

т. е. значения скорости сдвига и касательного напряжения при подходе к вершине клина зависят от направления подхода.

Граничные условия для функции u запишем в виде

$$u = 0 \text{ при } \varphi = 0, \quad u = u_0 \text{ при } \varphi = \omega \quad (2.4)$$

При $P(r, \varphi) = 0$ из (2.3) и (2.4) получаем

$$u = \varphi u_0 / \omega \quad (2.5)$$

т. е. частицы среды, находящиеся на луче, проведенном из вершины клина, движутся с равными скоростями.

Для заданной зависимости $P(r, \varphi)$ из (2.3) и (2.4) находится зависимость $u = u(\varphi)$. Подсчитаем усилие T , приложенное к части грани клина $[0, r]$

$$T = \int_0^r \tau dr = kr - u' \int_{\gamma}^{\infty} \frac{F(\gamma)}{\gamma^2} d\gamma \quad (2.6)$$

Так как усилие T — конечная величина, то интеграл (2.6) накладывает ограничение на выбор зависимости $F(\gamma)$. Таким образом, в местах, где γ велико, зависимость $F(\gamma)$ должна быть такой, чтобы усилие T было конечной величиной.

Если принять $F(\gamma) = \eta\gamma^m$, то нетрудно видеть из (2.6), что необходимо выполнение неравенства $m = 1$, т. е. в местах, где γ неограниченно возрастает, вязкость не может быть линейной.

Поступила 27 III 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Oldrout J. G. Rectilinear plastic flow of a Bingham Solid. Proc., Cambridge Philos. Soc., 1948, vol. 44 p. 2.
2. Нейбер Г. Теория концентрации напряжений в призматических стержнях, работающих в условиях сдвига, для любого нелинейного закона, связывающего напряжения и деформации. Механика и обз. ин. период. лит. Сб. перев., 1961, № 4.
3. Знаменский В. А., Ивлев Д. Д. Об уравнениях вязко-пластического тела при кусочно-линейных потенциалах. Изв. АН СССР, 1963, № 6.
4. Мясников В. П. Некоторые точные решения для прямолинейных движений вязко-пластической среды. ПМТФ, 1961, № 2.
5. Мирзаджанзаде А. Х. Некоторые вопросы вязко-пластических жидкостей в применении к нефтедобыче. Изд. Азнефть, Баку, 1959.

РЕЛАКСАЦИЯ ТРУБ И ВЫПУЧИВАНИЕ СТЕРЖНЕЙ ИЗ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

А. М. Локощенко, С. А. Шестериков

(Москва)

Исследуется поведение двух элементов конструкций из нелинейно-вязкого идеально-пластического материала.

Впервые эта схема была предложена Одквистом [1] и использована В. И. Розенблюмом [2]. Модель Одквиста нашла хорошее экспериментальное подтверждение в работе Гарднера и Миллера [3], которые явно наблюдали предел текучести (до определенного уровня напряжений имеется нелинейная зависимость между напряжениями и скоростями установившейся ползучести, а при достижении критического напряжения («предел ползучести») наблюдается течение при произвольных скоростях деформации).

В ряде случаев пренебрежение упругими деформациями приводит к слишком грубой оценке реального поведения элементов конструкций. Так, исследование процесса релаксации напряжений обязательно требует учета мгновенной упругости.

В первой части решается задача о релаксации напряжений в посаженной на жесткий вал трубе, материал которой подчиняется следующим условиям (фиг. 1, а, б). Всюду, где не достигнут предел текучести, имеют место упругие деформации; кроме того, при напряжениях, больших некоторого значения, развиваются деформации ползучести (установившейся или не установившейся ограниченной). Предел текучести — максимально допустимое для материала напряжение; в областях, где достигнут предел текучести, деформациями упругости и ползучести можно пренебречь по сравнению с пластическими деформациями.

Во второй части исследуется процесс выпучивания стержней в условиях нелинейной ползучести.

В отличие от известных работ [4-6], в которых исследуется стержень с идеализированным сечением, здесь рассматривается сплошной стержень и учитывается переменность напряжений по сечению. В отличие от первой части здесь для напряжений, меньших σ_s , принимаются соотношения установившейся ползучести без учета мгновенных упругих деформаций — фактически здесь принята модель жесткой идеально-пластической среды при мгновенном деформировании с учетом нелинейной вязкости.

§ 1. Напряженное и деформированное состояние в трубе под давлением в начальный момент. Рассмотрим несжимаемую трубу кругового цилиндрического сечения из упруго-идеально-пластического материала в условиях плоской деформации. Ее безразмерные радиусы: внутренний — a , внешний — 1 .

При равномерном внутреннем давлении p в упругом состоянии составляющие напряжений имеют вид [7]

$$\sigma_r = -p^* \left(\frac{1}{r^2} - 1 \right), \quad \sigma_\theta = p^* \left(\frac{1}{r^2} + 1 \right), \quad \sigma_z = \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2}$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = \tau_{zr} = 0, \quad p^* = \frac{pa^2}{(1-a^2)} \quad (1.1)$$

Интенсивность напряжений равна

$$\sigma_i = \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{2} = \frac{p^*}{r^2} \quad (1.2)$$

Для несжимаемой трубы зависимость радиального перемещения от радиуса $u(r)$ имеет вид

$$u(r) = 1.5 p^* E^{-1} r^{-1}$$

где E — модуль упругости материала. Согласно (1.2), интенсивность напряжений достигает максимального значения на внутренней поверхности трубы. Если σ_i такова, что $\sigma_i = q$ при $r = a$, где q — предельное значение σ_i , то на внутренней поверхности появляется пластическая зона. Безразмерный радиус поверхности раздела между упругой и пластической зонами обозначим c .

В пластической зоне

$$\sigma_r = -p + 2q \ln \frac{r}{a}, \quad \sigma_\theta = -p + 2q \left(1 + \ln \frac{r}{a} \right), \quad \sigma_i = q \quad (a \leq r \leq c) \quad (1.3)$$

В упругой зоне

$$\sigma_r = -qc^2 (r^{-2} - 1), \quad \sigma_\theta = qc^2 (r^{-2} + 1), \quad \sigma_i = qc^2 r^{-2} \quad (c \leq r \leq 1) \quad (1.4)$$

Радиус раздела между зонами связан с внутренним давлением зависимостью

$$0,5 \frac{p}{q} = \ln \left(\frac{c}{a} \right) + 0,5 (1 - c^2)$$

Радиальные перемещения $u(r)$ трубы в упруго-пластическом состоянии зависят от r следующим образом:

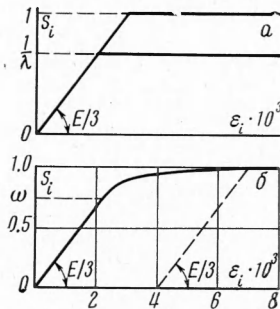
$$u(r) = 1,5 qc^2 E^{-1} r^{-1}$$

§ 2. Решение задачи по схеме, учитывающей установившуюся ползучесть. Эта схема пытается объяснить процессы в трубе после динамической насадки ее на жесткий вал. Известно, что у диаграмм простого растяжения (или чистого кручения) при различных скоростях деформирования модуль Юнга (соответственно модуль сдвига) неизменен, в то время как предел текучести с возрастанием скорости деформирования повышается. Насадка трубы производится в холодном состоянии с такой скоростью, что предел текучести на сдвиг повышается от статического значения k до динамического q : $q/k = \lambda > 1$. Введем безразмерные напряжения $s = \sigma/q$. Если всюду $s_i \leq 1/\lambda$ при $a \leq r \leq 1$, то труба остается упругой. Этот случай не представляет интереса, поэтому в дальнейшем всюду будем считать, что напряженное состояние в начальный момент таково, что на внутренней части трубы или во всей трубе $s_i > 1/\lambda$. В этой области развивается установившаяся ползучесть в соответствии со степенным законом ползучести

$$(\dot{\epsilon}_i^c)' = Bq^n (s_i - 1/\lambda)^n$$

Здесь $(\dot{\epsilon}_i^c)'$ — интенсивность скоростей ползучести, B и n — константы, характеризующие процесс ползучести. При $t \rightarrow \infty$ (t — время) материал становится упруго-идеально-пластическим со статическим пределом текучести $s_i = 1/\lambda$ (фиг. 1, а).

Внутреннее давление p_0 сообщает в начальный момент внутреннему контуру трубы перемещение $u(a) = 1,5 p^* E^{-1}$, если вся труба находится в упругом состоянии, или $u(a) = 1,5 qc^2 E^{-1} a^{-1}$, если внутренняя часть $a \leq r \leq c$ находится в состоянии иде-



Фиг. 1

альной пластичности $s_i = 1$. По постановке задачи, $u(a)$ со временем не меняется. Из условий плоской деформации и несжимаемости следует, что $u(r)$ также постоянно во времени.

Рассмотрим ту часть трубы $a \leq r \leq d \leq 1$ (или всю трубу), в которой в начальный момент времени $s_i > 1/\lambda$. Связь между интенсивностями напряжений и скоростей деформаций

$$\dot{\epsilon}_i = \frac{3q}{E} s_i + Bq^n \left(s_i - \frac{1}{\lambda} \right)^n \tag{2.1}$$

и условие $\partial u / \partial t = 0$ дают дифференциальное уравнение относительно s_i

$$\frac{3}{E} s_i + Bq^{n-1} \left(s_i - \frac{1}{\lambda} \right)^n = 0$$

Интегрируя, получаем

$$s_i(r, t) = \frac{1}{\lambda} \left\{ 1 + (\lambda s_{i0} - 1) \left[1 + \frac{BEq^{n-1} (s_{i0} - 1/\lambda)^{n-1}}{3(n-1)} t \right]^{-\frac{1}{n-1}} \right\} \tag{2.2}$$

Функция $s_{i0} = s_{i0}(r)$ — распределение s_i при $t = 0$ — определяется по формулам (1.1) или (1.3) — (1.4). Формула (2.2) определяет $s_i(r, t)$ в любой точке трубы в любой момент времени. После этого можно определить $s_r(r, t)$ по формуле

$$s_r(r, t) = \int_1^r \frac{2s_i(r, t)}{r} dr \tag{2.3}$$

являющейся следствием уравнения равновесия, а затем $s_\theta(r, t)$ — согласно (1.2). Компоненты напряжений при $t \rightarrow \infty$ обозначим $s_{i\infty}, s_{r\infty}, s_{\theta\infty}$.

Определим относительное уменьшение давления $\Delta = (p_0 - p_\infty)/p_0$ при упругом и упруго-пластическом распределении s_{i0} . Следует рассмотреть четыре случая.

При $s_{i0} < 1$ два случая

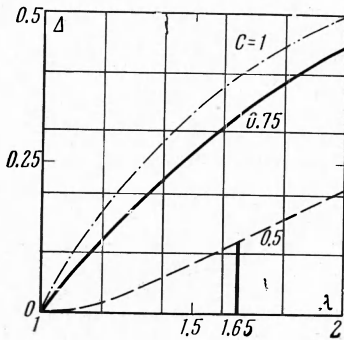
$$\Delta = 1 - \frac{k}{p_0} \left[1 + \ln \frac{p_0^*}{ka^2} - \frac{p_0^*}{k} \right] \quad (ka^2 \leq p_0^* \leq k)$$

$$\Delta = 1 - \frac{2k}{p_0} \ln \frac{1}{a} \quad (k \leq p_0^* \leq ka^2\lambda)$$

При $s_{i0}(r) = \begin{cases} 1 & (a \leq r \leq c) \\ c^2/r^2 & (c \leq r \leq 1) \end{cases}$ два случая:

$$\Delta = \frac{(\lambda - 1) [1 + 2 \ln(c/a)] - \ln \lambda}{\lambda [2 \ln(c/a) + 1 - c^2]} \quad (a \leq c \leq \lambda^{-0.5})$$

$$\Delta = 1 - \frac{2 \ln(1/a)}{[2 \ln(c/a) + 1 - c^2] \lambda} \quad (\lambda^{-0.5} \leq c \leq 1)$$



Фиг. 2

$s_{i\infty}(r), s_{r\infty}(r), s_{\theta\infty}(r)$ — штрих-пунктирными. При $c = 0.5, c = 0.75, c = 1$ соответственно имеем $\Delta = 8.4\%, 26.6\%, 33.4\%$.

§ 3. Решение задачи о релаксации трубы по схеме, учитывающей неустановившуюся ограниченную ползучесть. Рассмотрим насадку трубы на жесткий вал с такой скоростью деформирования, которой соответствует упруго-идеально-пластическая диаграмма $\sigma_i - \epsilon_i$ материала трубы с тем же предельным значением $\sigma_i = k$, что и у статической диаграммы $\sigma_i - \epsilon_i$. Будем здесь относить все напряжения к $k: s = \sigma/k$. Пусть статическая диаграмма (фиг. 1, б) при $0 \leq s_i \leq \omega < 1$ (где ω соответствует пределу упругости) совпадает с динамической, при $\omega < s_i < 1$ упругие деформации динамической диаграммы суммируются с деформациями неустановившейся ползучести, а при $s_i = 1$ материал идеально-пластичен. Так введенная статическая диаграмма согласуется с экспериментами над титаном, мягкой сталью и другими материалами.

Введем в рассмотрение следующее соотношение между интенсивностями напряжений, деформаций и их скоростей при $\omega < s_i < 1$:

$$\dot{\epsilon}_i = \frac{3ks_i}{E} + Bk^n (s_i - \omega)^n - A \left(\epsilon_i - \frac{3ks_i}{E} \right) \quad (3.1)$$

Здесь постоянные B и n характеризуют установившуюся ползучесть, а постоянная A — затухание ползучести. В начальный момент $t = 0$ из (3.1) следует

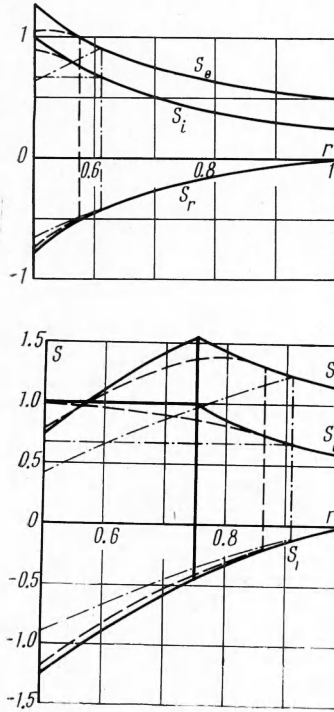
$$\epsilon_i = 3ks_i/E \quad (3.2)$$

что соответствует динамической диаграмме. Для получения статической диаграммы интегрируем (3.1) при условии $\dot{s}_i = 0$. Получаем

$$\epsilon_i(t) = \frac{3ks_i}{E} + \frac{Bk^n}{A} (s_i - \omega)^n (1 - e^{-At})$$

при $t \rightarrow \infty$

$$\epsilon_i = \frac{3ks_i}{E} + \frac{Bk^n}{A} (s_i - \omega)^n \quad (3.3)$$



Фиг. 3

При $s_i = \omega$ кривые (3.2) и (3.3) плавно переходят одна в другую. При $s_i = 1$ производная $ds_i/d\epsilon_i$ терпит разрыв, от него можно избавиться усложнением выражения (3.1).

Вернемся к задаче о релаксации несжимаемой трубы. Так же, как и в предыдущем параграфе, несжимаемость вызывает $\epsilon_i = \epsilon_{i0} = \text{const}$, $\dot{\epsilon}_i = 0$. Интегрируем (3.1) при этих условиях

$$t = \frac{3k}{E} \int_{s_{i0}}^{s_i} \frac{ds_i}{A(\epsilon_{i0} - 3ks_i/E) - Bk^n (s_i - \omega)^n} \quad (3.4)$$

Распределение $s_{i0}(r)$ определяется на основании формул (1.1) или (1.3), (1.4), в которых нужно заменить q на k .

Уравнение (3.4) дает распределение $s_i = s_i(r, t)$. После этого, согласно (2.3) и (1.2), можно найти напряжения $s_r(r, t)$ и $s_\theta(r, t)$ для любого момента времени. Так как уравнение (3.4) в общем случае до конца проинтегрировать не удастся, были проделаны вычисления для трубы $a = 1/2$, материал которой остается упругим при $0 \leq s_i \leq 0.75$. Были рассмотрены три различных значения c : 0.5, 0.75 и 1. Для примера, использованы следующие значения характеристик материала: $n = 5$, $E/k = 10^3$, $Bk^n = 0.032 \text{ час}^{-1}$. Постоянная A выбиралась такой, что кривая (3.3) пересекала прямую $s_i = 1$ в точке, соответствующей условному пределу текучести и определяемому при помощи $\epsilon_s = 0.2\%$, т. е. $\epsilon_{is} = 0.004$ (фиг. 1, б), $A = 0.0078 \text{ час}^{-1}$.

Распределения $s_{i0}(r)$, $s_{r0}(r)$, $s_{\theta0}(r)$ (фиг. 3, а, б, в), вычисленные для обеих схем, совпадают. Функции $s_{i\infty}(r)$, $s_{r\infty}(r)$, $s_{\theta\infty}(r)$ нанесены на фиг. 3, а, б, в, штриховой линией; относительное уменьшение давления трубы на вал $\Delta = (p_0 - p_\infty)/p_0$ составляет 0.57% при $c = 0.5$, $\Delta = 3.42\%$ при $c = 0.75$ и $\Delta = 3.69\%$ при $c = 1$.

§ 4. Выпучивание стержня. Рассмотрим задачу выпучивания стержня, имеющего начальное искривление, под действием осевой нагрузки. Примем для связи между напряжениями и деформациями соотношение вида $\sigma = D\varepsilon^m$. Рассмотрим стержень (фиг. 4) постоянного поперечного сечения, сжатый продольной силой P и имеющий начальное искривление $v_0(x)$. В процессе ползучести будет нарастать прогиб, и приращение прогиба обозначим через $v(x, t)$. Примем гипотезу плоских сечений, тогда, предполагая малость прогибов, можно записать

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (4.1)$$

где ε_0 — деформация оси стержня, z — координата по сечению стержня в плоскости изгиба. Уравнения равновесия для стержня можно записать в виде

$$P = \int_{-h}^h b \sigma dz, \quad -P(v + v_0) = \int_{-h}^h b \sigma z dz \quad (4.2)$$

где $2h$ — высота стержня.

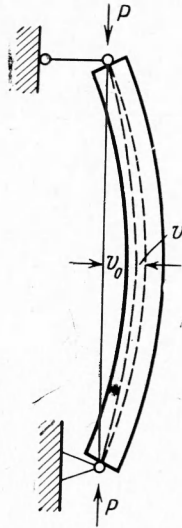
Исследуем поведение шарнирно опертого стержня. При этом предположим, что как начальный, так и дополнительный прогибы можно достаточно точно аппроксимировать одной полу-волной синусоиды

$$v_0 = a_0 \sin \frac{\pi x}{L}, \quad v = a \sin \frac{\pi x}{L} \quad (4.3)$$

Уравнениям (4.2) удовлетворим методом коллокации. Введем безразмерные параметры (b_0 — средняя толщина стержня)

$$\frac{b}{b_0} = b_1, \quad P_1 = \frac{P_0}{Db_0 h}, \quad \gamma = \frac{P}{2b_0 h \sigma_s}, \quad (4.4)$$

$$u = \frac{a}{h}, \quad \rho = \frac{\pi^2 h^2}{L^2}, \quad \xi = \frac{z}{h}$$



Фиг. 4

Используя зависимости (4.1) — (4.4) для случая, когда нет пластических областей по сечению стержня, получим

$$P_1 = \int_{-1}^1 b_1 (\varepsilon_0 - \rho u \xi)^m d\xi, \quad -P_1(u + u_0) = \int_{-1}^1 b_1 (\varepsilon_0 - \rho u \xi)^m \xi d\xi \quad (4.5)$$

Сделаем замену $\varepsilon_0 = k\rho u$, тогда систему (4.5) можно записать в виде

$$P_1 = (\rho u)^m I_0, \quad I_0(k) = \int_{-1}^1 b_1 (k - \xi)^m d\xi \quad (4.6)$$

$$-P_1(u + u_0) = (\rho u)^m I_1, \quad I_1(k) = \int_{-1}^1 b_1 (k - \xi)^{m+1} \xi d\xi$$

Из (4.6) легко получить одно уравнение для определения k как функции времени t

$$\rho \left(-\frac{I_1}{I_0} \right)_k k = \left(\frac{P_1}{I_0} \right)^{1/m} \quad (4.7)$$

Для стержня прямоугольного поперечного сечения ($b_1 = 1$), имеем

$$I_0 = \frac{(k+1)^{m+1} - (k-1)^{m+1}}{m+1}, \quad I_1 = \frac{k}{m+2} I_0 - \frac{(k+1)^{m+1} + (k-1)^{m+1}}{m+2}$$

Выведем граничные условия для k , определяемого из уравнения (4.7). При $t = 0$ имеем условие $u = 0$ и, следовательно, из (4.6) находим $I_0(k_0) u_0 = -I_1(k_0)$.

Условие появления пластичности на вогнутой стороне стержня дает соотношение для нахождения другой границы области изменения k , где верно уравнение (4.7).

Из условия $\sigma = \sigma_s$ при $\xi = -1$ получим

$$\sigma_s = A (\rho u)^m (k_1 + 1)^m \quad (4.8)$$

Исключая u из (4.6) и (4.8), найдем уравнение для определения k_1

$$AP_1(k_1 + 1)^m = \sigma_s I_0(k_1), \quad \text{или} \quad 2\gamma (k_1 + 1)^m = I_0(k_1) \quad (4.9)$$

При $\gamma < 1/r$ решение уравнения (4.9) с достаточной точностью можно представить в виде $k_1 = \gamma/(1 - m\gamma)$; при γ , близких к 1, $k_1 \approx \gamma m/(1 - \gamma)$.

