УДК 539.3

О ВТОРИЧНОЙ ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЭЙЛЕРОВА СТЕРЖНЯ

В. В. Кузнецов, С. В. Левяков

Сибирский научно-исследовательский институт авиации им. С. А. Чаплыгина,
630051 Новосибирск

Рассмотрено решение классической задачи о закритическом поведении сжатого шарнирно опертого стержня. Проанализирована устойчивость известного решения об эластике стержня, ответвляющегося от первой критической точки, и обнаружены неизвестные ранее ветви равновесных состояний. Определено значение силы, при которой происходит вторичная потеря устойчивости.

Существующее решение Лагранжа задачи о закритическом поведении эйлерова стержня в эллиптических интегралах до последнего времени считалось полным [1–3] и использовалось как эталон при тестировании численных методов решения нелинейных задач для тонкостенных конструкций. В [4] с помощью конечно-элементной оболочечной модели с учетом больших перемещений и поворотов обнаружено, что при отказе от условия симметрии в закритическом деформировании происходит вторичная бифуркация решения и в диапазоне нагрузок $2P_{cr} < P < 7P_{cr}$ (P_{cr} — эйлерово значение критической силы) появляется несимметричная ветвь деформирования, которая при дальнейшем возрастании осевой силы исчезает.

На рис. 1, 2 приведено решение обсуждаемой задачи, полученное авторами данной статьи с помощью численного алгоритма построения многозначных нелинейных решений задач изгиба стержней при наличии многих бифуркационных и предельных точек [5]. Здесь W, U — прогиб в середине стержня и продольное перемещение одного конца стержня (второй конец неподвижен), L — длина стержня. Сплошными линиями показаны устойчивые состояния, штриховыми — неустойчивые. По существу, приведены две проекции кривых

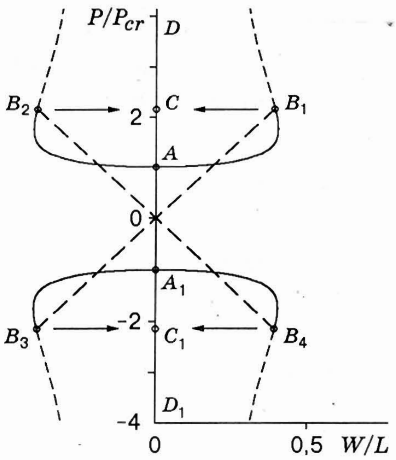

Рис. 1

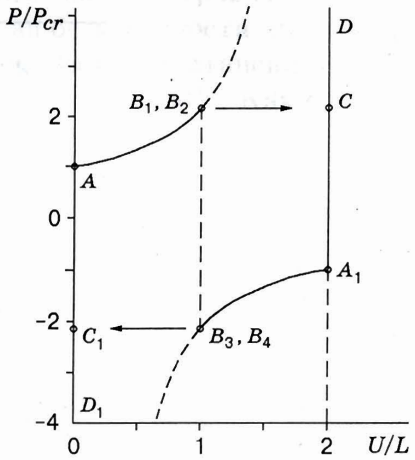

Рис. 2

деформирования в $(N+1)$-мерном пространстве [5] на плоскости (P, W) (рис. 1), (P, U) (рис. 2) как при положительном, так и при отрицательном значении силы. Как показали численные исследования, разбиение стержня на 28 конечных элементов является достаточным для получения нелинейных решений с высокой точностью в широком диапазоне искривлений стержня.

С помощью критерия Сильвестра проверено, что решение Лагранжа (участки кривой AB_1 (AB_2) и ее непрерывное продолжение на рис. 1, 2) устойчиво только до точки B_1 (B_2), где $P = 2{,}18P_{cr}$. От точки B_1 (B_2) отходит новая ветвь неустойчивых равновесных состояний B_1B_3 (B_2B_4), когда обе шарнирные опоры совмещаются и стержень получает возможность вращаться как твердое тело. Отметим, что ветви B_1B_3 и B_2B_4 являются замкнутыми, не пересекающимися между собой кривыми в $(N+1)$-мерном пространстве. Значение силы, при которой концы нерастяжимого стержня совмещаются, согласно решению Лагранжа определяется соотношениями

$$2E(\pi/2, k) - F(\pi/2, k) = 0, \qquad P = (4/\pi^2)F^2(\pi/2, k)P_{cr},$$

откуда следует $k = 0{,}908\,91$, $P = 2{,}183\,38P_{cr}$. Здесь $F(\pi/2, k)$, $E(\pi/2, k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода; k — дополнительный модуль эллиптического интеграла [6]. Решения B_1B_3 (B_2B_4) существуют при $-2{,}18P_{cr} < P < 2{,}18P_{cr}$. В диапазоне $2P_{cr} < P < 10P_{cr}$ других кривых равновесия, ответвляющихся от решения Лагранжа, не обнаружено. Таким образом, как серия устойчивых равновесных состояний при возрастании нагрузки реализуются кривые $0A$, AB_1 (AB_2) с последующим перескоком на участок CD, где стержень вновь прямолинеен, но подвижная опора находится по другую сторону от неподвижной по сравнению с первоначальным положением стержня.

Результаты проведенных качественных экспериментов на тонкой целлулоидной модели показали, что состояния равновесия, соответствующие ветви AB_1 (AB_2) после точки B_1 (B_2) (петлеобразные формы), невозможно получить без дополнительных ограничений на перемещения стержня, что подтверждает их неустойчивость.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Попов Е. П.** Теория и расчет гибких упругих стержней. М.: Наука, 1986.
2. **Вольмир А. С.** Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967.
3. **Шилькрут Д. И., Вырлан П. М.** Устойчивость нелинейных оболочек. Кишинев: Штиинца, 1977.
4. **Коробейников С. Н.** Вторичная потеря устойчивости сжатого шарнирно опертого стержня // Тез. докл. IV Междунар. конф. «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике». Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО РАН, 1995. С. 104.
5. **Кузнецов В. В., Левяков С. В.** Многократное ветвление решений в теории кинематических групп // Докл. РАН. 1997. Т. 356, № 6. С. 772–774.
6. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике. М.: Наука, 1974.

Поступила в редакцию 10/VI 1998 г.