

УДК 004.932 : 550.8.05

ОШИБКИ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ ЛОКАЛЬНЫХ МАГНИТНЫХ АНОМАЛИЙ ПО ДАННЫМ РАЗНОВЫСОТНОЙ МАГНИТНОЙ СЪЁМКИ С ПОМОЩЬЮ БПЛА*

В. П. Косых^{1,2}, Г. И. Громили¹, А. П. Фирсов³, А. В. Савлук³

¹Институт автоматизации и электрометрии СО РАН,
630090, г. Новосибирск, просп. Академика Коптюга, 1

²Новосибирский государственный университет,
630090, г. Новосибирск, ул. Пирогова, 2

³Институт нефтегазовой геологии и геофизики СО РАН,
630090, г. Новосибирск, просп. Академика Коптюга, 3
E-mail: kosych@iae.nsk.su

Исследуются ошибки оценок размеров, глубины залегания и намагниченности локального источника магнитной аномалии простой формы при совместном анализе данных магнитной съёмки, зарегистрированных на нескольких высотах. Численное моделирование показывает, что разновысотные измерения магнитной индукции, обусловленной наличием источника, позволяют получить более точную оценку некоторых его параметров, чем измерения на одной высоте.

Ключевые слова: магнитная аномалия, обратные задачи магниторазведки, БПЛА.

DOI: 10.15372/AUT20180402

Введение. Благодаря интенсивному развитию беспилотной авиации в последнее десятилетие наблюдается тенденция к проведению магниторазведки с помощью аппаратуры, размещённой на беспилотном летательном аппарате (БПЛА) [1]. Достоинством такого способа разведки является, во-первых, невысокая (по сравнению с аэромагнитной разведкой) стоимость и, во-вторых, возможность проводить магнитосъёмку с достаточно высокой степенью пространственной детализации. Кроме того, применение БПЛА позволяет осуществлять измерения на разных высотах и надеяться на появление новых возможностей в решении обратных задач магниторазведки. Прямые задачи магниторазведки состоят в вычислении поля в окрестности источника, порождающего магнитную аномалию и имеющего известные форму и распределение намагниченности. Задача интерпретации данных магнитной разведки заключается в моделировании такой геометрии источников и распределения намагниченности, которая давала бы распределение модельного поля, соответствующее результатам измерений, и является типичной некорректной обратной задачей. Сложность её состоит в том, что полученных в результате измерения данных недостаточно для построения решения, устойчивого к возмущениям, возникающим из-за ошибок в измерениях, без привлечения дополнительных ограничений на пространственную структуру моделируемого источника. Одним из способов введения таких ограничений является представление модели источника в виде набора однородно намагниченных тел с

*Работа выполнена при финансовой поддержке Федерального агентства научных организаций (государственная регистрация № АААА-А17-117052410034-6).

простой геометрией (например, призму), определяемой сравнительно небольшим количеством параметров, которые и подлежат оцениванию [2]. При сложной комбинации тел дополнительно применяются различные способы регуляризации по Тихонову [3]. В связи с открывающейся практической возможностью регистрировать поле источника магнитной аномалии на нескольких высотах возникает вопрос, обеспечивают ли разновысотные измерения какие-либо преимущества в построении устойчивых к возмущениям многокомпонентных моделей источника. В данной работе делается попытка получить ответ на более простой вопрос: как оценить влияние разновысотных измерений на ошибки оценок параметров модели с простой геометрией без привлечения регуляризации?

Модель локального источника магнитной аномалии. Из-за сложности получения аналитических выражений для оценок параметров, обусловленной нелинейностью задачи оценивания, предлагается исследовать их ошибки численно. Пусть источником магнитной аномалии является прямоугольная однородно намагниченная призма размером $2X \times 2Y \times 2Z$, расположенная под плоскостью xOy правой прямоугольной системы координат (рис. 1). Рёбра призмы ориентированы параллельно осям координат, геометрический центр лежит на оси Oz на глубине z_0 . Вектор намагниченности призмы направлен вдоль оси Oz . На высоте h в плоскости, параллельной плоскости xOy , проводится регистрация аномальной (т. е. обусловленной наличием источника) вертикальной составляющей индукции магнитного поля. По результатам измерений оцениваются размеры призмы, глубина z_0 и намагниченность. Наша цель — проверить, как влияет наличие измерений магнитной индукции на разных высотах на ошибки оцениваемых параметров (предполагается, что измерения сопровождаются некоррелированным аддитивным шумом). Поскольку в этой задаче требуется оценить сравнительно небольшое количество параметров в отличие от реальных обратных задач магниторазведки, в качестве дополнительных ограничений при её решении используются только сведения о форме источника.

При условии, что намагниченность индуцированная, а магнитная восприимчивость источника аномалий мала настолько, что влиянием взаимного размагничивания можно пренебречь и при вычислении магнитного потенциала объёмного источника пользоваться интегральными формулами [4], магнитный потенциал избранного источника в точке с координатами (x, y, z) представим в виде

$$U(x, y, z) = \mu_0 I \int_{-X}^X \int_{-Y}^Y \int_{z_0-Z}^{z_0+Z} \frac{(z - z') dx' dy' dz'}{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2},$$

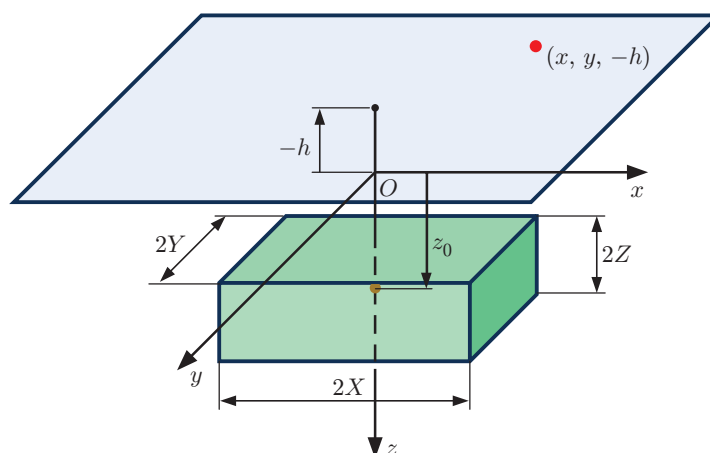


Рис. 1. Модель источника аномального поля

а вертикальную составляющую индукции магнитного поля — как

$$B(x, y, z | I, X, Y, Z, z_0) = -\frac{\partial}{\partial z} U(x, y, z) = \mu_0 I \sum_{k=0}^7 \alpha_k \operatorname{arctg} \frac{X_k Y_k}{Z_k (X_k^2 + Y_k^2 + Z_k^2)^{1/2}}. \quad (1)$$

Здесь $\alpha = (1, -1, -1, 1, -1, 1, 1, -1)$; $X_k = x - (-1)^{\lfloor k/4 \rfloor} X$; $Y_k = y - (-1)^{\lfloor k/2 \rfloor} Y$; $Z_k = z - (-1)^k Z$; $\lfloor * \rfloor$ — целая часть выражения; I — намагниченность источника; μ_0 — магнитная постоянная.

Оценивание параметров модели. Пусть на L высотах $z_l = -h_l$ получены наборы измерений вертикальной составляющей аномальной магнитной индукции

$$\tilde{B}(x_{m_l}, y_{m_l}, z_l) = B(x_{m_l}, y_{m_l}, z_l | I, X, Y, Z, z_0) + \xi(x_{m_l}, y_{m_l}, z_l), \quad l = \overline{1, L}, \quad m_l = \overline{1, M_l}, \quad (2)$$

где M_l — количество отсчётов, полученных на l -й высоте; $\xi(x_{m_l}, y_{m_l}, z_l)$ — некоррелированные одинаково распределённые ошибки измерений с нулевым средним и дисперсией σ^2 . Лексикографически упорядочив измерения \tilde{B} , ошибки измерений ξ и модель B по m_l и l , построим векторы-столбцы $\tilde{\mathbf{b}}$, Ξ и $\mathbf{b}(\mathbf{p})$ длиной $N = \sum_{l=1}^L \sum_{m_l=1}^{M_l} 1$, где $\mathbf{p} = (I, X, Y, Z, z_0)^T$ — вектор параметров, характеризующих модель источника. Тогда выражение (2) можно представить как

$$\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b}(\mathbf{p}) + \Xi. \quad (2a)$$

Для оценивания параметров источника аномалии воспользуемся методом наименьших квадратов (МНК), который с учётом представления (2a) требует минимизации функционала

$$J(\mathbf{p}) = (\tilde{\mathbf{b}} - \mathbf{b}(\mathbf{p}))^T (\tilde{\mathbf{b}} - \mathbf{b}(\mathbf{p})) \quad (3)$$

по вектору параметров \mathbf{p} .

В силу нелинейной зависимости индукции от искомых параметров минимизация функционала является итерационной процедурой, которую можно построить, например, линеаризуя \mathbf{b} в окрестности n -го приближения вектора параметров \mathbf{p}_n относительно поправок $\delta \mathbf{p}_{n+1}$. Функционал при этом принимает вид

$$J(\mathbf{p} = \mathbf{p}_n + \delta \mathbf{p}_{n+1}) = (\delta \mathbf{b}_n - \mathbf{B}(\mathbf{p}_n) \delta \mathbf{p}_{n+1})^T (\delta \mathbf{b}_n - \mathbf{B}(\mathbf{p}_n) \delta \mathbf{p}_{n+1}),$$

где

$$\delta \mathbf{b}_n = \tilde{\mathbf{b}} - \mathbf{b}(\mathbf{p}_n), \quad \mathbf{B}(\mathbf{p}_n) = \left. \frac{d\mathbf{b}}{d\mathbf{p}} \right|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_n} = \left[\begin{array}{ccccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B'_I & B'_X & B'_Y & B'_Z & B'_{z_0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right] \Bigg\} N,$$

а вектор поправок находится из системы нормальных уравнений

$$\left. \frac{dJ}{d\delta \mathbf{p}_{n+1}} \right|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_n} = 2\mathbf{B}^T(\mathbf{p}_n) \mathbf{B}(\mathbf{p}_n) \delta \mathbf{p}_{n+1} - 2\mathbf{B}^T(\mathbf{p}_n) \delta \mathbf{b}_n = 0,$$

решением которых является вектор

$$\delta \mathbf{p}_{n+1} = [\mathbf{B}^T(\mathbf{p}_n) \mathbf{B}(\mathbf{p}_n)]^{-1} \mathbf{B}^T(\mathbf{p}_n) \delta \mathbf{b}_n.$$

Ошибки оценок параметров. Оставив в стороне вопрос о сходимости итерационной процедуры, численно исследуем поведение обратной матрицы системы нормальных уравнений в окрестности истинных значений искомых параметров в зависимости от количества высот, на которых выполняются измерения, при фиксированном общем количестве измерений. Эта матрица имеет вид

$$\mathbf{R} = [\mathbf{B}^T(\mathbf{p}_{\text{ист}})\mathbf{B}(\mathbf{p}_{\text{ист}})]^{-1} = \left\{ \sum_{l, m_l} \begin{bmatrix} B_I'^2 & B_I'B'_X & B_I'B'_Y & B_I'B'_Z & B_I'B'_{z_0} \\ B_I'B'_X & B_X'^2 & B_X'B'_Y & B_X'B'_Z & B_X'B'_{z_0} \\ B_I'B'_Y & B_X'B'_Y & B_Y'^2 & B_Y'B'_Z & B_Y'B'_{z_0} \\ B_I'B'_Z & B_X'B'_Z & B_Y'B'_Z & B_Z'^2 & B_Z'B'_{z_0} \\ B_I'B'_{z_0} & B_X'B'_{z_0} & B_Y'B'_{z_0} & B_Z'B'_{z_0} & B_{z_0}'^2 \end{bmatrix} \right\}^{-1}$$

и с точностью до постоянного множителя σ^2 определяет ковариационную матрицу оценок параметров [5], а корни квадратные из её диагональных элементов — среднеквадратичные ошибки (СКО) оценок. Расчёт матрицы \mathbf{R} выполнен для модели источника аномалии с фиксированными размерами призмы $X_{\text{ист}} = 2,5$, $Y_{\text{ист}} = 1,25$ и фиксированной глубиной залегания $z_0_{\text{ист}} = 2$. Вертикальный размер призмы $Z_{\text{ист}}$ изменяется от 0,25 до 1,5, а высота полёта h — от 3 до 18 (при моделировании предполагается, что высота полёта известна). Поскольку цель данной работы состояла не в получении конкретных ошибок оценок параметров, а в исследовании влияния на них разновысотных измерений, все размеры даны в относительных единицах. По этой же причине $I_{\text{ист}} = 1$. Координаты измерений x_{m_l}, y_{m_l} распределены с постоянным шагом $\delta x, \delta y = 1$ на квадратной площадке размером 50×50 со смещением 0,5 вдоль осей Ox и Oy в разных плоскостях полёта (рис. 2). При сравнении оценок параметров источника аномалии по разновысотным измерениям с оценками, полученными по данным, измеренным на одной высоте, последние формировались на той же площадке, но с шагом 0,5 по каждой координате. За счёт этого обеспечивалось одинаковое количество измерений при различных условиях съёмки.

В таблице приведены значения корня квадратного из диагональных элементов матрицы \mathbf{R} , рассчитанные для разных вертикальных размеров призмы Z при разных высотах h , на которых выполнялись измерения. Значения $\sqrt{\mathbf{R}_{11}} - \sqrt{\mathbf{R}_{55}}$ с точностью до постоянного множителя соответствуют СКО $\delta_I, \delta_X, \delta_Y, \delta_Z, \delta_{z_0}$ оцениваемых параметров I, X, Y, Z, z_0 . В

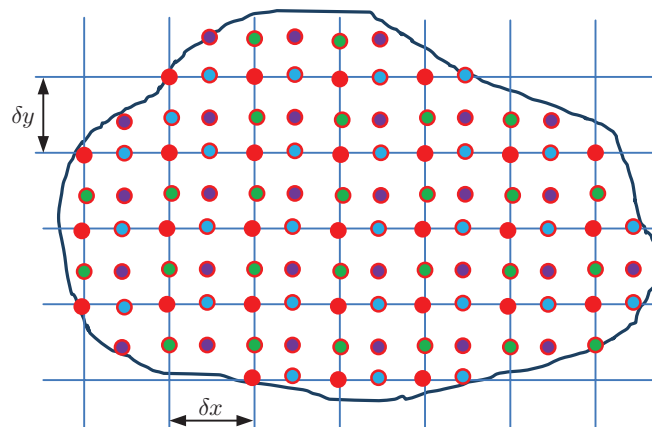


Рис. 2. Размещение измерений на различных высотах при моделировании. Цвет соответствует разным высотам

Среднеквадратичные ошибки оценок параметров источника аномалии

Z	h	$\sqrt{\mathbf{R}_{11}}$	$\sqrt{\mathbf{R}_{22}}$	$\sqrt{\mathbf{R}_{33}}$	$\sqrt{\mathbf{R}_{44}}$	$\sqrt{\mathbf{R}_{55}}$
0,25	3	$1,03 \cdot 10$	$3,04 \cdot 10^{-1}$	$2,09 \cdot 10^{-1}$	$1,31 \cdot 10$	1,88
	8	$1,49 \cdot 10^2$	8,21	4,36	$3,74 \cdot 10^2$	$2,95 \cdot 10$
	13	$9,73 \cdot 10^2$	$6,08 \cdot 10$	$3,18 \cdot 10$	$3,66 \cdot 10^3$	$2,10 \cdot 10^2$
	18	$4,47 \cdot 10^3$	$2,58 \cdot 10^2$	$1,37 \cdot 10^2$	$2,24 \cdot 10^4$	$1,05 \cdot 10^3$
	3–18	$9,75 \cdot 10^{-2}$	$5,98 \cdot 10^{-1}$	$3,75 \cdot 10^{-1}$	$2,59 \cdot 10^{-1}$	$7,80 \cdot 10^{-1}$
0,5	3	1,27	$1,48 \cdot 10^{-1}$	$1,03 \cdot 10^{-1}$	3,33	$9,40 \cdot 10^{-1}$
	8	1,85	4,07	2,17	$9,41 \cdot 10$	$1,48 \cdot 10$
	13	$1,21 \cdot 10^2$	$3,03 \cdot 10$	$1,58 \cdot 10$	$9,18 \cdot 10^2$	$1,05 \cdot 10^2$
	18	$5,57 \cdot 10^2$	$1,29 \cdot 10^2$	$6,83 \cdot 10$	$5,61 \cdot 10^3$	$5,25 \cdot 10^2$
	3–18	$4,91 \cdot 10^{-2}$	$2,91 \cdot 10^{-1}$	$1,85 \cdot 10^{-1}$	$2,68 \cdot 10^{-1}$	$4,27 \cdot 10^{-1}$
1,0	3	$1,46 \cdot 10^{-1}$	$6,57 \cdot 10^{-2}$	$4,77 \cdot 10^{-2}$	$8,90 \cdot 10^{-1}$	$4,72 \cdot 10^{-1}$
	8	2,25	1,97	1,05	$2,41 \cdot 10$	7,40
	13	$1,49 \cdot 10$	$1,49 \cdot 10$	7,81	$2,33 \cdot 10^2$	$5,26 \cdot 10$
	18	$6,87 \cdot 10$	$6,38 \cdot 10$	$3,38 \cdot 10$	$1,42 \cdot 10^3$	$2,63 \cdot 10^2$
	3–18	$2,53 \cdot 10^{-2}$	$1,30 \cdot 10^{-1}$	$8,77 \cdot 10^{-2}$	$3,07 \cdot 10^{-1}$	$3,04 \cdot 10^{-1}$
1,5	3	$3,82 \cdot 10^{-2}$	$3,60 \cdot 10^{-2}$	$2,84 \cdot 10^{-2}$	$4,38 \cdot 10^{-1}$	$3,16 \cdot 10^{-1}$
	8	$6,36 \cdot 10^{-1}$	1,24	$6,66 \cdot 10^{-1}$	$1,11 \cdot 10$	4,96
	13	4,28	9,68	5,08	$1,06 \cdot 10^2$	$3,52 \cdot 10$
	18	$1,99 \cdot 10$	$4,19 \cdot 10$	$2,23 \cdot 10$	$6,39 \cdot 10^2$	$1,76 \cdot 10^2$
	3–18	$1,75 \cdot 10^{-2}$	$7,14 \cdot 10^{-2}$	$5,46 \cdot 10^{-2}$	$3,77 \cdot 10^{-1}$	$3,36 \cdot 10^{-1}$

строках таблицы $h = 3-18$ приведены значения результатов совместной обработки измерений, полученных на разных высотах полёта.

Графики рассчитанных по этим данным СКО $\delta_I, \delta_X, \delta_Y, \delta_Z, \delta_{z_0}$ оценок параметров для отношения сигнал/шум (С/Ш), равного 100, приведены на рис. 3. Под отношением С/Ш здесь подразумевается отношение максимального значения величины B , вычисленной согласно (1) при минимальной высоте съёмки и максимальном вертикальном размере призмы, к СКО измерений магнитной индукции \tilde{B} . Сравнивая значения ошибок одного параметра, полученные по измерениям на одной и той же высоте, можно обнаружить вполне ожидаемый результат — с увеличением вертикального размера призмы Z ошибки оценок всех параметров уменьшаются, поскольку увеличивается её магнитная индукция на этой высоте и, следовательно, возрастает отношение С/Ш в измерениях. Также ожидаемо, что при фиксированном значении вертикального размера призмы ошибки оценок всех параметров с ростом высоты полёта очень резко увеличиваются (первые четыре строки таблицы для каждого значения Z), поскольку с высотой уменьшается (примерно как третья степень высоты) величина магнитной индукции и, следовательно, отношение С/Ш.

Ошибки оценок горизонтальных (X и Y) и вертикального (Z) размеров призмы, полученных по данным разновысотных измерений, ведут себя по-разному. Оценки горизонтальных размеров (см. в таблице четвёртую и пятую колонки, рис. 3, a, b), сформированные по разновысотным измерениям, хуже, чем на минимальной высоте, и лучше, чем на максимальной. Из сравнения ошибок оценок X и Y следует, что с увеличением горизонтального размера источника ошибка оценки этого параметра возрастает. Оценки вертикального размера и глубины залегания (см. в таблице шестую и седьмую колонки, рис. 3, c, d),

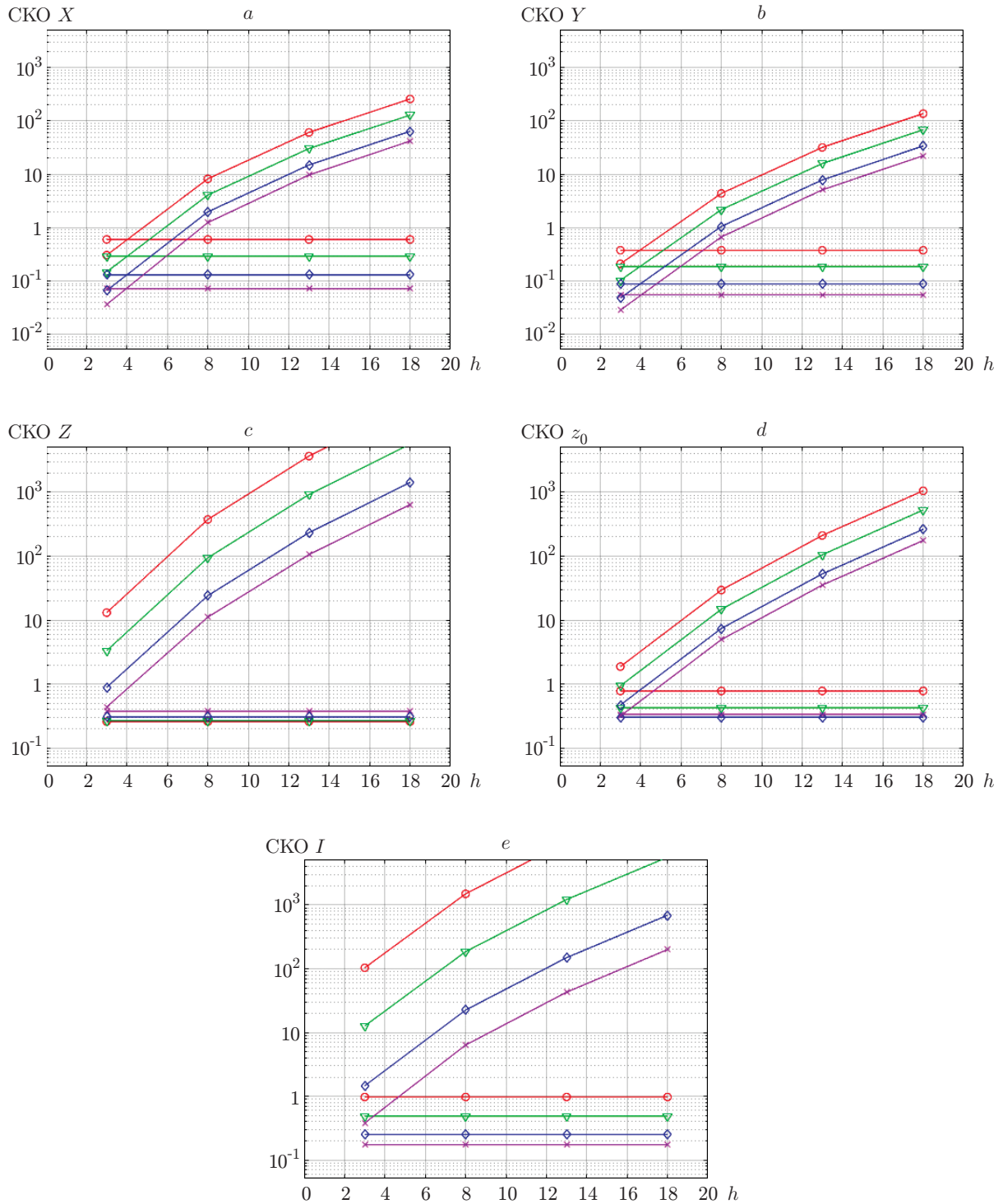


Рис. 3. Зависимости среднеквадратичных ошибок оценок параметров I, X, Y, Z, z_0 от высоты съёмки h , вертикального размера призмы Z и режима формирования измерений (горизонтальными линиями отображены ошибки оценок, полученные по разновысотным измерениям).

Обозначения: \circ — $Z = 0,25$, ∇ — $Z = 0,5$, \diamond — $Z = 1,0$, \times — $Z = 1,5$

полученные по разновысотным данным, при малом вертикальном размере оказываются более точными, чем на минимальной высоте. Оценка намагниченности, основанная на разновысотных измерениях, также имеет меньшую ошибку, чем оценка по измерениям на минимальной высоте (см. в таблице третью колонку, рис. 3, е).

Вопрос об условиях, гарантирующих сходимость итерационной процедуры, в данной работе отдельно не рассматривался. Однако следует отметить, что при моделировании в среде MATLAB оценивание параметров выполнялось с помощью процедуры `fminsearch`, использующей симплекс-метод [6] для поиска минимума функционала (3). При указанном выше отношении С/Ш область начальных приближений оцениваемых параметров, при которых обеспечивалась сходимость к глобальному минимуму, была ограничена отклонениями начальных приближений в пределах $\pm 50\%$ от истинных значений. При больших отклонениях сходимость нарушалась.

Заключение. Представленные оценки показывают, что корректное использование разновысотных данных может обеспечить повышение точности решения обратных задач магниторазведки по сравнению с решениями, построенными по данным, полученным на одной высоте. В дальнейших исследованиях предполагается внесение ошибок измерения координат датчика в модель формирования измерений и анализ их влияния на устойчивость оценок параметров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Фирсов А. П., Злыгостев И. Н., Савлук А. В. и др.** Применение беспилотных летательных аппаратов при геолого-геофизическом картировании // Матер. V Всерос. науч.-практич. конф. «Геология и минерально-сырьевые ресурсы северо-востока России». Якутск, 31 марта–2 апреля, 2015. С. 529–533.
2. **Новикова П. Н.** Решение трёхмерных обратных задач магниторазведки монтажным методом // Геофизические методы исследования Земли и её недр: Матер. X Междунар. науч.-практич. конкурса-конференции молодых специалистов «Геофизика-2015». С.-Пб.: ООО «Издательство ВВМ», 2016. С. 86–90.
3. **Portniaguine O., Zhdanov M. S.** Focusing geophysical inversion images // *Geophysics*. 1999. **64**, N 3. P. 874–887.
4. **Блох Ю. И.** Решение прямых задач гравиразведки и магниторазведки. М.: МГГА, 1993. 160 с.
5. **Paо С. Р.** Линейные статистические методы и их применения. М.: Наука, 1968. 547 с.
6. **Lagarias J. C., Reeds J. A., Wright M. H., Wright P. E.** Convergence properties of the nelder-mead simplex method in low dimensions // *SIAM Journ. Optimization*. 1998. **9**, N 1. P. 112–147.

Поступила в редакцию 18 января 2018 г.