

УДК 539.4 — 518.12

РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПО ВЕСУ МНОГОСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕЧНЫХ ИЗДЕЛИЙ ИЗ КОМПОЗИТОВ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ СОВОКУПНОСТИ НАГРУЗОК

В. И. Бутырин, В. Н. Максименко, Л. В. Павшок, Б. С. Резников

Новосибирский государственный технический университет, 630092 Новосибирск
E-mail: v.butyrin@ngs.ru

С использованием кинематических и статических гипотез, которые позволяют учитывать поперечные сдвиговые напряжения, удовлетворяющие необходимым уравнениям состояния, условиям непрерывности на границе слоев и заданным граничным условиям, проведен анализ напряженно-деформированного состояния осесимметричных многослойных оболочек. Для оценки применимости используемых уравнений изгиба многослойных оболочек проведено сравнение численного решения задачи о напряженно-деформированном состоянии для многослойного стержня с решением Лехницкого (при нагружении консольного стержня сосредоточенной силой и моментом). Показано, что эти решения хорошо согласуются. С использованием феноменологических критериев прочности для каждого слоя сформулирована задача о начальном разрушении рассматриваемых оболочек. Для решения задач оптимизации по весу многослойных оболочек из композитных материалов при комбинированном нагружении предложен метод покоординатного спуска на единичном отрезке. Для многослойного стержня, находящегося под действием равномерно распределенной нагрузки и сосредоточенной силы, определены области безопасных эксплуатационных нагрузок и оптимальное по весу распределение толщин слоев.

Ключевые слова: многослойные оболочки, композитные материалы, совокупность нагрузок, прочность, оптимальное проектирование по весу, метод покоординатного спуска на единичном отрезке.

Введение. Основные работы, в которых обобщены результаты исследований теории слоистых анизотропных оболочек и пластин, представлены в [1–7]. В [6] указаны методы, используемые для вывода двумерных уравнений слоистых анизотропных оболочек: метод асимптотического интегрирования уравнений пространственной задачи теории упругости, метод разложения в ряды по некоторой системе функций поперечной координаты, метод гипотез для каждого слоя или пакета слоев в сочетании с вариационными принципами Лагранжа и Рейсснера. В соответствии с принятой в [6] кинематической гипотезой распределение сдвиговых напряжений по поперечной координате имеет такой характер, что их максимальное значение всегда достигается на срединной поверхности оболочки независимо от структуры многослойного пакета. Это противоречит результатам, полученным для многослойных стержней [7]. В [7] распределения напряжений и смещений в случае изгиба слоистых балок получены из уравнений равновесия сплошной среды с помощью

функции напряжений в виде целых полиномов. Указанным способом удается получить решение лишь для случая ортотропной консоли, изгибаемой силой и моментом.

1. Формулировка основных статических и кинематических гипотез. Рассмотрим ортотропные осесимметричные оболочки, нагружение и закрепление которых не зависят от угловой координаты φ , а оси ортотропии совпадают с линиями кривизны отсчетной поверхности. В этом случае все величины не зависят от φ и сдвиговые деформации равны нулю: $\varepsilon_{x\varphi} = \varepsilon_{z\varphi} = 0$. В данной работе используются следующие обозначения: OX , OZ — оси координат, направленные вдоль меридиана и по нормали к отсчетной поверхности оболочки соответственно; u_k , w_k ($k = 1, 2, \dots, n$) — смещения вдоль осей OX , OZ k -го слоя; σ_{xk} , $\sigma_{\varphi k}$, σ_{xzk} — нормальные и касательные напряжения в k -м слое; в качестве отсчетной поверхности принята верхняя лицевая поверхность оболочки; h_k — расстояние от верхней кромки оболочки до нижней границы k -го слоя ($h_0 = 0$, $h_n = h$, n — число слоев); R_1 , R_2 и A_1 , A_2 — радиусы кривизны и параметры Ламе отсчетной поверхности оболочки соответственно.

Результаты экспериментов [8–12] показывают, что во многих случаях разрушение вследствие действия поперечных сдвиговых напряжений ограничивает несущую способность конструкций из композитных материалов. Учет обжатия оказывает существенно меньшее влияние на напряженно-деформированное состояние конструкции по сравнению с учетом поперечных сдвигов [9]. Поэтому будем считать

$$\varepsilon_{zk} = 0, \quad w_k = w(x), \quad \sigma_{zk} \ll \sigma_{xk}, \quad \sigma_{zk} \ll \sigma_{\varphi k}, \quad \sigma_{zk} \ll \sigma_{xzk}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

В этом случае уравнения обобщенного закона Гука для k -го слоя записываются в виде

$$\sigma_{xk} = a_{11k}\varepsilon_{xk} + a_{12k}\varepsilon_{\varphi k}, \quad \sigma_{\varphi k} = a_{12k}\varepsilon_{xk} + a_{22k}\varepsilon_{\varphi k}, \quad \sigma_{xzk} = a_{13k}\varepsilon_{xzk}. \quad (2)$$

В общем случае коэффициенты $a_{\alpha\alpha k}$, a_{1ik} ($k = 1, 2, \dots, n$, $\alpha = 1, 2$, $i = 2, 3$) могут быть произвольными непрерывными функциями координаты z .

Обобщая результаты [7] для случая осесимметричных оболочек, как и в [13], в качестве статической гипотезы (наряду с предположениями (1)) примем следующее распределение по координате z поперечных сдвиговых напряжений для k -го слоя:

$$\sigma_{xzk} = \gamma(x) \sum_{i=1}^3 iz^{i-1} C_{ik} \quad \forall z \in [h_{k-1}; h_k], \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Здесь постоянные C_{ik} определяются по формулам [7]

$$C_{1k} = \frac{6}{S} \left[S_1 \left(\sum_{i=1}^{k-1} (h_i^2 - h_{i-1}^2) a_i - h_{k-1}^2 a_k \right) - S_2 \left(\sum_{i=1}^{k-1} (h_i - h_{i-1}) a_i - h_{k-1} a_k \right) \right],$$

$$C_{2k} = -\frac{3S_2 a_k}{S}, \quad C_{3k} = \frac{2S_1 a_k}{S},$$

$$S_l = \sum_{k=1}^n (h_k^l - h_{k-1}^l), \quad l = 1, 2, 3, \quad S = 4S_1 S_3 - 3S_2^2, \quad a_i = a_{11k} + a_{22k}.$$

Подставляя в (3) третье соотношение (2) для деформации поперечного сдвига и интегрируя полученное соотношение, имеем следующее представление для смещения вдоль координаты z k -го слоя:

$$u_k(x, z) = u(x) - \frac{z}{A_1} \frac{dw}{dx} + \frac{\gamma(x)}{a_{13k}} \sum_{\alpha=0}^3 z^\alpha C_{\alpha k}, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Здесь

$$C_{01} = 0, \quad C_{0k+1} = \frac{a_{13k+1}}{a_{13k}} \sum_{\alpha=0}^3 h_k^\alpha C_{\alpha k} - \sum_{\alpha=1}^3 h_k^\alpha C_{\alpha k+1}.$$

В (4) и далее величинами порядка z/R_i в силу их малости по сравнению с единицей можно пренебречь.

Распределение меридионального смещения (4) учитывает поперечные сдвиговые напряжения (в каждом слое), удовлетворяющие нулевым граничным условиям при $z = 0$ и $z = h$, и обеспечивает выполнение всех условий непрерывности для меридиональных смещений и сдвиговых напряжений на поверхностях раздела слоев при значениях $z = h_k$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$).

2. Уравнения равновесия и краевые условия линейной теории многослойных анизотропных оболочек. Для получения дифференциальных уравнений равновесия рассматриваемых оболочек используем принцип возможных перемещений, который позволяет получить систему обобщенных внутренних усилий, соответствующих независимым обобщенным кинематическим характеристикам принятой модели, уравнения равновесия и естественные краевые условия, согласованные с принятыми гипотезами.

Для многослойной анизотропной оболочки, находящейся в состоянии равновесия, принцип возможных перемещений имеет вид

$$\delta\Pi = \delta E + \delta A, \quad (5)$$

где $\delta\Pi$ — виртуальная работа внутренних сил; δE — виртуальная работа внешних распределенных нагрузок, действующих на лицевых поверхностях оболочки $z = 0$ и $z = h$; δA — виртуальная работа сил, приложенных к торцам оболочки $x = l_1$, $x = l_2$.

Для вариации потенциальной энергии деформации имеем выражение

$$\delta\Pi = \int_0^{2\pi} \int_{l_1}^{l_2} \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} (\sigma_{xi} \delta\varepsilon_{xi} + \sigma_{\varphi i} \delta\varepsilon_{\varphi i} + \sigma_{xzi} \delta\varepsilon_{xzi}) A_1 A_2 dz dx d\varphi. \quad (6)$$

Виртуальные работы δE и δA определяются следующим образом:

$$\delta E = \int_0^{2\pi} \int_{l_1}^{l_2} q(x) \delta w A_1 A_2 dx d\varphi, \quad (7)$$

$$\delta A = \int_0^{2\pi} \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} (P_{xi}^0(l_\alpha, z) \delta u_i(l_\alpha, z) + P_{zi}^0(l_\alpha, z) \delta w(l_\alpha)) A_2 dz d\varphi.$$

Здесь $q(x)$ — распределенная нагрузка, приложенная к отсчетной поверхности оболочки; $P_{xi}^0(l_\alpha, z)$, $P_{zi}^0(l_\alpha, z)$ — распределенные нагрузки в i -м слое ($i = 1, 2, \dots, n$), приложенные в сечениях $x = l_\alpha$ ($\alpha = 1, 2$) и направленные вдоль осей OX и OZ соответственно.

Используя (4)–(7), соотношения Коши для деформаций и учитывая, что все величины не зависят от угловой координаты φ , а вариации δu , δw , $\delta\gamma$ в интегралах по переменной x (после интегрирования по частям) и вариации δu , δw , $\delta w'$, $\delta\gamma$ на границах $x = l_1$, $x = l_2$ независимы, получаем систему дифференциальных уравнений равновесия элемента

многослойной оболочки

$$\begin{aligned} (A_2 T_x)' - A_2' T_\varphi - \frac{A_1 A_2}{R_1} \tilde{Q} &= 0, & \frac{T_x}{R_1} + \frac{T_\varphi}{R_2} + \frac{(A_2 \tilde{Q})'}{A_1 A_2} + q(x) &= 0, \\ (A_2 M_x)' - A_2' M_\varphi - A_1 A_2 \tilde{Q} &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

и граничные условия на торцах $x = l_1, x = l_2$

$$\begin{aligned} [T_x - T_x^0] \delta u &= 0, & [(A_2 M_x)' - A_2' M_\varphi - A_1 A_2 Q^0] \delta w &= 0, \\ [M_x - M_x^0] \delta(w') &= 0, & [\tilde{M}_x - \tilde{M}_x^0] \delta \gamma &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} T_{x(\varphi)} &= \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{x(\varphi)k} dz, & M_{x(\varphi)} &= \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{x(\varphi)k} z dz, \\ \tilde{Q} &= \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \frac{\sigma_{zk} f_k(z)}{a_{13k}} dz - \frac{1}{A_1 A_2} \{ [A_2(\tilde{M}_x - M_x)]' - A_2'(\tilde{M}_\varphi - M_\varphi) \}, \\ \tilde{M}_{x(\varphi)} &= \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{x(\varphi)k} \Phi_k(z) dz, & T_x^0 &= \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} P_{zk}^0 dz, & M_x^0 &= \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} P_{zk}^0 z dz, \\ Q^0 &= \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} P_{zk}^0 dz, & \tilde{M}_x^0 &= \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} P_{zk}^0 \Phi_k(z) dz, \\ f_k(z) &= \sum_{i=1}^3 i z^{i-1} C_{ik}, & \Phi_k(z) &= \frac{1}{a_{13k}} \sum_{i=0}^3 z^i C_{ik} \quad (k = 1, \dots, n), \end{aligned}$$

штрих обозначает производную по переменной x .

Из соотношений (9) можно получить различные варианты граничных условий для рассматриваемого класса внешних нагрузок, действующих на оболочку. В частности, в случае жесткой заделки края оболочки имеем $u = w = w' = \gamma = 0$. Эти условия, в отличие от условий в теории, рассмотренной в [6], соответствуют нулевому смещению в меридиональном направлении по всему сечению оболочки. Если на краю оболочки приложены распределенные усилия, то выполняются краевые условия для усилий и моментов в (9).

Используя соотношения (4), выражения для деформации и обобщенный закон Гука (1), сведем систему уравнений (8) к разрешающей системе трех дифференциальных уравнений восьмого порядка (для любого числа слоев) относительно функций $u(x), w(x), \gamma(x)$.

Следует отметить, что при использовании обобщенных гипотез С. П. Тимошенко полученные уравнения при $n = 1$ переходят в уравнения равновесия для однородных осесимметричных оболочек [14].

3. Начальное разрушение оболочек при комбинированном нагружении. Если решение системы уравнений (8) при соответствующих граничных условиях найдено, то, используя соотношения обобщенного закона Гука (1), можно определить напряжения в каждом слое оболочки. При решении задачи о начальном разрушении оболочки используем

феноменологический критерий прочности, который для k -го слоя в общем случае плоского напряженного состояния имеет вид [10, 15]

$$f_{11(k)}\sigma_{xk} + f_{22(k)}\sigma_{\varphi k} + f_{1111(k)}\sigma_{xk}^2 + f_{2222(k)}\sigma_{\varphi k}^2 + 2f_{1122(k)}\sigma_{xk}\sigma_{\varphi k} + f_{1212(k)}\sigma_{xz k}^2 = 1, \quad (10)$$

где коэффициенты $f_{\alpha\alpha(k)}$, $f_{\alpha\alpha\alpha\alpha(k)}$, $f_{\alpha\beta\alpha\beta(k)}$, $f_{\alpha\alpha\beta\beta(k)}$ ($\alpha = 1, 2$, $\beta = 1, 2$, $k = 1, 2, \dots, n$) определяются в [15] с использованием экспериментальных данных; $\sigma_{1(k)}^{\pm}$, $\sigma_{2(k)}^{\pm}$, $\tau_{12(k)}$ — пределы прочности в направлении армирования, трансверсальном направлении и предел прочности на сдвиг в плоскости слоя для однонаправленного армированного слоя (знак “+” соответствует растяжению, знак “−” — сжатию).

С использованием критериев прочности (10) задачу о разрушении рассматриваемой оболочки при комбинированном нагружении p_j ($j = 1, 2, \dots, N$) сформулируем следующим образом: при заданных геометрических параметрах оболочки, количестве ее слоев, их относительных толщинах, механических характеристиках каждого слоя определить в N -мерном пространстве нагрузок p_j ($j = 1, 2, \dots, N$) замкнутую поверхность (поверхность прочности), такую что если вектор нагрузок находится внутри этой поверхности, то оболочка деформируется упруго, а если вектор нагрузок лежит на поверхности, то хотя бы в одном из слоев оболочки начнется разрушение. Следует отметить, что если вектор нагрузок лежит на поверхности, то это может соответствовать появлению разрушения одновременно в нескольких слоях и в различных областях (точках) оболочки. Для построения указанной поверхности прочности используем принцип независимости действия сил и алгоритм, приведенный в работе [16].

4. Напряженно-деформированное состояние и прочность консольного стержня. В качестве примера рассмотрим консольную многослойную балку, находящуюся под действием системы независимых нагрузок: распределенной нагрузки синусоидального типа p_0 , равномерно распределенной нагрузки p_1 , сосредоточенной силы p_2 и момента p_3 на торце. Для данной конструкции разработана методика численного исследования напряженно-деформированного состояния и начального разрушения. Проведено сравнение решения задачи о напряженно-деформированном состоянии с решением Лехницкого [7] для двухслойной балки ($n = 2$), находящейся под действием сосредоточенной силы p_2 , приложенной на торце, при следующих значениях параметров: $\beta = 10$, $\bar{a}_{111} = 2$, $\bar{a}_{112} = 18$, $\bar{a}_{131} = 1$, $\bar{a}_{132} = 9$ ($\beta = l/h$ — относительная длина балки; $\bar{a}_{1\alpha k} = a_{1\alpha k}/a_{131}$, $\alpha = 1, 3$, $k = 1, 2$). На рис. 1,а представлено распределение нормальных напряжений $\bar{\sigma}_{x1} = h\sigma_{x1}/p_2$ по оси стержня на его поверхности при $\eta = z/h = 0$, а на рис. 1,б — распределение нормальных напряжений $\bar{\sigma}_{xk} = h\sigma_{xk}/p_2$ по сечению стержня в заделке при $\xi = x/l = 0$.

На рис. 2 показана граница области разрушающих нагрузок $p_2 = p_2(p_1)$ в случае, когда на балку действуют равномерно распределенная и сосредоточенная нагрузки при $n = 4$, $\bar{a}_{112} = \bar{a}_{113} = 2$, $\bar{a}_{131} = \bar{a}_{134} = 1$, $\bar{a}_{132} = \bar{a}_{133} = 0,5$, $\beta = 10$, $\bar{a}_{111} = \bar{a}_{114} = 10$, $\sigma_{1(1)}^+ = \sigma_{1(4)}^+ = 1800$ МПа, $\sigma_{1(1)}^- = \sigma_{1(4)}^- = 600$ МПа, $\sigma_{1(2)}^+ = \sigma_{1(3)}^+ = 60$ МПа, $\tau_{12(k)} = 45$ МПа, $\sigma_{1(2)}^- = \sigma_{1(3)}^- = 160$ МПа ($k = 1, 2, 3, 4$).

5. Оптимальное проектирование по весу многослойных оболочечных изделий из композитных материалов. Постановка задачи, основные допущения. Пусть для конструкции известны следующие параметры:

- количество n слоев заданной ориентации (под слоем будем понимать набор всех монослоев с одинаковой ориентацией);
- упругие характеристики композитного материала: модули упругости E_1 , E_2 , G_{12} , коэффициенты Пуассона ν_1 , ν_2 , а также удельная плотность материала k -го слоя γ_k ;
- пределы прочности $\sigma_{1(k)}^{\pm}$, $\sigma_{2(k)}^{\pm}$, $\tau_{12(k)}$ для однонаправленно армированного слоя;

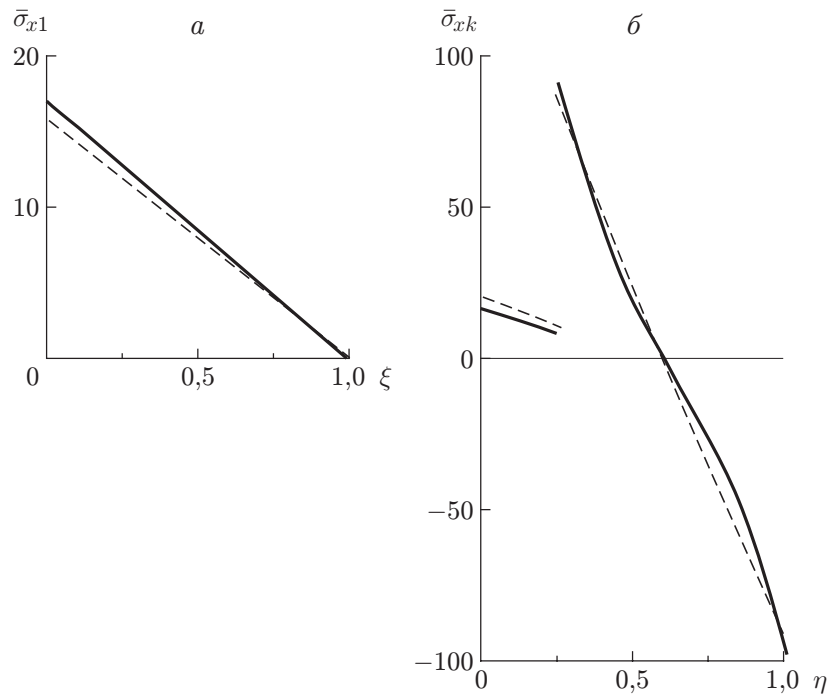


Рис. 1. Распределения нормального напряжения по оси стержня на его поверхности $\eta = 0$ (а) и по сечению стержня в заделке $\xi = 0$ (б): сплошные линии — результаты расчетов, полученные в данной работе; штриховые — результаты расчетов по соотношениям Лехницкого [7]

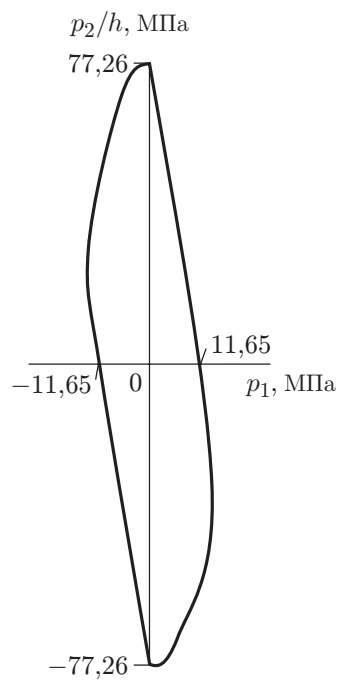


Рис. 2. Граница области разрушающих нагрузок для консольной балки, находящейся под действием распределенной нагрузки и сосредоточенной силы на торце

— постоянная ориентация φ_k ($k = 1, \dots, n$) каждого слоя относительно выбранной системы координат XOY ;

— статические нагрузки $p^l = (p_0^l, p_1^l, p_2^l, p_3^l)$ ($l = 1, \dots, L$), действующие на конструкцию.

Варьируемыми параметрами являются толщины слоев h_k . Необходимо определить минимальный вес композитной оболочечной конструкции

$$V = \sum_{k=1}^n h_k \gamma_k \rightarrow \min, \quad h_k \geq 0$$

при условии обеспечения прочности одновременно для всех слоев и для всех L вариантов статических нагрузок при заданном критерии разрушения.

Для решения задачи оптимизации конструкции целесообразно использовать феноменологический критерий прочности, который для k -го слоя записывается в виде [15]

$$G_{ji}^k \varepsilon_j^l \varepsilon_i^l + G_j^k \varepsilon_j^l \leq 1, \quad k = 1, \dots, n, \quad l = 1, \dots, L, \quad j = 1, 2, 3, \quad i = 1, 2, 3. \quad (11)$$

Здесь $\varepsilon_1^l = \varepsilon_x^l$, $\varepsilon_2^l = \varepsilon_y^l$, $\varepsilon_3^l = \gamma_{xy}^l$ — деформации пакета слоев в системе координат XOY при l -м варианте нагружения. Постоянные G_{ji}^k , G_j^k вычисляются через упругие и прочностные характеристики материала, а также через углы ориентации k -го слоя.

Введем обозначения

$$\Phi_l^k = G_{ji}^k \varepsilon_j^l \varepsilon_i^l + G_j^k \varepsilon_j^l, \quad \Phi = \max_{k,l} \{\Phi_l^k\}, \quad k = 1, \dots, n, \quad l = 1, \dots, L.$$

Тогда совокупность ограничений типа (11) можно представить в виде

$$\Phi(h_1, \dots, h_n) \leq 1. \quad (12)$$

Далее разбиваем конструкцию в меридиональном направлении с заданным шагом и применяем формулу (12) для каждого узла.

6. Метод покоординатного спуска на единичном отрезке для весового проектирования композитных оболочек. Для решения задачи весовой оптимизации композитных оболочек предлагается использовать метод покоординатного спуска на единичном отрезке [17]. Для создания эффективного алгоритма оптимизации вводятся новые проектные параметры, областью изменения которых является единичный отрезок $\omega_k = h_k \gamma_k / V$ ($k = 1, \dots, n$). Значения ω_k принадлежат отрезку $[0, 1]$. Зафиксируем произвольно выбранный номер j , так чтобы выполнялись неравенства $1 \leq j \leq n$. Пусть

$$\omega^* = \max_{k \neq j} (\omega_k), \quad k = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, n.$$

Введем дополнительные параметры $\tilde{\omega}_k = \omega_k / \omega^*$, $k = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, n$. При известных значениях V , j , ω_j , $\tilde{\omega}_k$ ($k \neq j$) толщина каждого слоя определяется однозначно [17]:

$$h_j = \frac{\omega_j V}{\gamma_j}, \quad h|_{k \neq j} = \frac{\omega_k V}{\gamma_k} = \frac{\omega^* \tilde{\omega}_k V}{\gamma_k} = (1 - \omega_j) \tilde{\omega}_k V / \left(\gamma_k \sum_{k=1, k \neq j}^n \tilde{\omega}_k \right). \quad (13)$$

Подставим формулы (13) в (12). При фиксированных значениях $\tilde{\omega}_k$ для огибающей функции ограничений получаем неявную зависимость веса конструкции от относительного веса j слоя $\Phi(\omega_j, V) = 1$.

Вес конструкции минимизируется последовательно с использованием метода весовой оптимизации композитных конструкций на конечном отрезке [17].

7. Пример оптимизации. Рассматривается консольный стержень длиной $l = 10$ м, нагруженный на свободном торце сосредоточенной силой $L_2 = 10^6$ Н. Стержень сформирован из четырех слоев. Первый, второй и четвертый слои изготовлены из материала HMS/3002M, имеющего следующие упругие и прочностные характеристики: $E_1 = 185$ ГПа, $E_2 = 6,76$ ГПа, $G_{12} = 5,86$ ГПа, $\nu_1 = 0,2$, $X_t = 680$ МПа, $X_c = 690$ МПа, $Y_t = 16$ МПа, $Y_c = 186$ МПа, $S = 72$ МПа. В первом и четвертом слоях волокна расположены вдоль продольной оси балки, во втором слое — поперек, третий слой выполнен из легкого заполнителя с относительным удельным весом, равным отношению удельного веса заполнителя к удельному весу несущих слоев $\bar{\gamma} = 0,1$, и следующими упругими характеристиками: $E_1 = 0,76$ ГПа, $E_2 = 0,76$ ГПа, $G_{12} = 0,86$ ГПа, $\nu_1 = 0,2$, $X_t = 7$ МПа, $X_c = 7$ МПа, $Y_t = 7$ МПа, $Y_c = 7$ МПа, $S = 2$ МПа. В результате решения задачи оптимизации получены следующие значения толщин слоев: $h_1 = 3,32 \cdot 10^{-2}$ м, $h_2 = 1,24 \cdot 10^{-4}$ м, $h_3 = 5,02 \cdot 10^{-2}$ м, $h_4 = 2,43 \cdot 10^{-2}$ м.

Заключение. На основе теории, используемой для определения напряженно-деформированного состояния и области допустимых эксплуатационных нагрузок многослойных композитных оболочек, предложен метод весовой оптимизации указанных конструкций на конечном отрезке. Данный подход позволяет применять эффективные методы нелинейного программирования (метод половинного деления и метод “золотого сечения”). При наличии ограничений по прочности слоев композитных оболочек уравнения изгиба оболочек и предложенный метод оптимизации по весу могут быть использованы для расчета и оптимизации широкого класса изделий из композитов, находящихся под действием совокупности нагрузок.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алфутов Н. А.** Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов / Н. А. Алфутов, П. А. Зиновьев, Б. Г. Попов. М.: Машиностроение, 1984.
2. **Болотин В. В.** Механика многослойных конструкций / В. В. Болотин, Ю. Н. Новичков. М.: Машиностроение, 1980.
3. **Григолюк Э. И.** Многослойные армированные оболочки: Расчет пневматических шин / Э. И. Григолюк, Г. М. Куликов. М.: Машиностроение, 1988.
4. **Григолюк Э. И., Коган Ф. А.** Современное состояние теории многослойных оболочек // Прикл. механика. 1972. Т. 8. С. 3–17.
5. **Дудченко А. А., Лурье С. А., Образцов И. Ф.** Анизотропные многослойные пластины и оболочки. М.: ВИНТИ, 1983. (Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела; Т. 15).
6. **Андреев А. Н.** Многослойные анизотропные оболочки и пластины: Изгиб, устойчивость, колебания / А. Н. Андреев, Ю. В. Немировский. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 2001.
7. **Лехницкий С. Г.** Анизотропные пластинки. М.: Гостехтеоретиздат, 1957.
8. **Жигун И. Г., Якушин В. А., Ивонин Ю. Н.** Анализ методов определения межслойной сдвиговой прочности композитных материалов // Механика полимеров. 1976. № 4. С. 640–648.
9. **Тарнопольский Ю. М.** Особенности расчета деталей из армированных пластиков / Ю. М. Тарнопольский, А. В. Розе. Рига: Зинатне, 1969.
10. **Работнов Ю. Н.** Введение в механику разрушения. М.: Наука, 1987.
11. **Работнов Ю. Н., Данилова И. Н., Полилов А. Н.** Исследование прочности намоточных эпоксидных угле- и стеклопластиков при кручении, растяжении и поперечном изгибе // Механика полимеров. 1978. № 2. С. 219–225.

12. **Полилов А. Н., Работнов Ю. Н.** Разрушение около боковых выточек композитов с низкой сдвиговой прочностью // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1976. № 6. С. 112–119.
13. **Резников Б. С.** Рациональное проектирование по начальному разрушению ребристых армированных оболочек // Пробл. прочности. 1980. № 1. С. 108–113.
14. **Немировский Ю. В.** Прочность элементов конструкций из композитных материалов / Ю. В. Немировский, Б. С. Резников. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1986.
15. **Tsai S. W., Wu E. M.** A general theory of strength for anisotropic materials // J. Compos. Materials. 1971. V. 5. P. 58–80.
16. **Резников Б. С.** Прогнозирование разрушения кольцевых пластин с учетом реальной структуры и стохастической природы армированного материала // Краевые задачи и их приложения: Тр. Чуваш. гос. ун-та. Чебоксары: Чуваш. гос. ун-т, 1989. С. 89–99.
17. **Бутырин В. И.** Оптимизация конструкций из анизотропных материалов при варьировании приведенных толщин на единичном интервале // Докл. АН высш. шк. РФ. 2007. Т. 2, № 9. С. 84–89.

*Поступила в редакцию 15/IV 2013 г.,
в окончательном варианте — 10/VI 2013 г.*
