

УДК 539.4+539.37

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ ДВУСВЯЗНЫХ ПЛАСТИН С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ЗАКРЕПЛЕННЫМИ КРИВОЛИНЕЙНЫМИ КОНТУРАМИ НА ВЯЗКОУПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Ю. В. Немировский, Т. П. Романова

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
630090 Новосибирск
E-mail: nemirov@itam.nsc.ru

Получено общее решение задачи о динамическом изгибе идеальной жесткопластической двусвязной пластины с произвольными шарнирно опертыми или защемленными криволинейными контурами, на которую действует равномерно распределенная по поверхности кратковременная динамическая нагрузка высокой интенсивности взрывного типа. Пластина покоится на вязкоупругом основании. Показано, что существует несколько механизмов деформирования пластин, для каждого из них получены уравнения динамического деформирования и проанализированы условия реализации. Приведены численные примеры.

Ключевые слова: жесткопластическая двусвязная пластина, криволинейный контур, взрывная нагрузка, предельная нагрузка, остаточный прогиб.

Введение. Исследование повреждаемости разнообразных двусвязных пластин, являющихся элементами многих технических конструкций, при воздействии нагрузок взрывного типа необходимо для анализа рисков и прогнозирования чрезвычайных ситуаций. До последнего времени изучение динамического деформирования ограничивалось простыми геометрическими формами типа кольцевых и правильных полигональных пластин. Подходы к построению схемы расчетов динамического деформирования двусвязных пластин рассмотрены в работе [1]. В настоящей работе построены некоторые дополнительные схемы деформирования пластин, позволяющие провести вычисления в полном объеме. В качестве примера решена задача для овальной пластины с круглым отверстием, расположенной на вязком основании.

1. Схема деформирования пластины. Рассмотрим тонкую идеальную жесткопластическую двусвязную пластину с произвольными гладкими шарнирно опертыми или защемленными контурами (рис. 1, *a*). На пластину, находящуюся на вязкоупругом основании, действует равномерно распределенная по поверхности кратковременная интенсивная нагрузка $P(t)$ взрывного типа, имеющая максимальное значение $P_{\max} = P(0)$ в начальный момент времени $t = 0$ и быстро убывающая при $t > 0$. Прогибы являются малыми. Влиянием мембранных сил и вертикальных сдвигов в условии пластичности и изменениями геометрии пластины пренебрегается.

Работа выполнена в рамках Интеграционного проекта Президиума СО РАН № 115 (постановление № 10 от 15.01.09) и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10-01-90402-Укр_а).

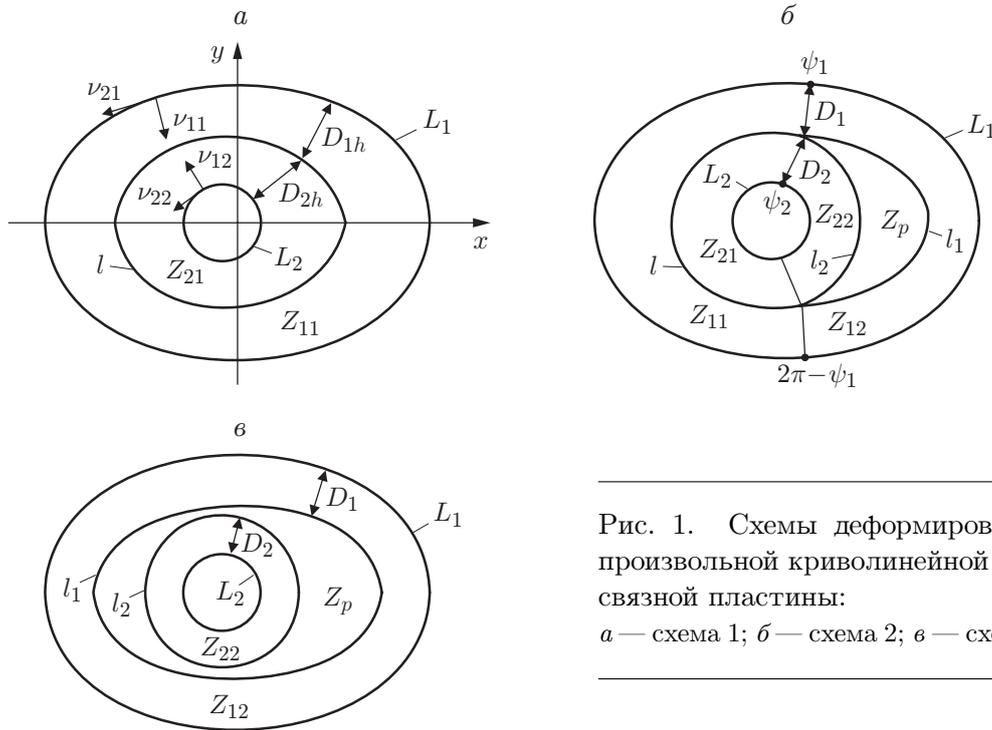


Рис. 1. Схемы деформирования произвольной криволинейной двусвязной пластины:
 а — схема 1; б — схема 2; в — схема 3

Уравнения внешнего контура L_1 и внутреннего контура L_2 пластины запишем в параметрической форме

$$x = x_i(\varphi_i), \quad y = y_i(\varphi_i) \quad (i = 1, 2, \quad 0 \leq \varphi_i \leq 2\pi),$$

где индекс $i = 1$ соответствует внешнему контуру L_1 , $i = 2$ — внутреннему L_2 . Радиусы кривизны контуров L_i равны

$$R_i(\varphi_i) = L_{ia}^3 / (x_i' y_i'' - y_i' x_i'') \quad (L_{ia}(\varphi_i) = \sqrt{x_i'^2(\varphi_i) + y_i'^2(\varphi_i)}). \quad (1)$$

Здесь $(\cdot)' = \partial(\cdot) / \partial \varphi_i$. Считается, что пластина симметрична относительно оси x .

Введем две криволинейные ортогональные системы координат (ν_{1i}, ν_{2i}) ($i = 1, 2$) (см. рис. 1, а), связанные с декартовой системой (x, y) соотношениями

$$x = x_i(\nu_{2i}) + (-1)^i \nu_{1i} y_i'(\nu_{2i}) / L_{ia}(\nu_{2i}), \quad y = y_i(\nu_{2i}) - (-1)^i \nu_{1i} x_i'(\nu_{2i}) / L_{ia}(\nu_{2i}). \quad (2)$$

Радиусы кривизны линий $\nu_{1i} = \text{const}$, находящихся внутри пластины на расстоянии ν_{1i} от контура L_i , равны $\rho_{1i} = R_i(\nu_{2i}) + (-1)^i \nu_{1i}$. Прямые линии $\nu_{2i} = \text{const}$ перпендикулярны контуру L_i (радиус кривизны $\rho_{2i} = \infty$). В этом случае уравнение контура пластины L_i имеет вид $\nu_{1i} = 0$ ($0 \leq \nu_{2i} \leq 2\pi$). Элемент площади в координатах (ν_{1i}, ν_{2i}) определяется выражением $dS_i = L_{ia} [1 + (-1)^i \nu_{1i} / R_i] d\nu_{1i} d\nu_{2i}$.

В зависимости от значения P_{\max} возможны три схемы деформирования рассматриваемой пластины из жесткопластического материала. При нагрузках, не превышающих предельные нагрузки P_0 (“низких” нагрузках: $P_{\max} \leq P_0$), пластина не деформируется. При нагрузках, незначительно превышающих предельные (“средних” нагрузках: $P_0 < P_{\max} \leq P_1$), во внутренней области пластины образуется криволинейный пластический шарнир l с нормальным изгибающим моментом, равным предельному моменту M_0 , а пластина деформируется в две линейчатые поверхности. Такую схему движения будем называть схемой 1 (см. рис. 1, а). При достаточно больших значениях P_{\max} ($P_{\max} > P_1$)

динамическое деформирование пластины может сопровождаться возникновением одной или нескольких областей Z_p , движущихся поступательно. При этом возможны две ситуации — когда часть шарнира l сохраняется (схема 2) либо шарнир l отсутствует (схема 3). Схема 2, представленная на рис. 1,б, соответствует “высоким” нагрузкам, схема 3, приведенная на рис. 1,в, — “сверхвысоким” нагрузкам. Эти схемы движения соотносятся со схемами для кольцевых пластин [2–5] следующим образом. При точном анализе кольцевых пластин при условиях пластичности Треска и Йогансена показано, что в предельном состоянии в пластине появляются две пластические шарнирные линии, между которыми находится область, движущаяся поступательно. При увеличении нагрузки такая схема движения сохраняется, но при предельных и близких к ним нагрузках расстояние между указанными линиями мало. Поэтому при построении приближенного решения для двусвязных криволинейных пластин будем считать, что в предельном и близком к нему состояниях две пластические шарнирные линии сливаются в кривую l , а при существенном увеличении нагрузки, как и в точном решении для кольцевых пластин, возникает область Z_p , движущаяся поступательно.

Нормаль к контуру L_i , проведенная от контура L_i внутрь пластины, попадает либо на линию l , либо на шарнир l_i , являющийся границей области Z_p (см. рис. 1,б). Обозначим через Z_{i1} область пластины (не включающую область Z_p), из любой точки которой нормаль к контуру L_i попадает на шарнир l , а через Z_{i2} область пластины, не включающую область Z_p , из любой точки которой нормаль к L_i попадает на линию l_i (см. рис. 1,б). Количество областей Z_{ij} ($i = 1, 2, j = 1, 2$) зависит от формы пластины.

В работе [1] показано, что нормаль к контуру l_i является также нормалью к контуру L_i и расстояние D_i между кривыми l_i и L_i не зависит от параметра ν_{2i} . Обозначим через α_{ij} угол, на который область Z_{ij} отклоняется от горизонта на опорном контуре. Предполагается, что скорость изменения угла α_{i1} не зависит от параметра ν_{2i} . Тогда из условия непрерывности скоростей на границах областей Z_{i1} и Z_{i2} , Z_{i2} и Z_p следует, что $\dot{\alpha}_{i1}(t) = \dot{\alpha}_{i2}(t) = \dot{\alpha}_i(t)$ и области Z_p , если их несколько, движутся с одной и той же скоростью $\dot{w}_c(t)$ ($(\dot{\cdot}) = \partial(\cdot)/\partial t$).

Запишем уравнение шарнира l в двух параметрических формах:

$$x = x_{ih}(\nu_{2i}, t), \quad y = y_{ih}(\nu_{2i}, t) \quad (0 \leq \nu_{2i} \leq 2\pi).$$

Тогда расстояние D_{ih} по нормали к контуру L_i от линии L_i до линии l равно

$$D_{ih}(\nu_{2i}, t) = \sqrt{[x_i(\nu_{2i}) - x_{ih}(\nu_{2i}, t)]^2 + [y_i(\nu_{2i}) - y_{ih}(\nu_{2i}, t)]^2} \quad (i = 1, 2), \quad (3)$$

а уравнение для l в координатах (ν_{1i}, ν_{2i}) имеет вид

$$\nu_{1i} = D_{ih}(\nu_{2i}, t). \quad (4)$$

Из условия непрерывности скоростей на линии l следует

$$\dot{\alpha}_1(t) = k(t)\dot{\alpha}_2(t); \quad (5)$$

$$k(t) = D_{2h}(\nu_{22}, t)/D_{1h}(\nu_{21}, t), \quad (6)$$

где $k(t) > 0$ — неизвестная функция времени. Условие, при выполнении которого точка $(x_{ih}(\nu_{2i}, t), y_{ih}(\nu_{2i}, t))$ находится на нормали к L_i , имеет вид

$$x'_i(\nu_{2i})[x_{ih}(\nu_{2i}, t) - x_i(\nu_{2i})] + y'_i(\nu_{2i})[y_{ih}(\nu_{2i}, t) - y_i(\nu_{2i})] = 0; \quad (7)$$

$$x_{1h}(\nu_{21}, t) = x_{2h}(\nu_{22}, t), \quad y_{1h}(\nu_{21}, t) = y_{2h}(\nu_{22}, t). \quad (8)$$

Положение линии l (4) в зависимости от $k(t)$ определяется формулами (3), (6)–(8).

Схема 2 соответствует общему случаю деформирования пластины. В отсутствие области Z_p эта схема переходит в схему 1. Когда отсутствует линия l , схема 2 переходит

в схему 3. Рассмотрим подробно схему 2. Уравнения движения пластины выведем из принципа виртуальной мощности с использованием принципа Даламбера [6]:

$$K = A - N. \quad (9)$$

Здесь K , A , N — мощности инерционных, внешних и внутренних сил соответственно:

$$K = \iint_S \rho \ddot{u} \dot{u}^* dS, \quad A = \iint_S [P(t) - K_e u - K_v \dot{u}] \dot{u}^* dS; \quad (10)$$

$$N = \sum_m \int_{l_m} M_m [\dot{\theta}^*]_{l_m} dl_m + M_0 \iint_S (|\varkappa_1^*| + |\varkappa_2^*|) dS, \quad (11)$$

K_e , K_v — коэффициенты упругого и вязкого сопротивления соответственно; S — площадь пластины; u — прогиб; ρ — поверхностная плотность материала пластины; dS — элемент площади; m — количество линий разрыва угловых скоростей; l_m — линии разрыва угловых скоростей включая контур; $[\dot{\theta}]_{l_m}$ — разрыв угловой скорости на l_m ; M_m — изгибающий момент на l_m ; \varkappa_1 , \varkappa_2 — скорости главных кривизн поверхности пластины; индекс “*” соответствует допустимым скоростям.

Скорости прогибов в различных областях пластины равны

$$(\nu_{1i}, \nu_{2i}) \in Z_{ij}: \quad \dot{u}(\nu_{1i}, \nu_{2i}, t) = \dot{\alpha}_i(t) \nu_{1i}, \quad (\nu_{1i}, \nu_{2i}) \in Z_p: \quad \dot{u} = \dot{w}_c(t). \quad (12)$$

С учетом введенных обозначений и соотношений (12) выражения (10) принимают вид

$$K = \rho \left[\sum_{i=1}^2 \dot{\alpha}_i^* \ddot{\alpha}_i \left(\sum_{j=1}^2 \iint_{Z_{ij}} \nu_{1i}^2 dS_i \right) + \dot{w}_c^* \ddot{w}_c \iint_{Z_p} dS \right]; \quad (13)$$

$$A = \sum_{i=1}^2 \dot{\alpha}_i^* \left(\sum_{j=1}^2 \iint_{Z_{ij}} (P - K_e \alpha_i \nu_{1i} - K_v \dot{\alpha}_i \nu_{1i}) \nu_{1i} dS_i \right) + \dot{w}_c^* \iint_{Z_p} (P - K_e w_c - K_v \dot{w}_c) dS. \quad (14)$$

Выражение (11) для мощности внутренних сил N представим в виде суммы

$$N = \sum_{j=1}^7 N_j, \quad (15)$$

где N_1 , N_2 , N_3 , N_4 , N_5 , N_6 , N_7 — мощности внутренних сил на контурах L_1 , L_2 , на линиях l_1 , l_2 , внутри областей $Z_{11} \cup Z_{12}$, $Z_{21} \cup Z_{22}$ и на линии l соответственно:

$$\begin{aligned} N_j &= (1 - \eta_j) M_0 \oint_{L_j} [\dot{\theta}^*]_{L_j} dL_j \quad (j = 1, 2), \\ N_3 &= M_0 \int_{l_1} [\dot{\theta}^*]_{l_1} dl_1, \quad N_4 = M_0 \int_{l_2} [\dot{\theta}^*]_{l_2} dl_2, \\ N_5 &= M_0 \iint_{Z_{11} \cup Z_{12}} (|\varkappa_1^*|_1 + |\varkappa_2^*|_1) dS_1, \quad N_6 = M_0 \iint_{Z_{21} \cup Z_{22}} (|\varkappa_1^*|_2 + |\varkappa_2^*|_2) dS_2; \\ N_7 &= M_0 \int_l [\dot{\theta}^*]_l dl, \end{aligned} \quad (16)$$

$\eta_j = 0$ при закреплении контура L_j и $\eta_j = 1$ при его шарнирном опирании.

Рассмотрим случай, когда в схеме 2 возникает одна область Z_p , при этом области Z_{ij} определены следующим образом:

$$\begin{aligned} Z_{i1}: \quad & 0 \leq \nu_{1i} \leq D_{ih}(\nu_{2i}, t), \quad \psi_i \leq \nu_{2i} \leq 2\pi - \psi_i, \\ Z_{i2}: \quad & 0 \leq \nu_{1i} \leq D_i(t), \quad 0 \leq \nu_{2i} \leq \psi_i, \quad 2\pi - \psi_i \leq \nu_{2i} \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Из (12) с учетом того, что нормаль к l_i является нормалью к L_i , следует $[\dot{\theta}]_{L_i} = [\dot{\theta}]_{l_i} = \dot{\alpha}_i$, при этом главные кривизны $(\varkappa_1)_1, (\varkappa_2)_1$ в областях $Z_{11} \cup Z_{12}$ и $(\varkappa_1)_2, (\varkappa_2)_2$ в областях $Z_{21} \cup Z_{22}$ равны

$$(\varkappa_1)_i = \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial \nu_{1i}^2} = 0, \quad (\varkappa_2)_1 = \frac{1}{\rho_{11}} \frac{\partial \dot{u}}{\partial \nu_{11}} = \frac{\dot{\alpha}_1(t)}{R_1 - \nu_{11}}, \quad (\varkappa_2)_2 = \frac{1}{\rho_{12}} \frac{\partial \dot{u}}{\partial \nu_{12}} = \frac{\dot{\alpha}_2(t)}{R_2 + \nu_{12}}.$$

Тогда

$$N_j = (1 - \eta_j) M_0 \dot{\alpha}_j^* \int_0^{2\pi} L_{ia} d\nu_{2j} \quad (j = 1, 2),$$

$$\begin{aligned} N_3 &= M_0 \dot{\alpha}_1^* \int_{l_1} dl_1 = M_0 \dot{\alpha}_1^* \left[\int_0^{\psi_1} L_{1a} \left(1 - \frac{D_1}{R_1}\right) d\nu_{21} + \int_{2\pi - \psi_1}^{2\pi} L_{1a} \left(1 - \frac{D_1}{R_1}\right) d\nu_{21} \right], \\ N_4 &= M_0 \dot{\alpha}_2^* \int_{l_2} dl_2 = M_0 \dot{\alpha}_2^* \left[\int_0^{\psi_2} L_{2a} \left(1 + \frac{D_2}{R_2}\right) d\nu_{22} + \int_{2\pi - \psi_2}^{2\pi} L_{2a} \left(1 + \frac{D_2}{R_2}\right) d\nu_{22} \right], \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} N_5 &= M_0 \dot{\alpha}_1^* \iint_{Z_{11} \cup Z_{12}} \frac{dS_1}{R_1 - \nu_{11}} = M_0 \dot{\alpha}_1^* \left(D_1 \int_0^{\psi_1} \frac{L_{1a}}{R_1} d\nu_{21} + \int_{\psi_1}^{2\pi - \psi_1} \frac{L_{1a} D_{1h}}{R_1} d\nu_{21} + D_1 \int_{2\pi - \psi_1}^{2\pi} \frac{L_{1a}}{R_1} d\nu_{21} \right), \\ N_6 &= M_0 \dot{\alpha}_2^* \iint_{Z_{21} \cup Z_{22}} \frac{dS_1}{R_2 + \nu_{12}} = M_0 \dot{\alpha}_2^* \left(D_2 \int_0^{\psi_2} \frac{L_{2a}}{R_2} d\nu_{22} + \int_{\psi_2}^{2\pi - \psi_2} \frac{L_{2a} D_{2h}}{R_2} d\nu_{22} + D_2 \int_{2\pi - \psi_2}^{2\pi} \frac{L_{2a}}{R_2} d\nu_{22} \right). \end{aligned}$$

При вычислении N_7 в (16) используется формула

$$dl = L_{1h} d\nu_{21} = L_{2h} d\nu_{22} \quad (L_{ih} = \sqrt{x_{ih}'^2 + y_{ih}'^2}). \quad (18)$$

Для определения разрыва угловой скорости $[\dot{\theta}]_l$ на l выполним следующие построения (рис. 2). Из точки $A(D_{ih}(\nu_{2i}, t), \nu_{2i}) \in l$ ($\psi_i \leq \nu_{2i} \leq 2\pi - \psi_i$) на недеформированной пластине проведем нормали AB_i к L_i до пересечения с контурами L_i в точках $B_i(0, \nu_{2i})$; расстояние $|AB_i| = D_{ih}(\nu_{2i}, t)$. Через точку A проведем касательную l_3 к линии l . Через отрезки AB_i проведем плоскости AB_iE , перпендикулярные исходной поверхности пластины ($AE \perp AB_i$). Проведем также плоскость BED_1 , касающуюся деформированной поверхности пластины по прямой BE . Тогда $\angle AB_iE = \alpha_i$. Через точку A проведем плоскость D_1ED_2 , перпендикулярную линии l_3 . Обозначим угол AD_iE через β_i . Тогда

$$[\dot{\theta}]_l = \dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_2. \quad (19)$$

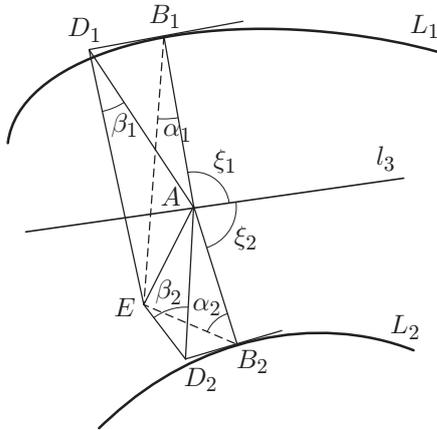


Рис. 2

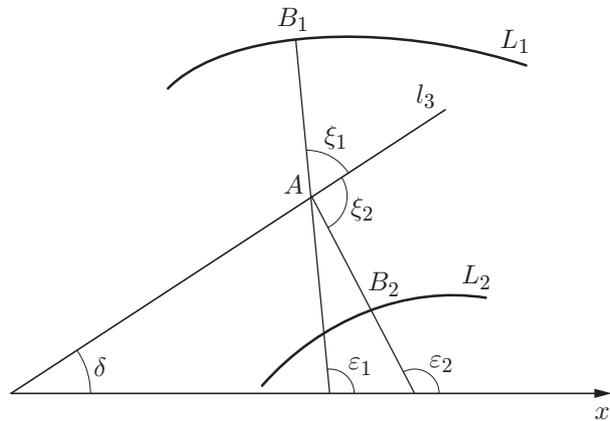


Рис. 3

Рис. 2. Дополнительные построения для вычисления разрыва угловой скорости на линии l

Рис. 3. Определение угла δ между l_3 (касательной к линии l) и осью x

Так как $|AE| = |AB_i|\alpha_i$, $|AE| = |AD_i|\beta_i$ и $AB_i \perp B_iD_i$, то $|AB_i| = |AD_i| \sin \xi_i$ и

$$\dot{\beta}_i = \dot{\alpha}_i \sin \xi_i \tag{20}$$

(ξ_i — минимальный угол между отрезком AB_i и прямой l_3 (рис. 2, 3)). Из рис. 3 следует, что $\xi_i = \varepsilon_i - \delta$ (δ , ε_i — углы, которые образуют прямая l_3 и перпендикуляры AB_i к контурам L_i с осью x). Тогда

$$\operatorname{tg} \xi_i = \operatorname{tg}(\varepsilon_i - \delta) = (\operatorname{tg} \varepsilon_i - \operatorname{tg} \delta) / (1 - \operatorname{tg} \varepsilon_i \operatorname{tg} \delta).$$

Так как

$$\operatorname{tg} \delta = y'_{ih} / x'_{ih}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon_i = -x'_i / y'_i, \tag{21}$$

то

$$\sin \xi_i = \frac{y'_i y'_{ih} + x'_i x'_{ih}}{L_{ia} L_{ih}}. \tag{22}$$

Из (18), (20), (22) получаем

$$\dot{\beta}_i dl = \dot{\alpha}_i \frac{y'_i y'_{ih} + x'_i x'_{ih}}{L_{ia}} d\nu_{2i}. \tag{23}$$

Из (3), (7) следует

$$D_{1h} = \left| \frac{y_{1h} - y_1}{x'_1} \right| L_{1a} = \frac{y_1 - y_{1h}}{-x'_1} L_{1a}, \quad D_{2h} = \left| \frac{y_{2h} - y_2}{x'_2} \right| L_{2a} = \frac{y_{2h} - y_2}{-x'_2} L_{2a}. \tag{24}$$

Дифференцируя (7) по параметру ν_{2i} и учитывая (24), имеем

$$L_{ia}^2 = x'_i x'_{ih} + y'_i y'_{ih} - x''_i (x_i - x_{ih}) - y''_i (y_i - y_{ih}). \tag{25}$$

Из (1), (24), (25) следует

$$\frac{y'_1 y'_{1h} + x'_1 x'_{1h}}{L_{1a}} = L_{1a} \left(1 - \frac{D_{1h}}{R_1} \right), \quad \frac{y'_2 y'_{2h} + x'_2 x'_{2h}}{L_{2a}} = L_{2a} \left(1 + \frac{D_{2h}}{R_2} \right).$$

Тогда выражения (23) принимают вид

$$\dot{\beta}_1 dl = \dot{\alpha}_1 L_{1a} \left(1 - \frac{D_{1h}}{R_1}\right), \quad \dot{\beta}_2 dl = \dot{\alpha}_2 L_{2a} \left(1 + \frac{D_{2h}}{R_2}\right). \quad (26)$$

С учетом (19), (26) выражение для N_7 в (16) записывается в форме

$$N_7 = M_0 \left[\dot{\alpha}_1 \int_{\psi_1}^{2\pi-\psi_1} L_{1a} \left(1 - \frac{D_{1h}}{R_1}\right) d\nu_{21} + \dot{\alpha}_2 \int_{\psi_2}^{2\pi-\psi_2} L_{2a} \left(1 + \frac{D_{2h}}{R_2}\right) d\nu_{22} \right]. \quad (27)$$

Подставляя (17), (27) в (15), в случае деформирования по схеме 2 получаем

$$\begin{aligned} \frac{N}{M_0} = & \dot{\alpha}_1^* (2 - \eta_1) \int_0^{2\pi} L_{1a} d\nu_{21} + \dot{\alpha}_2^* \left[(2 - \eta_2) \int_0^{2\pi} L_{2a} d\nu_{22} + \right. \\ & \left. + 2 \left(D_2 \int_0^{\psi_2} \frac{L_{2a}}{R_2} d\nu_{22} + \int_{\psi_2}^{2\pi-\psi_2} D_{2h} \frac{L_{2a}}{R_2} d\nu_{22} + D_2 \int_{2\pi-\psi_2}^{2\pi} \frac{L_{2a}}{R_2} d\nu_{22} \right) \right]. \end{aligned}$$

В общем случае при любом количестве областей Z_p справедливо выражение

$$\begin{aligned} \frac{N}{M_0} = & \dot{\alpha}_1^* (2 - \eta_1) \int_0^{2\pi} L_{1a} d\nu_{21} + \dot{\alpha}_2^* \left[(2 - \eta_2) \int_0^{2\pi} L_{2a} d\nu_{22} + \right. \\ & \left. + 2 \left(D_2 \int_{\nu_{22} \in Z_{22}} \frac{L_{2a}}{R_2} d\nu_{22} + \int_{\nu_{22} \in Z_{21}} D_{2h} \frac{L_{2a}}{R_2} d\nu_{22} \right) \right]. \quad (28) \end{aligned}$$

Подставляя выражения (13), (14), (28) в (9) и учитывая, что $\dot{w}_c^*(t)$ и $\dot{\alpha}_i^*(t)$ независимы, получаем уравнения движения в случае деформирования по схеме 2:

$$(\rho \ddot{\alpha}_1 + K_v \dot{\alpha}_1 + K_e \alpha_1) \sum_{j=1,2} \iint_{Z_{1j}} \nu_{11}^2 dS_1 = P(t) \sum_{j=1,2} \iint_{Z_{1j}} \nu_{11} dS_1 - M_0 (2 - \eta_1) \int_0^{2\pi} L_{1a} d\nu_{21}; \quad (29)$$

$$\begin{aligned} (\rho \ddot{\alpha}_2 + K_v \dot{\alpha}_2 + K_e \alpha_2) \sum_{j=1,2} \iint_{Z_{2j}} \nu_{12}^2 dS_2 = & P(t) \sum_{j=1,2} \iint_{Z_{2j}} \nu_{12} dS_2 - \\ - M_0 \left[(2 - \eta_2) \int_0^{2\pi} L_{2a} d\nu_{22} + 2 \left(\int_{\nu_{22} \in Z_{21}} D_{2h} \frac{L_{2a}}{R_2} d\nu_{22} + D_2 \int_{\nu_{22} \in Z_{22}} \frac{L_{2a}}{R_2} d\nu_{22} \right) \right]; \quad (30) \end{aligned}$$

$$\rho \ddot{w}_c + K_v \dot{w}_c + K_e w_c = P(t). \quad (31)$$

Из условия непрерывности скоростей на границах областей Z_p и Z_{12} , Z_p и Z_{22} следует

$$\dot{\alpha}_i D_i = \dot{w}_c. \quad (32)$$

На всех границах областей Z_{i1} и Z_{i2} ($i = 1, 2$) выполняются соотношения

$$D_i(t) = D_{ih}(\bar{\nu}_{2i}(t), t), \quad (33)$$

где $\bar{\nu}_{2i}(t)$ — параметры, соответствующие границам областей Z_{i1} и Z_{i2} . При $t = 0$ пластина покоится:

$$\alpha_i(0) = \dot{\alpha}_i(0) = w_c(0) = \dot{w}_c(0) = 0. \tag{34}$$

Система уравнений (29)–(33) и уравнения (3), (6)–(8), определяющие положение шарнира l , описывают движение пластины в случае деформирования по схеме 2. В случае деформирования по схеме 1 области Z_p и Z_{i2} отсутствуют, а движение пластины определяется уравнениями (5), (29), (30) в отсутствие областей Z_{i2} и уравнениями (3), (6)–(8). В случае деформирования по схеме 3 области Z_{i1} и шарнир l отсутствуют, поведение пластины описывается уравнениями (29)–(32), где области Z_{i1} отсутствуют, а следовательно,

$$\int_{\nu_{22} \in Z_{22}} \frac{L_{2a}}{R_2} d\nu_{22} = \int_0^{2\pi} \frac{L_{2a}}{R_2} d\nu_{22} = \int_0^{2\pi} d\varepsilon_2 = 2\pi,$$

поскольку $\text{tg } \varepsilon_2 = -x'_2/y'_2$, $\varepsilon_2 = -\text{arctg}(x'_2/y'_2)$, $d\varepsilon_2 = (L_{2a}/R_2) d\nu_{22}$ (см. (21)).

Ниже проводится анализ деформирования пластины и определяются начальные значения $D_i(0)$, $\bar{\nu}_{2i}(0)$, $D_{ih}(\nu_{2i}, 0)$ на примере конкретной пластины.

2. Анализ деформирования пластины. Рассмотрим овальную пластину с круглым отверстием, находящуюся на вязком основании с коэффициентом сопротивления K_v (рис. 4).

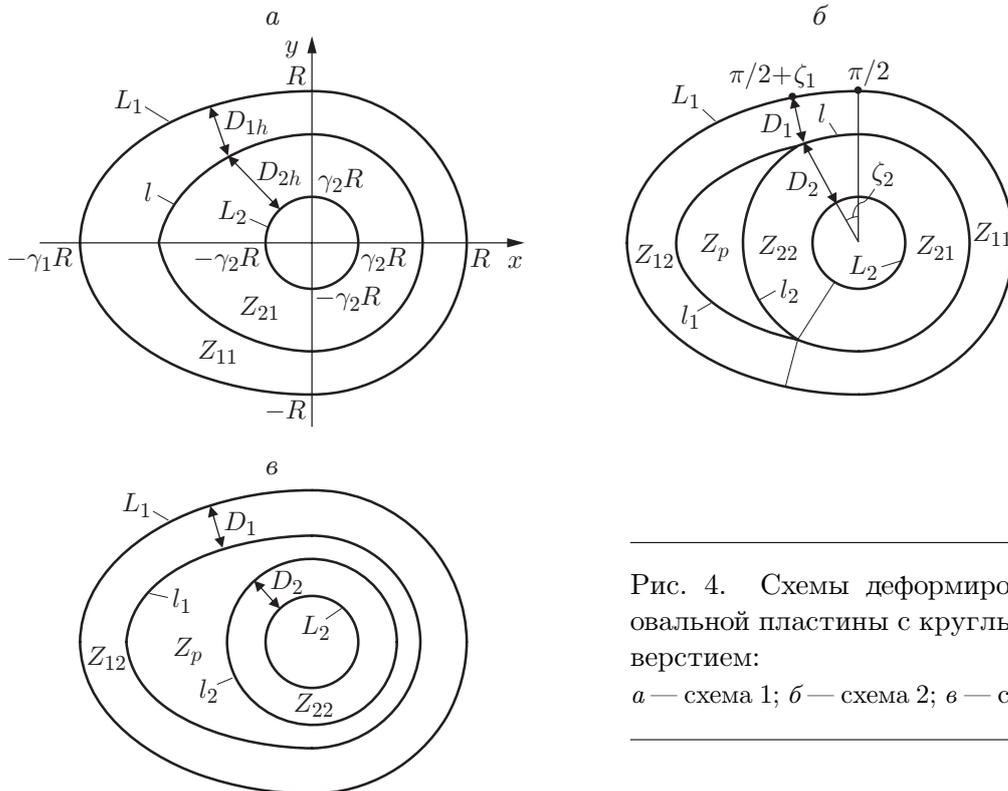


Рис. 4. Схемы деформирования овальной пластины с круглым отверстием:
 а — схема 1; б — схема 2; в — схема 3

Уравнения опорных контуров имеют параметрический вид

$$\begin{aligned} x &= R \cos \varphi_1, & y &= R \sin \varphi_1, & 0 \leq \varphi_1 \leq \pi/2, \\ L_1: \quad x &= \gamma_1 R \cos \varphi_1, & y &= R \sin \varphi_1, & \pi/2 \leq \varphi_1 \leq 3\pi/2, \\ x &= R \cos \varphi_1, & y &= R \sin \varphi_1, & 3\pi/2 \leq \varphi_1 \leq 2\pi, \\ L_2: \quad x &= \gamma_2 R \cos \varphi_2, & y &= \gamma_2 R \sin \varphi_2, & 0 \leq \varphi_2 \leq 2\pi, \end{aligned}$$

где $\gamma_1 \geq 1$; $\gamma_2 < 1$. Введем полярную систему координат (r, φ) с полюсом в центре отверстия L_2 . Координаты (ν_{12}, ν_{22}) , определяемые соотношениями (2), являются полярными координатами (r_2, φ_2) с началом отсчета от окружности $r = \gamma_2 R$, т. е. $r_2 = r - \gamma_2 R$, $\varphi_2 = \varphi$, $L_{2a}(\varphi_2) = \gamma_2 R$, $dS_2 = (\gamma_2 R + r_2) dr_2 d\varphi_2$. Координаты (ν_{11}, ν_{21}) являются координатами (r_1, φ_1) , которые при $0 \leq \varphi_1 \leq \pi/2$ и $3\pi/2 \leq \varphi_1 \leq 2\pi$ будут полярными координатами с началом отсчета от окружности $r = R$: $r_1 = -r + R$, $\varphi_1 = \varphi$, $dS_1 = (R - r_1) dr_1 d\varphi_1$, $L_{1a}(\varphi_1) = R$. При $\pi/2 \leq \varphi_1 \leq 3\pi/2$ координаты (r_1, φ_1) определяются соотношениями

$$\begin{aligned} x &= [\gamma_1 - r_1/L_{1a}(\varphi_1)]R \cos \varphi_1, & y &= [1 - \gamma_1 r_1/L_{1a}(\varphi_1)]R \sin \varphi_1, \\ L_{1a}(\varphi_1) &= R \sqrt{\gamma_1^2 \sin^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1}, & ds_1 &= \left(L_{1a} - r_1 \frac{\gamma_1 R^2}{L_{1a}^2} \right) dr_1 d\varphi_1. \end{aligned}$$

Из (3), (6)–(8) следует, что при деформировании пластины по схеме 1 линия l определена равенствами

$$D_{1h}(\varphi_1, t) = \begin{cases} \frac{1}{1-k^2} \left\{ \gamma_1 k R + \frac{L_{1a}}{\gamma_1} + \frac{b}{\gamma_1 L_{1a}} - \left[\left(\gamma_1 k R + \frac{L_{1a}}{\gamma_1} + \frac{b}{\gamma_1 L_{1a}} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + (1-k^2) \left(\gamma_2^2 R^2 - \frac{b(\gamma_1^2+1)}{\gamma_1^2} - \frac{L_{1a}^2}{\gamma_1^2} \right) \right]^{1/2} \right\}, & k \neq 1, \\ \frac{L_{1a}[b(\gamma_1^2+1) + L_{1a}^2 - \gamma_1^2 \gamma_2^2 R^2]}{2\gamma_1(\gamma_1 \gamma_2 R L_{1a} + L_{1a}^2 + b)}, & k(t) = 1, \\ \pi/2 \leq \varphi_1 \leq 3\pi/2, & \end{cases} \quad (35)$$

$$D_{1h}(\varphi_1, t) = R(1 - \gamma_2)/(1 + k), \quad 0 \leq \varphi_1 \leq \pi/2, \quad 3\pi/2 \leq \varphi_1 \leq 2\pi.$$

Здесь $b = R^2(\gamma_1^2 - 1) \cos^2 \varphi_1$. В этом случае равенство (6) принимает вид

$$D_{2h}(\varphi_2, t) = k(t) D_{1h}(\varphi_1, t), \quad (36)$$

где параметры φ_1 и φ_2 соответствуют одной и той же точке на шарнире l . Проецируя расстояния $D_{1h}(\varphi_1, t)$ и $D_{2h}(\varphi_2, t)$ на ось y (см. рис. 4, а) и учитывая (36), можно показать, что параметры φ_1 и φ_2 связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \varphi_1, & 0 \leq \varphi_1 \leq \pi/2, & \quad 3\pi/2 \leq \varphi_1 \leq 2\pi, \\ \sin \varphi_2 &= \frac{R \sin \varphi_1 - D_{1h}(\varphi_1, t) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_1} / (\gamma_1 |\operatorname{tg} \varphi_1|)}{k D_{1h}(\varphi_1, t) + \gamma_2 R}, & \pi/2 \leq \varphi_1 \leq 3\pi/2. \end{aligned} \quad (37)$$

При $P_{\max} > P_1$ в рассматриваемом случае область Z_p возникнет на линии l при $\varphi_i = \pi$. Обозначим границу между областями Z_{i1} и Z_{i2} через φ_{iD} ($\varphi_{iD} = \pi/2 + \zeta_i$ или $\varphi_{iD} = 3\pi/2 - \zeta_i$). Схема 2 движения изучаемой пластины показана на рис. 4, б ($0 \leq \zeta_i(t) \leq \pi/2$). При $\varphi_{iD} = \pi/2$; $3\pi/2$ (т. е. $\zeta_i(t) = 0$) схема 2 переходит в схему 3, в которой шарнир l отсутствует (рис. 4, в). Поле скоростей прогибов пластины можно представить следующим образом:

$$(r_i, \varphi_i) \in Z_{ij}: \quad \dot{u}(r_i, \varphi_i, t) = \dot{\alpha}_i(t) r_i, \quad (r_i, \varphi_i) \in Z_p: \quad \dot{u} = \dot{w}_c(t). \quad (38)$$

В случае схемы 2 уравнения движения (29)–(31) принимают вид

$$(\rho\ddot{\alpha}_i + K_v\dot{\alpha}_i)(\Sigma_{i1} + \Sigma_{i2}) = P(t)(\Sigma_{i3} + \Sigma_{i4}) - M_0\Sigma_{i5}; \quad (39)$$

$$\rho\ddot{w}_c + K_v\dot{w}_c = P(t), \quad (40)$$

где

$$\begin{aligned} \Sigma_{11}(\zeta_1, k) &= 2 \int_0^{\zeta_1+\pi/2} \int_0^{D_{1h}(\varphi_1, t)} r_1^2 dS_1 = \\ &= \frac{\pi R^4(1-\gamma_2)^3}{12(1+k)^3} \left(4 - 3 \frac{1-\gamma_2}{1+k}\right) + \frac{1}{6} \int_{\pi/2}^{\zeta_1+\pi/2} D_{1h}^3 \left(4L_{1a} - 3 \frac{\gamma_1 R^2}{L_{1a}^2} D_{1h}\right) d\varphi_1, \end{aligned}$$

$$\Sigma_{12}(\zeta_1, k) = 2 \int_{\zeta_1+\pi/2}^{\pi} \int_0^{D_1} r_1^2 dS_1 = \frac{D_1^3}{6} \left[4 \int_{\zeta_1+\pi/2}^{\pi} L_{1a} d\varphi_1 - 3D_1 \operatorname{arctg}(\gamma_1 \operatorname{ctg} \zeta_1)\right],$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{13}(\zeta_1, k) &= 2 \int_0^{\zeta_1+\pi/2} \int_0^{D_{1h}(\varphi_1, t)} r_1 dS_1 = \\ &= \frac{\pi R^3(1-\gamma_2)^2}{6(1+k)^2} \left(3 - 2 \frac{1-\gamma_2}{1+k}\right) + \frac{1}{3} \int_{\pi/2}^{\zeta_1+\pi/2} D_{1h}^2 \left(3L_{1a} - 2 \frac{\gamma_1 R^2}{L_{1a}^2} D_{1h}\right) d\varphi_1, \end{aligned}$$

$$\Sigma_{14}(\zeta_1, k) = 2 \int_{\zeta_1+\pi/2}^{\pi} \int_0^{D_1} r_1 dS_1 = \frac{D_1^2}{3} \left(3 \int_{\zeta_1+\pi/2}^{\pi} L_{1a} d\varphi_1 - 2D_1 \operatorname{arctg}(\gamma_1 \operatorname{ctg} \zeta_1)\right),$$

$$\Sigma_{15} = 2(2-\eta_1) \int_0^{\pi} L_{1a} d\varphi_1 = (2-\eta_1) \left(2 \int_{\pi/2}^{\pi} L_{1a} d\varphi_1 + \pi R\right) \approx (2-\eta_1)(3\gamma_1 + 7 - 2\sqrt{\gamma_1}) \frac{\pi R}{4},$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{21}(\zeta_2, k) &= 2 \int_0^{\zeta_2+\pi/2} \int_0^{D_{2h}(\varphi_2, t)} r_2^2 dS_2 = \\ &= \frac{\pi R^4 k^3(1-\gamma_2)^3}{12(1+k)^3} \left(4\gamma_2 + 3k \frac{1-\gamma_2}{1+k}\right) + \frac{1}{6} \int_{\pi/2}^{\zeta_2+\pi/2} D_{2h}^3 (4\gamma_2 R + 3D_{2h}) d\varphi_2, \end{aligned}$$

$$\Sigma_{22}(\zeta_2, k) = 2 \int_{\zeta_2+\pi/2}^{\pi} \int_0^{D_2} r_2^2 dS_2 = \frac{D_2^3}{6} (4\gamma_2 R + 3D_2) \left(\frac{\pi}{2} - \zeta_2\right),$$

$$\begin{aligned}\Sigma_{23}(\zeta_2, k) &= 2 \int_0^{\zeta_2+\pi/2} \int_0^{D_{2h}(\varphi_2, t)} r_2 dS_2 = \\ &= \frac{\pi R^3 k^2 (1 - \gamma_2)^2}{6(1+k)^2} \left(3\gamma_2 + 2k \frac{1 - \gamma_2}{1+k} \right) + \frac{1}{3} \int_{\pi/2}^{\zeta_2+\pi/2} D_{2h}^2 (3\gamma_2 R + 2D_{2h}) d\varphi_2,\end{aligned}$$

$$\Sigma_{24}(\zeta_2, k) = 2 \int_{\zeta_2+\pi/2}^{\pi} \int_0^{D_2} r_2 dS_2 = \frac{D_2^2}{3} (3\gamma_2 R + 2D_2) \left(\frac{\pi}{2} - \zeta_2 \right),$$

$$\begin{aligned}\Sigma_{25}(\zeta_2, k) &= (2 - \eta_2) \int_{L_2} L_{2a} d\varphi_2 + 2 \left[\int_{\varphi_2 \in Z_{21}} D_{2h} d\varphi_2 + 2D_2 \left(\frac{\pi}{2} - \zeta_2 \right) \right] = \\ &= 2(2 - \eta_2) \pi \gamma_2 R + 4 \left[\int_0^{\zeta_2+\pi/2} D_{2h} d\varphi_2 + D_2 \left(\frac{\pi}{2} - \zeta_2 \right) \right],\end{aligned}$$

величины $D_{ih}(\varphi_i, t)$ определяются соотношениями (35)–(37); $D_i = D_{ih}(\pi/2 + \zeta_i(t), t)$; для вычисления Σ_{15} используется приближенное равенство [7]

$$\int_{\pi/2}^{\pi} L_{1a}(\varphi_1) d\varphi_1 = \int_0^{\pi/2} L_{1a} d\varphi_1 \approx \pi R \frac{1,5(1 + \gamma_1) - \sqrt{\gamma_1}}{4}. \quad (41)$$

Из условия непрерывности скоростей на границах областей Z_p и Z_{i2} получаем

$$\dot{\alpha}_i D_i = \dot{w}_c. \quad (42)$$

На границах областей Z_{i1} и Z_{i2} ($\varphi_i = \varphi_{iD}$) выполняются соотношения (33)

$$D_i(t) = D_{ih}(\varphi_{iD}(t), t) \quad (i = 1, 2). \quad (43)$$

Из (6), (43) следует, что в случае схемы 2

$$D_2(t) = k(t) D_1(t). \quad (44)$$

Система (39), (40), (42)–(44) описывает движение пластины в случае деформирования по схеме 2. В случае схемы 1 области Z_p и Z_{i2} отсутствуют, а движение определяется уравнениями (5), (39) при $\zeta_i = \pi/2$. В случае схемы 3 области Z_{i1} ($i = 1, 2$) и шарнир l отсутствуют, движение описывается уравнениями (39), (40), (42) при замене $\Sigma_{i,j-1} + \Sigma_{ij}$ на $\bar{\Sigma}_{ij}$ и Σ_{i5} на $\bar{\Sigma}_{i5}$ ($j = 2, 4$) с учетом (41):

$$\begin{aligned}\bar{\Sigma}_{12}(D_1) &= 2 \left[\int_0^{\pi/2} \int_0^{D_1} r_1^2 (R - r_1) dr_1 d\varphi_1 + \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{D_1} r_1^2 \left(L_{1a} - r_1 \frac{\gamma_1 R^2}{L_{1a}^2} \right) dr_1 d\varphi_1 \right] = \\ &= \frac{D_1^3}{6} \left[\pi \frac{4R - 3D_1}{2} + \int_{\pi/2}^{\pi} \left(4L_{1a} - 3D_1 \frac{\gamma_1 R^2}{L_{1a}^2} \right) dr_1 d\varphi_1 \right] \approx \frac{D_1^3 \pi}{12} [R(7 + 3\gamma_1 - 2\sqrt{\gamma_1}) - 6D_1],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\Sigma}_{14}(D_1) &= 2 \left[\int_0^{\pi/2} \int_0^{D_1} r_1(R - r_1) dr_1 d\varphi_1 + \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{D_1} r_1 \left(L_{1a} - r_1 \frac{\gamma_1 R^2}{L_{1a}^2} \right) dr_1 d\varphi_1 \right] = \\ &= \frac{D_1^2}{3} \left[\pi \frac{3R - 2D_1}{2} + \int_{\pi/2}^{\pi} \left(3L_{1a} - 2D_1 \frac{\gamma_1 R^2}{L_{1a}^2} \right) dr_1 d\varphi_1 \right] \approx \frac{D_1^2 \pi}{6} \left[3R \frac{7 + 3\gamma_1 - 2\sqrt{\gamma_1}}{4} - 4D_1 \right], \\ \bar{\Sigma}_{22}(D_2) &= 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{D_2} r_2^2 (\gamma_2 R + r_2) dr_2 d\varphi_2 = \frac{\pi}{6} D_2^3 (4\gamma_2 R + 3D_2), \\ \bar{\Sigma}_{24}(D_2) &= 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{D_2} r_2 (\gamma_2 R + r_2) dr_2 d\varphi_2 = \frac{\pi}{3} D_2^2 (3\gamma_2 R + 2D_2), \\ \bar{\Sigma}_{15} &= \Sigma_{15}, \quad \bar{\Sigma}_{25} = 2\pi[(2 - \eta_2)\gamma_2 R + 2D_2].\end{aligned}$$

При $t = 0$ выполняются начальные условия (34). Начальные значения функций $k(t)$, $\zeta_i(t)$, $D_i(t)$ зависят от неизвестных размеров областей Z_p , Z_{ij} в момент $t = 0$ и определяются значением P_{\max} .

Пусть k_0 — значение $k(0)$ при $P_{\max} = P_0$. Тогда предельную нагрузку P_0 и величину k_0 можно определить из уравнений (39) при $\zeta_i = \pi/2$, считая $\ddot{\alpha}_i = 0$:

$$P_0 = M_0 \frac{\Sigma_{15}}{\Sigma_{13}(\pi/2, k_0)}, \quad \frac{\Sigma_{15}}{\Sigma_{13}(\pi/2, k_0)} = \frac{\Sigma_{25}(\pi/2, k_0)}{\Sigma_{23}(\pi/2, k_0)}.$$

На рис. 5 приведена зависимость безразмерной предельной нагрузки $p_0 = P_0 R^2 / M_0$ от размера отверстия γ_2 . В случае кольцевой пластины ($\gamma_1 = 1$) предельная нагрузка при $\gamma_2 > 0,3$ практически совпадает с нагрузкой, полученной в точном решении с использованием условий пластичности Треска [2, 4, 5] и Йогансена [3] при любом способе крепления контуров. С уменьшением размера отверстия различие результатов возрастает: при $\gamma_2 < 0,1$ в случае шарнирного опирания обоих контуров максимальное различие составляет приблизительно 15 %, в случае защемления обоих контуров — 2 %.

При $P_0 < P_{\max} \leq P_1$ (“средние” нагрузки), где P_1 — нагрузка, при которой появляются области Z_p и Z_{i2} , движение пластины происходит по схеме 1. Нагрузку P_1 определим следующим образом. Дифференцируя (42) по времени и исключая из полученного соотношения с помощью (39), (40) функции $\ddot{\alpha}_i$, \ddot{w}_c , получаем равенства

$$-\rho \dot{\alpha}_i \frac{\dot{D}_i}{D_i} (\Sigma_{i1} + \Sigma_{i2}) = P(t) \left(\Sigma_{i3} + \Sigma_{i4} - \frac{\Sigma_{i1} + \Sigma_{i2}}{D_i} \right) - M_0 \Sigma_{i5}. \quad (45)$$

При возникновении областей Z_p и Z_{i2} в начальный момент выполняются соотношения $P_{\max} = P_1$, $\dot{\alpha}_i(0) = 0$, $\zeta_i = \pi/2$. Пусть k_1 , D_i^* — значения $k(0)$, $D_i(0)$ при $P_{\max} = P_1$. Тогда из (45) следует, что нагрузка P_1 и величина k_1 определяются соотношениями

$$\begin{aligned}P_1 &= M_0 \frac{\Sigma_{15}}{\Sigma_{13}(\pi/2, k_1) - \Sigma_{11}(\pi/2, k_1)/D_1^*}, \\ \frac{\Sigma_{15}}{\Sigma_{13}(\pi/2, k_1) - \Sigma_{11}(\pi/2, k_1)/D_1^*} &= \frac{\Sigma_{25}(\pi/2, k_1)}{\Sigma_{23}(\pi/2, k_1) - \Sigma_{21}(\pi/2, k_1)/D_2^*}\end{aligned}$$

с учетом равенств (35), (43), (44) при $\zeta_i = \pi/2$, $k = k_1$. В результате имеем

$$D_1^* = R \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{1 + k_1}, \quad D_2^* = k_1 R \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{1 + k_1}.$$

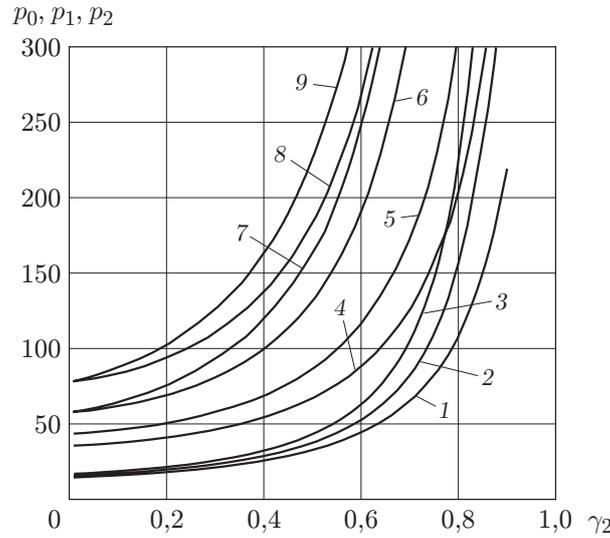


Рис. 5. Зависимости безразмерных предельной нагрузки p_0 (1–3) и нагрузок p_1 (4–9), p_2 (6–9) ($p_i = P_i R^2 / M_0$, $i = 0, 1, 2$) от размера γ_2 для овальной пластины с круглым отверстием:

1–3 — нагрузка p_0 в случае шарнирного опирания обоих контуров (1 — $\gamma_1 = 1,3$, 2 — $\gamma_1 = 1,15$, 3 — $\gamma_1 = 1$); 4, 5 — нагрузка p_1 в случае шарнирного опирания обоих контуров (4 — $\gamma_1 = 1,3$, 5 — $\gamma_1 = 1,15$); 6–9 — нагрузки p_1, p_2 при $\gamma_1 = 1$ (6 — шарнирное опирание обоих контуров, 7 — шарнирное опирание внешнего контура и защемление внутреннего контура, 8 — защемление внешнего контура и шарнирное опирание внутреннего контура, 9 — защемление обоих контуров)

Зависимость безразмерной нагрузки $p_1 = P_1 R^2 / M_0$ от параметра отверстия γ_2 приведена на рис. 5.

Определим начальное значение $k(0)$ при движении пластины по схеме 1. Интегрируя (39) по времени с учетом начальных условий (34), получаем

$$\rho \dot{\alpha}_i(t) = \exp\left(-\frac{K_v}{\rho} t\right) \int_0^t \exp\left(\frac{K_v}{\rho} \tau\right) \frac{P(\tau)\Sigma_{i3} - M_0 \Sigma_{i5}}{\Sigma_{i1}} d\tau.$$

Из последних равенств и (5) следует

$$k(t) = \left[\int_0^t \exp\left(\frac{K_v}{\rho} \tau\right) \frac{P(\tau)\Sigma_{13} - M_0 \Sigma_{15}}{\Sigma_{11}} d\tau \right] / \left[\int_0^t \exp\left(\frac{K_v}{\rho} \tau\right) \frac{P(\tau)\Sigma_{23} - M_0 \Sigma_{25}}{\Sigma_{21}} d\tau \right].$$

Переходя в этом равенстве к пределу $t \rightarrow 0$ по правилу Лопиталья и вводя обозначения $\Sigma_{ij}^a = \Sigma_{ij}(\pi/2, k(0))$ ($j = 1, 3, 5$), получаем уравнение

$$k(0) = \frac{(P_{\max} \Sigma_{13}^a - M_0 \Sigma_{15}) \Sigma_{21}^a}{(P_{\max} \Sigma_{23}^a - M_0 \Sigma_{25}) \Sigma_{11}^a} \quad (k_0 < k(0) \leq k_1, \quad P_0 < P_{\max} \leq P_1). \quad (46)$$

При $\zeta_i = \pi/2$ уравнения (5), (39) с начальными условиями (34), (46) определяют неизвестные функции $\dot{\alpha}_i(t)$ и $k(t)$, описывающие поведение пластины при “средних” нагрузках. Из (5) следует, что $\ddot{\alpha}_1 = \ddot{\alpha}_2 k + \dot{\alpha}_2 \dot{k}$. Подставляя в это равенство функции $\ddot{\alpha}_i(t)$, вычисленные из (39) при $\zeta_i = \pi/2$, получаем дифференциальное уравнение

$$\dot{\alpha}_2 [-\rho \dot{k} + K_v (1 - k)] = k \frac{P(t)\Sigma_{23}(\pi/2, k) - M_0 \Sigma_{25}(\pi/2, k)}{\Sigma_{21}(\pi/2, k)} - \frac{P(t)\Sigma_{13}(\pi/2, k) - M_0 \Sigma_{15}}{\Sigma_{11}(\pi/2, k)}. \quad (47)$$

При $i = 1$, $\zeta_1 = \pi/2$ система уравнений (5), (39), (47) решается численно методом Рунге — Кутты. Момент остановки пластины t_f определяется из условия

$$\dot{\alpha}_i(t_f) = 0. \quad (48)$$

При $P(t_f) = 0$ и $t = t_f$ из (47), (48) получаем уравнение для $k_f = k(t_f)$:

$$k_f \frac{\Sigma_{25}(\pi/2, k_f)}{\Sigma_{21}(\pi/2, k_f)} = \frac{\Sigma_{15}}{\Sigma_{11}(\pi/2, k_f)}. \quad (49)$$

Из (49) следует, что k_f не зависит от P_{\max} , вида функции нагружения и сопротивления основания K_v . Все прогибы вычисляются из соотношений (38).

При $P_1 < P_{\max} \leq P_2$ (“высокие” нагрузки), где P_2 — нагрузка, при которой области Z_{i1} и шарнир l перестают существовать, движение начинается с развитой областью Z_p . При этом сначала реализуется схема 2, а затем схема 1. Нагрузку P_2 определим следующим образом. Пусть k_2, D_i^{**} — значения $k(0), D_i(0)$ при $P_{\max} = P_2$. С учетом того, что при переходе схемы 1 в схему 2 в момент $t = 0$ выполняются соотношения $P_{\max} = P_2, \dot{\alpha}_i(0) = 0, \zeta_i = 0$, из (45) следует

$$\begin{aligned} P_2 &= M_0 \frac{\Sigma_{15}}{\Sigma_{13}(0, k_2) + \Sigma_{14}(0, k_2) - [\Sigma_{11}(0, k_2) + \Sigma_{12}(0, k_2)]/D_1^{**}}, \\ \Sigma_{15} \left(\Sigma_{23}(0, k_2) + \Sigma_{24}(0, k_2) - \frac{\Sigma_{21}(0, k_2)\Sigma_{22}(0, k_2)}{D_2^{**}} \right) &= \\ &= \Sigma_{25}(0, k_2) \left(\Sigma_{13}(0, k_2) + \Sigma_{14}(0, k_2) - \frac{\Sigma_{11}(0, k_2) + \Sigma_{12}(0, k_2)}{D_1^{**}} \right), \end{aligned} \quad (50)$$

где величины

$$D_1^{**} = R \frac{1 - \gamma_2}{1 + k_2}, \quad D_2^{**} = k_2 R \frac{1 - \gamma_2}{1 + k_2}$$

получены из равенств (35), (43), (44) при $\zeta_i = 0, k = k_2$.

При вычислении P_2 по формуле (50) установлено, что в рассматриваемом случае эта величина не зависит от параметра $\gamma_1 \geq 1$ и равна нагрузке P_2 при $\gamma_1 = 1$. В случае кольцевой пластины ($\gamma_1 = 1$) нагрузки P_1 и P_2 совпадают. Следовательно, для определения нагрузки P_2 для рассматриваемой пластины достаточно вычислить P_1 для кольцевой пластины с отверстием такого же размера при том же способе крепления контуров. Таким образом, кривые 6–9 на рис. 5 соответствуют также зависимости нагрузки $p_2 = P_2 R^2 / M_0$ от γ_2 при $\gamma_1 \geq 1$.

Определим начальные значения $k(0), D_{i0} = D_i(0), \zeta_i(0)$ в случае движения пластины под действием “высоких” нагрузок. При $t = 0, P = P_{\max}$, введя обозначения $\Sigma_{ij}^b = \Sigma_{ij}(\zeta_i(0), k(0))$ ($j = 1, \dots, 5$), из (45) получаем уравнения

$$P_{\max} [\Sigma_{i3}^b + \Sigma_{i4}^b - (\Sigma_{i1}^b + \Sigma_{i2}^b) / D_{i0}] = M_0 \Sigma_{i5}^b, \quad (51)$$

которые вместе с (43), (44) определяют значения $D_{i0}, \zeta_i(0), k(0)$ ($k_1 < k(0) \leq k_2$).

В первой фазе ($0 < t \leq t_1$) движение происходит в соответствии со схемой 2 и описывается уравнениями (39), (40), (42)–(44) с начальными условиями (34), (51) и (43), (44) при $D_i = D_{i0}, \zeta_i = \zeta_i(0), k = k(0)$. В этой фазе при уменьшении нагрузки размер области Z_p уменьшается ($\dot{D}_i > 0$) по закону (45). Система определяющих уравнений решается численно методом Рунге — Кутты. Время t_1 , соответствующее исчезновению областей Z_p , определяется из условия $\zeta_i(t_1) = \pi/2$. В этот момент вычисляются значения $\dot{w}_c(t_1), w_c(t_1), \dot{\alpha}_i(t_1), \alpha_i(t_1), k(t_1), D_i(t_1)$.

Во второй фазе ($t_1 < t \leq t_f$) движение происходит в соответствии со схемой 1 и описывается уравнениями (5), (39) при $\zeta_i = \pi/2$ с начальными условиями, определенными в конце первой фазы. Время t_f определяется из (48), при этом выполняется условие (49). Прогибы вычисляются из (38) с учетом всех фаз движения.

При $P_{\max} > P_2$ (“сверхвысокие” нагрузки) движение пластины происходит сначала по схеме 3, а затем последовательно по схемам 2 и 1. Уравнение (45) в случае схемы 3, т. е. при замене $\Sigma_{i,j-1} + \Sigma_{ij}$ на $\bar{\Sigma}_{ij}$ и Σ_{i5} на $\bar{\Sigma}_{i5}$ ($j = 2, 4$), принимает вид

$$-\rho \dot{\alpha}_i \dot{D}_i \bar{\Sigma}_{i2}/D_i = P(t)(\bar{\Sigma}_{i4} - \bar{\Sigma}_{i2}/D_i) - M_0 \bar{\Sigma}_{i5}. \quad (52)$$

Начальные значения D_{i0} определим из (52), считая $t = 0$, $P = P_{\max}$:

$$P_{\max}[\bar{\Sigma}_{i4}(D_{i0}) - \bar{\Sigma}_{i2}(D_{i0})/D_{i0}] = M_0 \bar{\Sigma}_{i5}. \quad (53)$$

В первой фазе ($0 < t \leq t_1$) движение происходит по схеме 3 и описывается уравнениями (39) (40), (42) (при замене $\Sigma_{i,j-1} + \Sigma_{ij}$ на $\bar{\Sigma}_{ij}$ и Σ_{i5} на $\bar{\Sigma}_{i5}$ ($j = 2, 4$)) с начальными условиями (34), (53). В этой фазе при уменьшении нагрузки размер области Z_p уменьшается ($\dot{D}_i > 0$) по закону (52). Система определяющих уравнений решается численно методом Рунге — Кутты. Время t_1 , соответствующее появлению областей Z_{i1} и шарнира l , определяется из условия соприкосновения областей Z_{12} и Z_{22} , которое имеет вид $R - D_1(t_1) = \gamma_2 R + D_2(t_1)$. В этот момент вычисляются значения $\dot{w}_c(t_1)$, $w_c(t_1)$, $\dot{\alpha}_i(t_1)$, $\alpha_i(t_1)$, $D_i(t_1)$.

Во второй фазе ($t_1 < t \leq t_2$) движение происходит по схеме 2 и описывается уравнениями (39), (40), (42)–(44) с начальными условиями, определенными в конце первой фазы движения, при $\zeta_i(t_1) = 0$. Кроме того, из (44) следует, что $k(t_1) = D_2(t_1)/D_1(t_1)$. Во второй ($t_1 < t \leq t_2$) и третьей ($t_2 < t \leq t_f$) фазах движение происходит так же, как в первой и второй фазах при “высоких” нагрузках. Время остановки t_f определяется условием (48). В этот момент выполняется условие (49). Все прогибы в пластине вычисляются из соотношений (38) с учетом всех фаз движения.

На рис. 6 показаны безразмерные прогибы $w(x/R)$ в сечении $y = 0$ овальной пластины ($\gamma_1 = 1, 3$) с круглым отверстием радиусом $0,1R$ ($w = uR^2\rho/(M_0T^2)$; T — время действия нагрузки). Оба контура пластины шарнирно оперты. Для такой пластины $p_0 = 16$ ($k_0 = 1,4$), $p_1 = 37,50$ ($D_1^* = 0,47R$, $D_2^* = 0,73R$, $k_1 = 1,54$), $p_2 = 61,29$ ($D_1^{**} = 0,34R$, $D_2^{**} = 0,56R$, $k_2 = 1,64$). На пластину действует “сверхвысокая” нагрузка в виде прямоугольного импульса: $P(t) = 67,42M_0/R^2$ при $0 \leq t \leq T$ и $P(t) = 0$ при $t > T$ ($P_{\max} = 1,1P_2$, $D_{10} = 0,32R$, $D_{20} = 0,53R$). Кривые 1–4 соответствуют прогибам в различные моменты времени в случае отсутствия сопротивления основания, кривая 5 — остаточным прогибам в случае вязкого сопротивления основания ($K_v = 0,5$). При этом $t_f = 2,65T$, а максимальный остаточный прогиб уменьшается в 2,2 раза по сравнению со случаем отсутствия сопротивления основания.

На рис. 7 показаны максимальные остаточные прогибы $w_{\max} = u_{\max}R^2\rho/(M_0T^2)$ в зависимости от параметра γ_2 для кольцевой пластины ($\gamma_1 = 1$) при $K_v = 0$ и различных способах крепления контуров под действием прямоугольной нагрузки с $P_{\max} = 322,25M_0/R^2$, полученные в соответствии с предложенным решением (линии 1, 4, 7, 10) и вычисленные на основе точного решения при условии пластичности Йогансена (линии 2, 5, 8) в работе [3]. Кривые 3, 6, 9, 11 соответствуют максимальным остаточным прогибам, полученным в результате расчетов без учета образования области Z_p (по схеме 1). Кривые, соответствующие трем сравниваемым решениям, качественно согласуются. При увеличении размера отверстия γ_2 кривые сближаются и начиная с некоторого значения γ_2 совпадают. Максимальное различие результатов, полученных по предлагаемой методике с учетом и без учета образования области Z_p при $\gamma_2 = 0,2$, в случае шарнирного опирания обоих контуров (кривые 1, 3) составляет 13 %, в случае их защемления (кривые 10, 11) — 8 %.

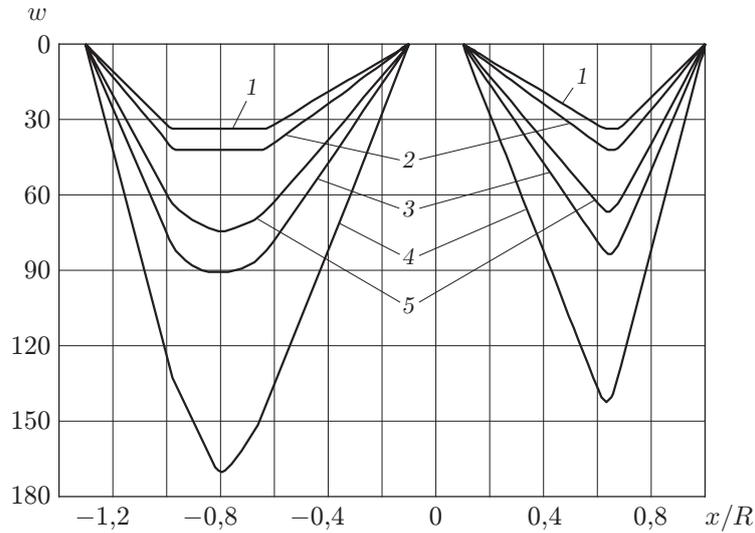


Рис. 6. Безразмерные прогибы w в сечении $y = 0$ овальной пластины, шарнирно опертой по обоим контурам, при $\gamma_1 = 1,3, \gamma_2 = 0,1$:

1-4 — прогибы при $K_v = 0$ в различные моменты времени (1 — $t = T$; 2 — $t = t_1 = 1,12T$; 3 — $t = t_2 = 1,84T$; 4 — $t = t_f = 4,24T \approx P_{\max}/P_0$); 5 — остаточные прогибы при $K_v = 0,5$ в момент времени $t_f = 2,65T$

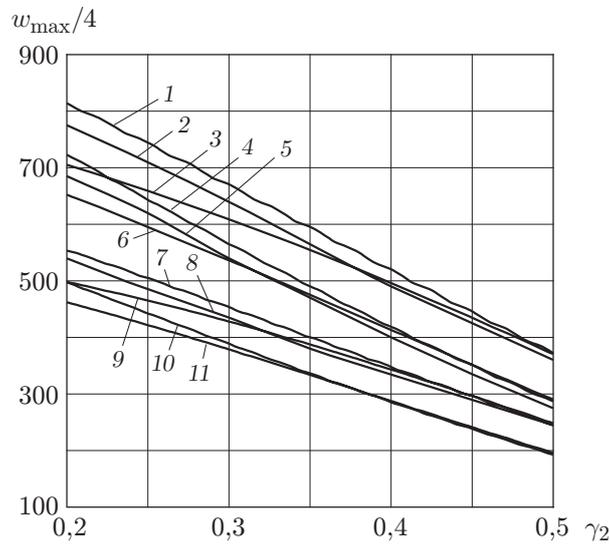


Рис. 7. Безразмерные максимальные остаточные прогибы w_{\max} кольцевой пластины ($\gamma_1 = 1$), полученные с использованием различных подходов:

1, 4, 7, 10 — на основе предложенного решения, 2, 5, 8 — на основе точного решения при условии пластичности Йогансена [3], 3, 6, 9, 11 — в результате расчетов без учета образования области Z_p (по схеме 1); 1-3 — шарнирное опирание обоих контуров ($\eta_1 = \eta_2 = 1$), 4-6 — шарнирное опирание внешнего контура и защемление внутреннего контура ($\eta_1 = 1, \eta_2 = 0$), 7-9 — защемление внешнего контура и шарнирное опирание внутреннего контура ($\eta_1 = 0, \eta_2 = 1$), 10, 11 — защемление обоих контуров ($\eta_1 = \eta_2 = 0$)

При $\gamma_2 = 0,2$ максимальное различие результатов, полученных по предлагаемой методике с учетом образования области Z_p , и результатов, полученных в работе [3], при любом способе крепления контуров составляет 5 %.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Немировский Ю. В., Романова Т. П.** Пластическое деформирование двусвязных пластин с криволинейным контуром при динамических нагрузках // Актуальные проблемы динамики и прочности в теоретической и прикладной механике. Минск: Технопринт, 2001. С. 515–525.
2. **Мазалов В. Н.** Динамический изгиб кольцевых жесткопластических пластин с неподвижными круговыми контурами // Динамика сплошной среды / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1973. Вып. 14. С. 57–66.
3. **Niepostyn D., Stanczyk A.** Pulse load of annular plastic plates supported on both edges // Arch. Mech. 1981. V. 33, N 5. P. 675–689.
4. **Мруз З., Савчук А.** Несущая способность кольцевых пластин, закрепленных по обеим кромкам // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. Механика и машиностроение. 1960. № 3. С. 72–78.
5. **Hodge P. G.** Yield point of an annular plate // Trans. ASME. J. Appl. Mech. Ser. E. 1959. V. 26, N 3. P. 454–455.
6. **Ерхов М. И.** Теория идеально пластических тел и конструкций. М.: Наука, 1978.
7. **Бронштейн И. Н.** Справочник по математике / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. М.: Наука, 1986. С. 140.

*Поступила в редакцию 11/VI 2009 г.,
в окончательном варианте — 22/III 2010 г.*
