

УДК 539.3

ОБ ОТРЫВЕ БАЛКИ, ПРИКЛЕЕННОЙ К ЖЕСТКОЙ ПЛИТЕ

А. Е. Алексеев, А. Г. Демешкин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Рассмотрена контактная задача об отрыве упругой балки, приклеенной к жесткой плите. Предложена математическая модель и проведено сравнение теоретических и экспериментальных данных.

Ключевые слова: упругая балка, отрыв, контактная задача, плита, полиномы Лежандра.

Введение. В настоящей работе рассматривается контактная задача об отрыве упругой балки, приклеенной к жесткой плите.

Известны различные способы решения контактных задач упругих пластин и оболочек (см., например, [1–3]). Ниже используются уравнения упругого деформирования пластин и оболочек [4, 5], основанные на разложении искомых функций в ряды по полиномам Лежандра. Особенностью этого подхода является применение нескольких аппроксимаций для одних и тех же неизвестных функций. Допускается задание произвольных условий на лицевых поверхностях без понижения дифференциального порядка уравнений: напряжений, перемещений, смешанных условий, что позволяет корректно сформулировать условия сопряжения на границе зон отслоения и прилипания. Такие уравнения использовались, например, при решении плоской контактной задачи для упругого слоя [6].

Уравнения деформирования упругой балки. Рассматривается случай плоского напряженного состояния. Напряжения аппроксимируются отрезками рядов по полиномам Лежандра $P_k(\xi)$ ($\xi = y/h$):

$$\begin{aligned} 2h\sigma_x &= N + (3M/h)P_1(\xi), & \sigma_y &= p_0 + \Delta p P_1(\xi), \\ 2h\sigma_{xy} &= Q + 2h\Delta q P_1(\xi) + (2hq_0 - Q)P_2(\xi), \\ \Delta p &= 0,5(p^+ - p^-), & p_0 &= 0,5(p^+ + p^-), \\ \Delta q &= 0,5(q^+ - q^-), & q_0 &= 0,5(q^+ + q^-). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $N = \int_{-h}^h \sigma_x dy$ — усилие; $M = \int_{-h}^h \sigma_{xy} y dy$ — момент; $Q = \int_{-h}^h \sigma_{xy} dy$ — перерезывающая сила; p^\pm, q^\pm — нормальные и касательные напряжения на контактных плоскостях ($\xi = \pm 1$).

Перемещения и деформации аппроксимируются отрезками рядов

$$\begin{aligned} u_x &= u + \psi P_1(\xi) + (u_0 - u)P_2(\xi) + (\Delta u - \psi)P_3(\xi), \\ u_y &= v + \Delta v P_1(\xi) + (v_0 - v)P_2(\xi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_x &= \frac{du}{dx} + \frac{d\psi}{dx} P_1(\xi), & e_y &= \frac{1}{h} \Delta v + \frac{3}{h} (v_0 - v) P_1(\xi), \\
e_{xy} &= \frac{dv}{dx} + \frac{1}{h} \Delta u + \frac{3}{h} (u_0 - u) P_1(\xi) + \frac{5}{h} (\Delta u - \psi) P_2(\xi), & (2) \\
\Delta u &= 0,5(u^+ - u^-), & u_0 &= 0,5(u^+ + u^-), \\
\Delta v &= 0,5(v^+ - v^-), & v_0 &= 0,5(v^+ + v^-).
\end{aligned}$$

Здесь $u = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u_x d\xi$, $v = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u_y d\xi$ — осредненные по толщине перемещения; $\psi = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 u_x \xi d\xi$ — угол поворота нормали к срединной плоскости $y = 0$; v^\pm , u^\pm — нормальные и касательные перемещения на контактных поверхностях ($\xi = \pm 1$).

Неизвестные функции, входящие в коэффициенты полиномов в формулах (1), (2), определяются из системы уравнений [7], включающей:

— уравнения равновесия

$$\frac{dN}{dx} + 2\Delta q = 0, \quad \frac{dM}{dx} - Q + 2hq_0 = 0, \quad \frac{dQ}{dx} + 2\Delta p = 0; \quad (3)$$

— дифференциальные уравнения, полученные из закона Гука:

$$\frac{du}{dx} = \frac{N}{2hE} - \nu \frac{p_0}{E}, \quad \frac{d\psi}{dx} = \frac{3M}{2h^2E} - \nu \frac{\Delta p}{E}, \quad \frac{dv}{dx} + \frac{\Delta u}{h} = \frac{Q}{2h\mu}; \quad (4)$$

— алгебраические уравнения, полученные из закона Гука:

$$\begin{aligned}
u_0 - u &= \frac{h}{3\mu} \Delta q, & \Delta u - \psi &= \frac{h}{5\mu} \left(q_0 - \frac{Q}{2h} \right), \\
\Delta v &= h \frac{p_0}{E} - \nu \frac{N}{2E}, & v_0 - v &= h \frac{\Delta p}{3E} - \nu \frac{M}{2hE}.
\end{aligned} \quad (5)$$

Здесь E , μ — модули Юнга и сдвига; ν — коэффициент Пуассона.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (3), (4) относительно неизвестных функций N , M , Q , u , ψ , v имеет шестой порядок.

Отрыв балки от жесткой плиты. Балка единичной ширины, толщины $2h$ и длины l приклеена к жесткой плите. На краю $x = 0$ приложена сила Q_0 . С ростом величины Q_0 наступает момент отрыва балки от плиты. Возникают две зоны: зона отслоения ($0 \leq x \leq l_*$) и зона, где балка остается приклеенной к плите ($l_* < x \leq l$) (рис. 1).

На торцах балки ставятся граничные условия

$$N = 0, \quad M = 0, \quad Q = -Q_0 \quad \text{при } x = 0; \quad (6)$$

$$N = 0, \quad M = 0, \quad Q = 0 \quad \text{при } x = l. \quad (7)$$

Лицевая поверхность $\xi = 1$ свободна от напряжений:

$$q^+ = 0, \quad p^+ = 0 \quad \text{при } 0 \leq x \leq l. \quad (8)$$

На лицевой поверхности $\xi = -1$ ставятся следующие условия. В зоне отслоения

$$q^- = 0, \quad p^- = 0 \quad \text{при } 0 \leq x \leq l_*, \quad (9)$$

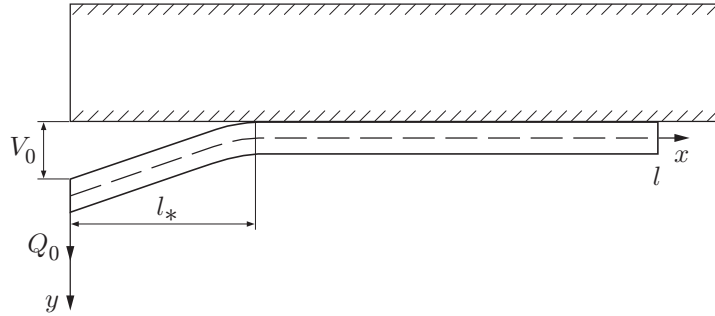


Рис. 1

в зоне, где балка остается приклеенной к плите (для краткости будем называть ее зоной проклея):

$$u^- = 0, \quad v^- = 0 \quad \text{при} \quad l_* < x \leq l. \quad (10)$$

Кроме того, будем полагать, что в зоне проклея в каждой точке нормальные напряжения удовлетворяют неравенству $p^- < \sigma_0$ (σ_0 — некоторая положительная величина, характеризующая прочностные свойства клеевого слоя). Когда в некоторой точке нормальные напряжения достигают значения σ_0 , в этой точке происходит отслоение. Таким образом, имеет место равенство

$$p^- = \sigma_0 \quad \text{при} \quad x = l_*. \quad (11)$$

Краевая задача для системы уравнений (1)–(5) с граничными условиями (6)–(10) представляется достаточно сложной. Поэтому для упрощения постановки исходной задачи сделаем следующие предположения. Неизвестные функции u , N не являются определяющими в данной задаче и ими можно пренебречь. Кроме того, в уравнениях (4), (5) положим $\nu \Delta p / E = \nu M / (2hE) = 0$.

В рамках сделанных предположений система уравнений (1)–(5) сводится к системе уравнений

$$\frac{dM}{dx} - Q + 2hq_0 = 0, \quad \frac{dQ}{dx} + 2\Delta p = 0; \quad (12)$$

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{3M}{2h^2 E}, \quad \frac{dv}{dx} + \frac{\Delta u}{h} = \frac{Q}{2h\mu}; \quad (13)$$

$$u_0 = \frac{h}{3\mu} \Delta q, \quad \Delta u - \psi = \frac{h}{5\mu} \left(q_0 - \frac{Q}{2h} \right), \quad (14)$$

$$\Delta v = h \frac{p_0}{E}, \quad v_0 - v = h \frac{\Delta p}{3E}.$$

Рассмотрим решение задачи в зоне отслоения ($0 \leq x \leq l_*$). К уравнениям (12)–(14) добавим граничные условия (8), (9). Решение полученной системы уравнений с учетом граничных условий (6) имеет вид

$$Q = -Q_0, \quad M = -xQ_0, \quad \psi = -\frac{3}{4h^2} \frac{Q_0}{E} x^2 + \Psi, \quad (15)$$

$$v = \frac{1}{4h^3} \frac{Q_0}{E} x^3 - \frac{6(1+\nu)}{5h} \frac{Q_0}{E} x - \frac{x}{h} \Psi + V.$$

Здесь Ψ , V — неизвестные постоянные.

В зоне проклея ($l_* < x \leq l$) к уравнениям (12)–(14) необходимо добавить граничные условия (8), (10), которые запишем в виде

$$q_0 + \Delta q = 0, \quad p_0 + \Delta p = 0, \quad u_0 - \Delta u = 0, \quad v_0 - \Delta v = 0. \quad (16)$$

Совокупность уравнений (14), (16) можно рассматривать как линейную систему алгебраических уравнений относительно неизвестных функций Δu , u_0 , Δv , v_0 , Δp , p_0 , Δq , q_0 , решение которой имеет вид

$$\begin{aligned} q_0 = -\Delta q &= -\frac{15\mu}{8h} \psi + \frac{3}{16h} Q, & p_0 = -\Delta p &= \frac{3E}{4h} v, \\ u_0 = \Delta u &= \frac{5}{8} \psi - \frac{1}{16h} Q, & v_0 = \Delta v &= \frac{3}{4} v. \end{aligned} \quad (17)$$

Подставляя (17) в уравнения (12), (13), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dx} &= h \frac{15\mu}{4h} \psi + \frac{5}{8} Q, & \frac{dQ}{dx} &= \frac{3E}{2h} v, \\ \frac{d\psi}{dx} &= \frac{3M}{2h^2 E}, & \frac{dv}{dx} &= -\frac{5}{8h} \psi + \frac{9}{16h\mu} Q. \end{aligned} \quad (18)$$

Обозначим через p нормальное контактное напряжение в зоне проклея. Из (17) получаем формулу для нормальных контактных напряжений

$$p = 3Ev/(4h). \quad (19)$$

Характеристическое уравнение системы (18) представляет собой биквадратное уравнение, которое имеет четыре комплексных корня. Решение зависит от четырех постоянных. Будем полагать, что $l/h \gg 1$. Поэтому можно считать, что граничные условия (7) ставятся на бесконечности. Удовлетворяя этим условиям, получаем решение системы уравнений (18) в виде

$$\psi = (C_1 \cos(\beta x/h) + C_2 \sin(\beta x/h)) \exp(-\alpha x/h). \quad (20)$$

Здесь C_1 , C_2 — неизвестные постоянные; α , β определяются по формулам

$$\begin{aligned} \alpha &= 0,5\sqrt{c+d}, & \beta &= 0,5\sqrt{-c+d}, \\ c &= \frac{9}{16} \left(\frac{10}{k} + \frac{3k}{2} \right), & d &= \frac{3}{2} \sqrt{10}, & k &= \frac{E}{\mu} = 2(1+\nu). \end{aligned}$$

Неизвестные функции M , Q , v имеют вид, аналогичный выражению (20).

В зоне отслоения в решении (15) содержатся две неизвестные постоянные Ψ , V , в зоне проклея — две неизвестные постоянные C_1 , C_2 . Эти неизвестные постоянные определяются из условий сопряжения решений (15), (20) в точке $x = l_*$, которые запишем в виде

$$[M] = 0, \quad [Q] = 0, \quad [\psi] = 0, \quad [v] = 0 \quad \text{при} \quad x = l_*. \quad (21)$$

Здесь $[\cdot]$ — скачок функции.

Неизвестная граница зоны отслоения l_* определяется из условий (11), (19). Постоянные C_1 , C_2 вычисляются из первых двух равенств (21). После их нахождения из остальных равенств вычисляются постоянные Ψ , V . Из равенств (11), (19) следует выражение для определения l_* .

Опуская выкладки, запишем следующие выражения:

$$Q_0 = 2h\sigma_0 A / (5\eta/8 + B); \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{15}{8k} + \frac{\sqrt{10}}{4}, & B &= \frac{\sqrt{10}}{6} \sqrt{\frac{9}{8k} \left(5 + \frac{3}{4} k^2\right) + \frac{3}{2} \sqrt{10}}; \\
 V_0 &= (Q_0/E)(4\eta^3 + a_2\eta^2 + a_1\eta + a_0); \\
 a_0 &= \frac{B}{3A}, & a_1 &= \frac{5}{18k}, & a_2 &= \frac{5}{8B} \left(\frac{9k}{5} + \frac{16}{\sqrt{10}} + \frac{5}{24A}\right),
 \end{aligned} \tag{23}$$

где $\eta = l_*/(2h)$ — безразмерная величина, определяющая границу зоны отслоения.

Формула (22) определяет зависимость между приложенной нагрузкой Q_0 и размером зоны отслоения l_* , формула (23) — зависимость между прогибом торца балки V_0 и размером зоны отслоения l_* .

Экспериментальные исследования. Для обоснования предложенной выше математической модели отрыва упругой балки от жесткого основания проведена серия экспериментов.

Образцы из оргстекла, стеклопластика и дюралюминия толщиной 3 мм, шириной 10 мм и длиной 300 мм приклеивались эпоксидной смолой к жесткой плите из прозрачного оргстекла, что позволяло с достаточной точностью определить длину зоны отслоения образца. Условия экспериментов (размеры образцов, шероховатость приклеиваемых поверхностей, усилие и время склеивания), результаты которых приведены ниже, были одинаковыми. Для каждого вида материала эксперимент повторялся не менее трех раз.

Схема эксперимента приведена на рис. 1. По способу нагружения и измеряемым характеристикам проведенные эксперименты можно разделить на два типа. В первом случае образец нагружался приложенной на торце силой Q_0 (“мягкое” нагружение). Измерялись сила Q_0 (с помощью динамометра) и соответствующая ей длина зоны отслоения l_* . Величина l_* измерялась визуально (плита выполнена из прозрачного оргстекла). Граница зоны отслоения четко видна. Прозрачный клеевой слой из эпоксидной смолы в зоне отслоения становился мутным и покрывался мелкими трещинами. Во втором случае образец нагружался заданием на торце прогиба V_0 (“жесткое” нагружение). Измерялись прогиб V_0 (с помощью индикатора часового типа) и соответствующее значение l_* .

При “мягком” нагружении на начальной стадии наблюдается следующая картина. Нагрузка возрастает до некоторого критического значения Q_* . Зона отслоения не образуется ($l_* = 0$). При $Q_0 = Q_*$ происходит резкое уменьшение нагрузки при быстром увеличении размеров зоны отслоения. Вследствие быстротечности процесса на этом этапе не удается зафиксировать зависимость между Q_0 и l_* . Для определения этой зависимости предложена следующая методика.

Выбиралась последовательность длин $0 < l_i < l_*$, на которых образец не приклеивался на участке от 0 до l_i , т. е. зона отслоения моделировалась искусственно. Затем образец нагружался, и определялось значение критической нагрузки Q_{i*} , при котором продолжалось отслоение. Полагая $Q_0 = Q_{i*}$, $l_* = l_i$, получаем зависимость между Q_0 и l_* . В проведенных экспериментах значения l_i выбирались равными 20, 30 и 50 мм.

При “жестком” нагружении для каждого образца наблюдалась монотонная зависимость между задаваемым прогибом на торце V_0 и l_* . С ростом прогиба размеры зоны отслоения увеличивались.

Следует отметить, что для образцов из одного материала при увеличении прогиба V_0 возрастает разброс экспериментальных значений длины зоны отслоения.

Сравнение теоретических и экспериментальных результатов. Для проверки соответствия предложенной математической модели реальному процессу отрыва приклеенной балки от жесткой плиты проводится сравнение полученных теоретических и экспериментальных результатов.

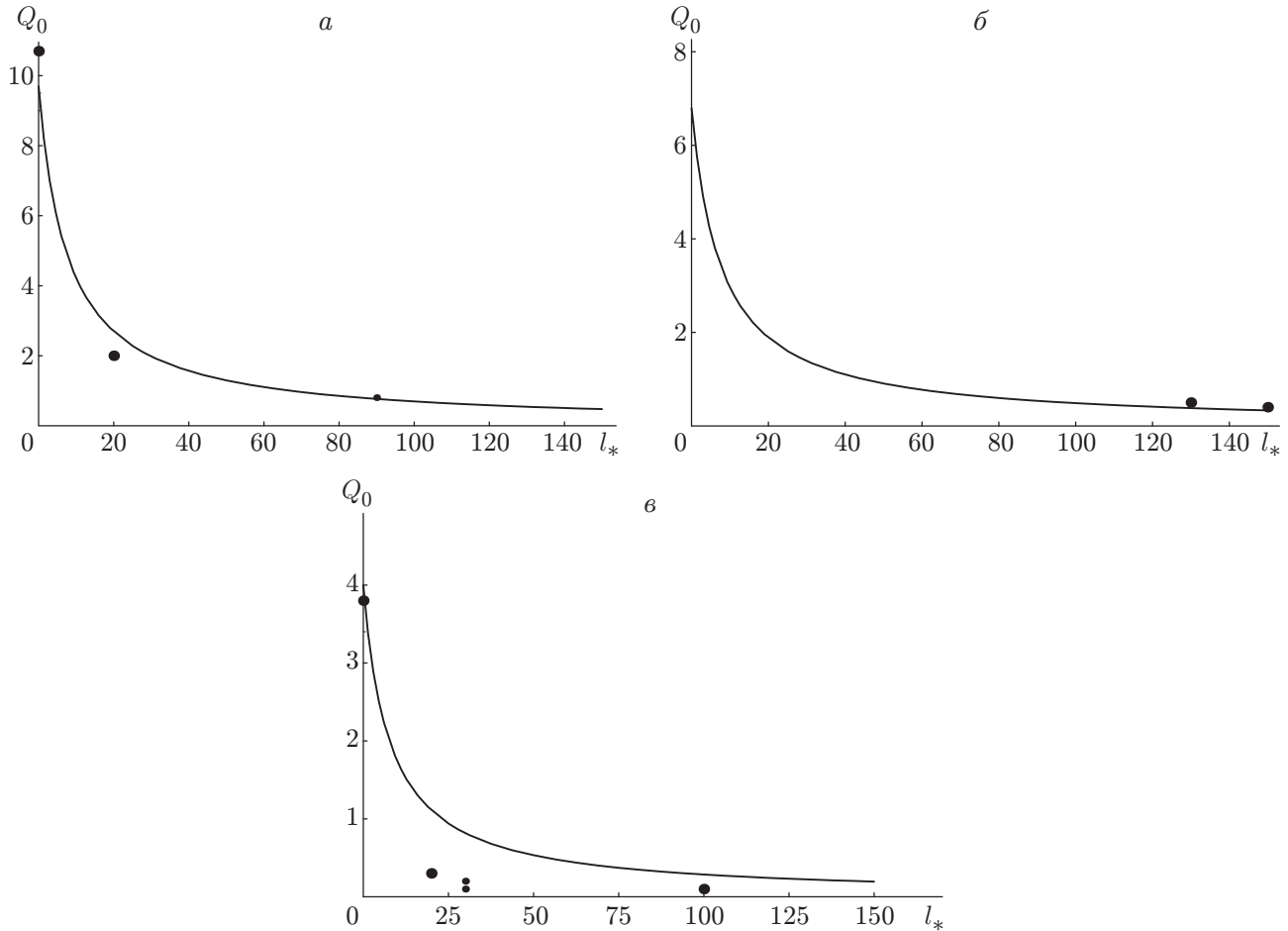


Рис. 2

Рассмотрим случай “мягкого” нагружения. С учетом ширины образца b запишем формулу (22) в форме

$$Q_0 = \frac{Q'_0}{1 + \gamma l_*}, \quad Q'_0 = 2hb\sigma_0 \frac{A}{B}, \quad \gamma = \frac{5}{16hB}. \quad (24)$$

В формулу (24) входит физическая постоянная σ_0 , характеризующая прочностные свойства клеевого слоя. Эта величина зависит от формы и шероховатости контактных поверхностей, свойств клея, характеристик контактирующих тел и т. д. Поэтому целесообразно определить ее непосредственно из проведенных экспериментов. При $l_* = 0$ имеем $Q_0 = Q_*$ (Q_* — критическая нагрузка). В то же время из формулы (24) следует, что при $l_* = 0$ $Q_0 = Q'_0$. Полагая $Q'_0 = Q_*$, получаем

$$\sigma_0 = BQ_*/(2hbA). \quad (25)$$

Поскольку значения Q_* в эксперименте для разных образцов различные (разброс составлял не более 12 %), в расчетах и формуле (25) используется среднее значение. Для алюминия $Q_* = 9,7$ кг, для стеклопластика $Q_* = 6,7$ кг, для оргстекла $Q_* = 4$ кг. Модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν в расчетах принимались следующими: для алюминия $E = 7 \cdot 10^4$ МПа, $\nu = 0,27$; для стеклопластика $E = 2,8 \cdot 10^4$ МПа, $\nu = 0,25$; для оргстекла $E = 0,3 \cdot 10^4$ МПа, $\nu = 0,35$.

На рис. 2, а–в для алюминия, стеклопластика и оргстекла соответственно приведены теоретические и экспериментальные зависимости $Q_0(l_*)$. Сплошные линии получены

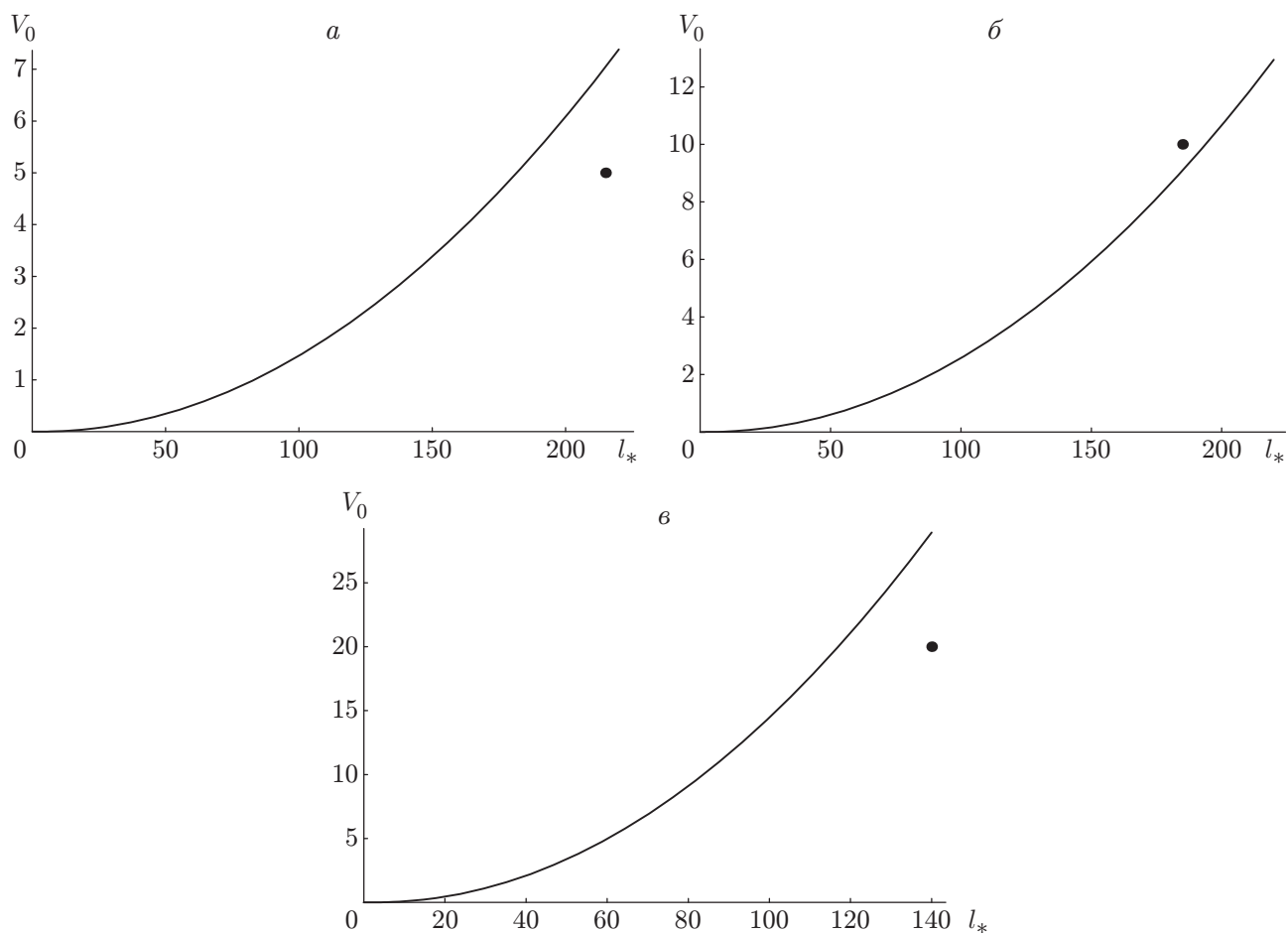


Рис. 3

по формуле (24), точки — данные эксперимента. Из приведенных зависимостей следует хорошее качественное, а при больших значениях l_* и количественное соответствие теоретических и экспериментальных данных.

В случае “жесткого” нагружения рассматривается зависимость прогиба торца образца V_0 (см. рис. 1) от длины зоны отслоения l_* . Формулу (23) запишем в следующем виде:

$$V_0 = \frac{Q_*}{bE} \frac{A_3 l_*^3 + A_2 l_*^2 + A_1 l_* + a_0}{1 + \gamma l_*}, \tag{26}$$

$$A_1 = \frac{a_1}{2h}, \quad A_2 = \frac{a_2}{(2h)^2}, \quad A_3 = \frac{4}{(2h)^3}.$$

На рис. 3, а-в для алюминия, стеклопластика и оргстекла соответственно приведены теоретические и экспериментальные зависимости $V_0(l_*)$. Сплошные линии получены по формуле (26), точки — данные эксперимента. Значение Q_* задавалось таким же, как в случае “мягкого” нагружения. Из приведенных зависимостей следует хорошее качественное, а при небольших прогибах и количественное соответствие теоретических и экспериментальных данных.

Сравнение теоретических и экспериментальных результатов позволяет сделать вывод, что предложенная математическая модель адекватно описывает реальный процесс отрыва балки, приклеенной к жесткой плите.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Александров В. М.** Некоторые контактные задачи для балок, пластин и оболочек // Прикл. математика и механика. 1965. Т. 29, № 4. С. 782–786.
2. **Григолюк Э. И., Толкачев В. М.** Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.: Машиностроение, 1980.
3. **Пелех Б. Л., Максимук А. В., Коровайчук И. М.** Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями. Киев: Наук. думка, 1988.
4. **Иванов Г. В.** Теория пластин и оболочек. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1980.
5. **Алексеев А. Е.** Построение уравнений слоя переменной толщины на основе разложений по полиномам Лежандра // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 4. С. 137–147.
6. **Дергилева Л. А.** Метод решения плоской контактной задачи для упругого слоя // Динамика сплошной среды / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1976. Вып. 25. С. 24–32.
7. **Алексеев А. Е.** Изгиб трехслойной ортотропной балки // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 3. С. 158–166.

Поступила в редакцию 27/XI 2002 г.
