in [0,1]$ мы имеем

$$
|u(t)| \le \left(t + \frac{\eta\gamma}{1-\gamma}\right) \int\limits_0^1 m(s)\, ds + \frac{\gamma}{(1-\gamma)} \int\limits_0^\eta (\eta - s)\, m(s)\, ds + \int\limits_0^t (t-s)\, m(s)\, ds.
$$

Таким образом,

$$|u| \leq \left(1+\frac{\eta\gamma}{1-\gamma}\right)\int\limits_0^1 m(s)\,ds+\frac{\gamma}{(1-\gamma)}\int\limits_0^\eta (\eta-s)\,m(s)\,ds+\int\limits_0^1 (1-s)\,m(s)\,ds \leq K.$$

Это показывает, что Ω ограничено.

Как следствие теоремы Шефера, мы получим, что T имеет неподвижную точку, которая является решением задачи (3.1) и, следовательно, задачи (1.1), (1.2). □

Докажем существование решений задачи (1.1), (1.2) с невыпуклой правой частью, используя теорему о неподвижной точке для многозначного отображения, полученную Ковитцем и Надлером [12].

Теорема 3.2. *Предположим, что*

(H_3) $F(\cdot,u)\colon[0,1]\times\mathbb{R}\to P_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R})$ *такое, что* $F(\cdot,u)\colon[0,1]\times\mathbb{R}\to P_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R})$ *измеримо для каждого* $t\in[0,1]$.

(H_4) $H_d(F(t,u),F(t,\overline{u}))\leq p(t)\,|u-\overline{u}|$ *почти для всех* $t\in[0,1]$, $u\in\mathbb{R}$, $\overline{u}\in\mathbb{R}$ *при* $p\in L^1([0,1],\mathbb{R}^+)$ *и* $d(0,F(t,0))\leq p(t)$ *почти для всех* $t\in[0,1]$.

Тогда задача (1.1), (1.2) *имеет хотя бы одно решение на* $[0,1]$, *если*

$$\left(2+\frac{\gamma(\eta+1)}{1-\gamma}\right)\|p\|_{L^1}<1.$$

Доказательство. Для каждого $u\in C([0,1],\mathbb{R})$, определим множество селекций F следующим образом:

$$S_{F,u}=\left\{w\in L^1([0,1],\mathbb{R})\colon w\in F(t,u(t))\ \text{для п. в.}\ t\in[0,1]\right\}$$

и многозначный оператор $\Omega\colon C([0,1],\mathbb{R})\to P_{\mathrm{cl}}(C[0,1],\mathbb{R})$ следующим образом:

$$\Omega(u)=\left\{g\in C([0,1],\mathbb{R})\colon g(t)=\left(t+\frac{\eta\gamma}{1-\gamma}\right)\int\limits_0^1 f(s)\,ds-\right.$$
$$\left.\frac{\gamma}{1-\gamma}\int\limits_0^\eta(\eta-s)\,f(s)\,ds-\int\limits_0^t(t-s)\,f(s)\,ds,\ t\in[0,1],\ \text{и для}\ f\in S_{F,u}\right\}.$$

Отметим, что согласно предположению (H_3), поскольку многозначное отображение $F(\cdot,u)$ является измеримым, оно допускает измеримую селекцию $f:[0,1]\to\mathbb{R}$. Кроме того, согласно предположению (H_4)

$$|f(t)|\leq p(t)+p(t)\,|u(t)|,$$

т. е. $f(\cdot)\in L^1([0,1],\mathbb{R})$. Поэтому множество $S_{F,u}$ является непустым для каждого $u\in C([0,1],\mathbb{R})$. Также обратите внимание, что, поскольку $S_{F,u}\neq\phi$, $\Omega(u)\neq\phi$ для любого $u\in C([0,1],\mathbb{R})$ (см. [10], теорему III.6).

Теперь покажем, что оператор Ω удовлетворяет предположениям леммы 2.2. Чтобы показать, что $\Omega(u)\in P_{\mathrm{cl}}(C([0,1],\mathbb{R}))$, для каждого $u\in C([0,1],\mathbb{R})$, пусть $(v_n)_{n\geq0}\in\Omega(u)$ будет таким, что $v_n\to v$ при $n\to\infty$ в $C([0,1],\mathbb{R})$. Тогда $v\in C([0,1],\mathbb{R})$ и существует $w_n\in S_{F,u}$ такое, что для каждого $t\in[0,1]$ мы имеем

$$v_n(t) = \left(t + \frac{\eta\gamma}{1-\gamma}\right) \int\limits_0^1 w_n(s)\, ds - \frac{\gamma}{1-\gamma} \int\limits_0^\eta (\eta - s)\, w_n(s)\, ds - \int\limits_0^t (t-s)\, w_n(s)\, ds.$$

Поскольку F имеет компактные значения, перейдем к подпоследовательности и получим, что w_n сходится к w в $L^1([0,1],\mathbb{R})$. Таким образом, $w \in S_{F,u}$ и для каждого $t \in [0,1]$ мы имеем

$$v_n(t) \to v(t) = \left(t + \frac{\eta\gamma}{1-\gamma}\right) \int\limits_0^1 w(s)\, ds - \frac{\gamma}{1-\gamma} \int\limits_0^\eta (\eta - s)\, w(s)\, ds - \int\limits_0^t (t-s)\, w(s)\, ds.$$

Следовательно, $v \in \Omega(u)$.

Теперь покажем, что существует $\rho < 1$, такое что

$$H_d(\Omega u, \Omega \overline{u}) \le \rho \|u - \overline{u}\|,$$

для каждого u, $\overline{u} \in C([0,1],\mathbb{R})$.

Пусть u, $\overline{u} \in C([0,1],\mathbb{R})$ и $g_1 \in \Omega(u)$. Тогда существует $v_1(t) \in S_{F,u}$, такое что для каждого $t \in [0,1]$,

$$g_1(t) = \left(t + \frac{\eta\gamma}{1-\gamma}\right) \int\limits_0^1 v_1(s)\, ds - \frac{\gamma}{1-\gamma} \int\limits_0^\eta (\eta - s)\, v_1(s)\, ds - \int\limits_0^t (t-s)\, v_1(s)\, ds.$$

С использованием (H_4) мы имеем

$$H_d(F(t,u), F(t,\overline{u})) \le p(t)\, |u(t) - \overline{u}(t)|\,.$$

Таким образом, существует $w \in S_{F,\overline{u}}$ такое что

$$|v_1 - w| \le p(t)\, |u - \overline{u}| \quad \text{для п. в. } t \in [0,1].$$

Определим $U : [0,1] \to P(\mathbb{R})$ следующим образом:

$$U(t) = \{w \in \mathbb{R}\colon |v_1 - w| \le p(t)\, |u(t) - \overline{u}(t)|\}\,.$$

Поскольку многозначный оператор $V(t) = U(t) \cap F(t, \overline{u}(t))$ является измеримым (см. [10], утверждение III.4), существует функция $v_2(t)$ которая является измеримой селекцией для V. Таким образом, $v_2(t) \in S_{F,\overline{u}}$ и для каждого $t \in [0,1]$ мы имеем

$$|v_1(t) - v_2(t)| \le p(t)\, |u(t) - \overline{u}(t)|\,.$$

Для каждого $t \in [0,1]$, определим

$$g_2(t) = \left(t + \frac{\eta\gamma}{1-\gamma}\right) \int\limits_0^1 v_2(s)\, ds - \frac{\gamma}{1-\gamma} \int\limits_0^\eta (\eta - s)\, v_2(s)\, ds - \int\limits_0^t (t-s)\, v_2(s)\, ds,$$

и

$$g_1(t) = \left(t + \frac{\eta\gamma}{1-\gamma}\right) \int\limits_0^1 v_1(s)\, ds - \frac{\gamma}{1-\gamma} \int\limits_0^\eta (\eta - s)\, v_1(s)\, ds - \int\limits_0^t (t-s)\, v_1(s)\, ds.$$

Таким образом,

$$|g_2(t)-g_1(t)| \leq \left(t+\frac{\eta\gamma}{1-\gamma}\right)\int\limits_0^1 |v_2(s)-v_1(s)|\,ds +$$
$$\frac{\gamma}{1-\gamma}\int\limits_0^\eta (\eta-s)\,|v_2(s)-v_1(s)|\,ds + \int\limits_0^t (t-s)\,|v_2(s)-v_1(s)|\,ds$$
$$\leq \left(2+\frac{\gamma(\eta+1)}{1-\gamma}\right)\int\limits_0^1 p(s)\,|u(s)-\overline{u}(s)|\,ds.$$

Следовательно,

$$\|g_2-g_1\| \leq \left(2+\frac{\gamma(\eta+1)}{1-\gamma}\right)\|p\|_{L^1}\|u(s)-\overline{u}(s)\|.$$

Аналогичным образом, меняя роли u и $\overline{u}$, мы получим

$$H_d(\Omega(u),\Omega(\overline{u})) \leq \rho\|u-\overline{u}\| \leq \left(2+\frac{\gamma(\eta+1)}{1-\gamma}\right)\|p\|_{L^1}\|u(s)-\overline{u}(s)\|.$$

Поскольку Ω является сжатием, из леммы 2.2 следует, что Ω имеет неподвижную точку u, что является решением задачи (1.1), (1.2). Это завершает доказательство.

Пример 3.1. Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} u''(t) \in F(t,u(t)), & t\in[0,1], \\ u(0)=\dfrac{1}{2}u\left(\dfrac{1}{4}\right), & u'(1)=0, \end{cases} \tag{3.3}$$

здесь $\eta=\frac{1}{4}$, $\gamma=\frac{1}{2}$ и $F(t,u)\colon[0,1]\times\mathbb{R}\to P(\mathbb{R})$ — многозначное отображение, заданное $u\longmapsto F(t,u)=\left(0,\left(\frac{3}{3+t^2}\right)\left(\frac{|u|}{1+(u)}\right)\right)$, $u\in\mathbb{R}$, что удостоверяет (H_1).

Очевидно, для $f\in F$ мы имеем

$$|f| \leq \frac{3}{3+t^2}.$$

Таким образом,

$$\|F(t,u)\| = \sup\{\|f\|\colon f\in F(t,u)\} \leq \frac{3}{3+t^2},\ u\in\mathbb{R},$$

где $m(t)=\frac{3}{3+t^2}$ и $\|m\|_{L^1}=\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$.

Следовательно, выполнены все условия теоремы 3.1. Мы можем заключить, что существует по крайней мере одно решение задачи (3.3).

Литература

1. **Ashyralyev A., Yildirim O.** On multipoint nonlocal boundary value problems for hyperbolic differential and difference equations // Taiwanese Journal of Mathematics. — 2010. — Vol. 14. — P. 165–194.

2. **Ashyralyev A., Ozturk E.** On Bitsadze–Samarskii type nonlocal boundary value problems for elliptic differential and difference equations: Well-posedness // Applied Mathematics and Computation. — 2012. — Vol. 219. — P. 1093–1107.
3. **Aubin J.P. and Cellina A.** Differential Inclusions. — Springer-Verlag, 2012.
4. **Bitsadze A.V. and Samarskii A.A.** On some simple generalizations of linear elliptic boundary problems // Dokl. Akad. Nauk SSSR. — 1969. — Vol. 185, № 4. — P. 739–740.
5. **Bressan A. and Colombo G.** Extensions and selections of maps with decomposable values // Studia Mathematica. — 1988. — Vol. 90, № 1. — P. 69–86.
6. **Bressan A.** Hyperbolic Systems of Conservation Laws. The One-Dimensional Cauchy Problem. — London: Oxford University Press, 2000.
7. **Bouteraa N. and Benaicha S.** Triple positive solutions of higher-order nonlinear boundary value problems // J. Comput. Sci. Comp. Math. — 2017. — Vol. 7, № 2. — P. 25–31.
8. **Bouteraa N. and Benaicha S.** Existence of solution for third-order three-point boundary value problem // Mathematica. — 2018. — Vol. 60(83), № 1. — P. 21–31.
9. **Bouteraa N. and Benaicha S.** Existence of solutions for nonlocal boundary value problem for Caputo nonlinear fractional differential inclusion // J. of Mathematical Sciences and Modelling. — 2018. — Vol. 1, № 1. — P. 45–55.
10. **Bouteraa N. and Benaicha S.** Positive periodic solutions for a class of fourth-order nonlinear differential equations // Numerical Analysis and Applications. — 2019. — Vol. 12, № 1. — P. 1–14.
11. **Bouteraa N. and Benaicha S.** Existence results for fractional differential inclusion with nonlocal boundary conditions // Rivista di Matematica della Universita di Parma. — (To appear).
12. **Covitz H. and Nadler S.B.** Multi-valued contraction mappings in generalized metric spaces // Israel J. Math. — 1970. — Vol. 8. — P. 5–11.
13. **Castaing C. and Valadier M.** Convex Analysis and Measurable Multifunctions. — Berlin: Springer, 1977. — (Lecture Notes in Mathematics).
14. **Deimling K.** Multivalued Differential Equations. — Berlin–New–York: Walter De Gruyter, 1982.
15. **Frigon M. and Granas A.** Theoremes d'existence pour des inclusions differentielles sans convexit // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1990. — Ser. I, № 310. — P. 819–822.
16. **Gorniewicz L.** Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999; Vol. 495: Mathematics and Its Applications.
17. **Hu S. and Papageorgiou N.** Handbook of Multivalued Analysis, Volume I: Theory. — Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1977.
18. **Il'in V.A. and Moiseev E.I.** Second kind nonlocal boundary value problem for Sturm-Liouville operator in differential and difference treatement // Differential Equations. — 1987. — Vol. 23, № 7. — P. 1198–1207.
19. **Il'in V.A. and Moiseev E.I.** An a priori estimate for the solution of a problem associated with a nonlocal boundary value problem of the first kind // Differential Equations. — 1988. — Vol. 24, № 5. — P. 519–526.
20. **Kisielewicz M.** Differential Inclusions and Optimal Control. — Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991; Vol. 44: Mathematics and its Applications (East European Series).
21. **von Mises R.** Beitrag zum Oszillationsproblem / Festschrift H. Weber. — Leipzig und Berlin, 1912, 252–282.
22. **Picone M.** Sui valori eccezionali di un parametro da cui dipende un'equzione differenziale lineare del second'ordine // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. — 1910. — Vol. 11. — P. 1–14.
23. **Rezaiguia A. and Kelaiaia S.** Existence results for third-order differential inclusion with three-point boundary value problems // Acta Math. Univ. Comenianae. — 2016. — Vol. 2. — P. 311–318.

24. **Sommerfeld A.** Ein Beitrag zur hydrodynamishen Erklaerung der turbulenten Fluessigkeitsbewegungen // Proc. of the 4th International Congress of Mathematicians. — Vol. III. — P. 116–124.

25. **Smart D.R.** Fixed Point Theorems. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1977.

Поступила в редакцию 11 марта 2019 г.
После исправления 19 ноября 2019 г.
Принята к печати 21 октября 2020 г.