



**О НЕПОТЕНЦИАЛЬНОМ ХАРАКТЕРЕ РАБОТЫ ВЕКТОРА  
НАПРЯЖЕНИЙ КОШИ НА ИЗМЕНЕНИЯХ ВЕКТОРА ДЕФОРМАЦИИ  
ПРИ РАЗЛИЧНЫХ СОСТОЯНИЯХ СРЕДЫ**

**А. И. Чанышев<sup>1,2</sup>**

<sup>1</sup>*Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН,  
E-mail: a.i.chanyshv@gmail.com, i.m.abdulin@mail.ru,  
Красный проспект 54, г. Новосибирск 630091, Россия*

<sup>2</sup>*Новосибирский государственный университет экономики и управления,  
ул. Каменская 56, г. Новосибирск 630099, Россия*

На площадке с единичной нормалью кроме вектора напряжений задается вектор деформаций как вектор относительных смещений точек площадки (он равен отношению вектора смещений к расстоянию от точки отсчета смещений до площадки). Вектор деформации обладает свойствами, аналогичными вектору напряжений Коши (главный вектор и главный момент векторов деформаций, отнесенных к элементу среды, обращаются в нули). Для первоначально изотропной среды вычисляется работа вектора напряжений на площадке на изменениях вектора деформаций. Показано, что она является непотенциальной, т. е. зависит от характера изменения вектора напряжений. Работа потенциальна для изотропной среды только на площадках, равнонаклонных к главным осям тензора напряжений, т.е. на октаэдрических площадках. Данное положение справедливо для состояний упругости, пластичности, запредельного деформирования.

*Вектор напряжений, вектор деформаций, работа, потенциал, площадки, октаэдрические площадки, определяющие соотношения среды*

**NONPOTENTIALITY OF THE CAUCHY STRESS VECTOR WORK ON CHANGES  
IN THE DEFORMATION VECTOR UNDER VARIOUS STATES OF THE MEDIUM**

**A. I. Chanyshev<sup>1,2</sup>**

<sup>1</sup>*Chinakal Institute of Mining, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences,  
E-mail: a.i.chanyshv@gmail.com, i.m.abdulin@mail.ru,  
Krasny pr. 54, Novosibirsk 630091, Russia*

<sup>2</sup>*Novosibirsk State University of Economics and Management,  
ul. Kamenskaya 52, Novosibirsk 630099, Russia*

On a site with a unit normal, in addition to the stress vector, the deformation vector is set as a vector of relative displacements of the site points (it is equal to the ratio of the displacement vector to the distance from the offset reference point to the site). The deformation vector has properties similar to the Cauchy stress vector (the principal vector and the principal moment of the deformation vectors referred to the medium element vanish). For an initially isotropic medium, the work of the stress vector on the site is calculated on the basis of changes in the deformation vector. It is shown that it is non-potential, i.e. depends on the nature of the change in the stress vector. Work is potential for an isotropic medium only on areas equally inclined to the principal axes of the stress tensor, i.e. on octahedral sites. This position is valid for the states of elasticity, plasticity, extreme deformation.

*Stress vector, strain vector, work, potential, areas, octahedral areas, constitutive relations of the medium*

В механике горных пород вместо дорогостоящих экспериментальных работ применяются теоретические разработки, основанные на результатах простейших опытов по нагружению образцов горных пород, пригодные для решения любых практических задач с применением вычислительной техники. К ним относятся определяющие среды, связывающие напряжения и деформации при различных видах воздействия. Сами по себе напряжения и деформации — скаляры, являющиеся проекциями более весомых величин — векторов напряжений Коши на площадке с единичной нормалью  $\vec{n}$  и векторов относительных смещений (векторов деформаций). Связи между ними на площадке есть тот первичный закон, из которого следуют связи между напряжениями и деформациями. Для установления этих зависимостей необходимо определить такое понятие как вектор деформации. Кроме этого требуется найти такие площадки, на которых работа вектора силы (вектора Коши) на изменениях вектора перемещений (вектора деформаций) была бы потенциальной, независимой от характера изменения вектора силы. Определение этих площадок поспособствует более адекватному описанию поведения горных пород при нагружениях.

Традиционно при построении определяющих соотношений среды используются понятие площадки в системе координат  $xOy$  с нормалью  $\vec{n}$ . На этой площадке определяется вектор напряжений (Коши) по формуле

$$\vec{p}_n = (T_\sigma, \vec{n})\vec{l}_i, \quad (1)$$

где  $T_\sigma$  — тензор напряжений;  $(, )$  — значок скалярного произведения;  $\vec{l}_i$  — орты системы координат. Вектор  $\vec{p}$  раскладывается на направления  $\vec{n}$  и  $\vec{t}$  (рис. 1):

$$\vec{p}_n = \sigma_n \vec{n} + \tau_n \vec{t}, \quad (2)$$

При этом запись  $(p_n)_i = \sigma_{ij} n_{ij}$ , вытекающая из (1), подразумевает равновесие усеченного плоскостью с нормалью  $\vec{n}$  параллелепипеда (тетраэдра) на рис. 1. [1–3]

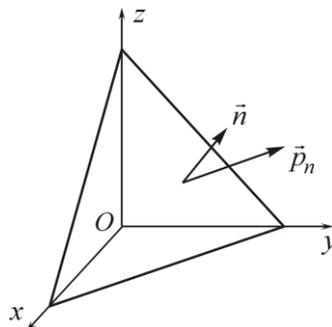


Рис. 1. Вектор  $\vec{p}_n$  на площадке с нормалью  $\vec{n}$  уравнивает аналогичные силы, действующие на гранях тетраэдра

Уравнение (2) является основным при построении определяющих соотношений пластичности, разрушения [4–7]. Выделяются площадки, на которых  $\tau_n$ , например, максимально [8–10]. В [11] предполагается, что пластические деформации начинаются именно на тех площадках, где  $\tau_n$  максимально. При этом помимо касательных напряжений в [8–10] рассматриваются сдвиги на площадках, порождаемых максимальными касательными напряжениями. Другими словами, говорится о компонентах вектора деформаций  $\vec{q}_n = (T_\epsilon, \vec{n})$  на площадке с нормалью  $\vec{n}$ , который, как и  $\vec{p}_n$ , имеет разложение вида (2):

$$\vec{q}_n = \epsilon_n \vec{n} + \gamma_n \vec{t}.$$

Вопрос состоит в определении вектора деформации  $\vec{q}_n$ . Приведем несколько примеров, иллюстрирующих вектор деформаций.

**Вектор деформаций при растяжениях и сдвигах.** Обратимся к простейшим примерам. Пусть, например, имеется некоторый стержень длины  $L$ , закрепленный в основании (в точке  $O$ ) и растягиваемый в точке  $A$  усилием  $P$  (рис. 2а).

Пусть стержень однороден и его деформация также однородна. Тогда смещение  $u$  вдоль него имеет распределение, указанное на рис. 2б (угол  $\alpha$  определяется значением  $P$  и модулем Юнга). Рассмотрим вектор деформаций в точке  $A$ . Найдем его как

$$\vec{q} = \vec{u} / d ,$$

где  $d$  — расстояние от точки отсчета смещений (точки  $O$ ) до площадки (с нормалью  $\vec{n}$ ). В данном случае вектор  $\vec{q}$  направлен вверх и его значение в точке  $A$  равно  $\vec{u}_A / L$ . Значение вектора  $\vec{q}$  в других точках стержня как следует из рис. 2б будет аналогичным.

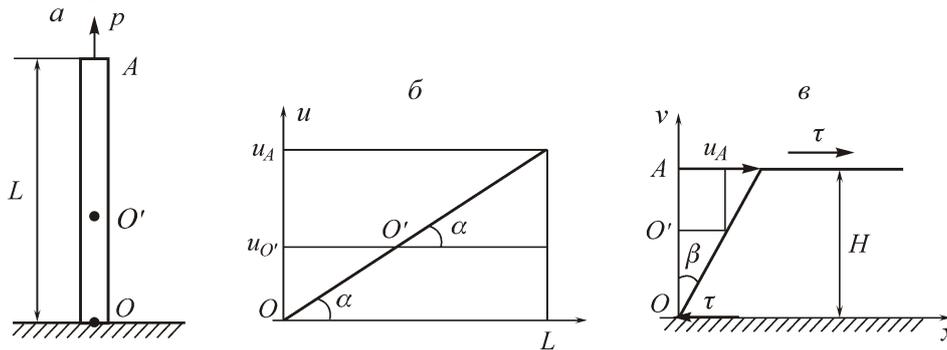


Рис. 2. Растяжение прямолинейного стержня длины  $L$  нагрузкой  $P$  (а, б) и сдвиг тела с высотой  $H$  (в)

Исследуем теперь случай, когда точка закрепления стержня (из положения  $O$ ) перемещается в другую точку, например точку  $O'$  на рис. 2а. Возникает вопрос, как будут соотноситься векторы деформаций в точках  $A$  и  $O$ . Из рис. 2а, 2б видно, что точка  $A$  движется относительно точки  $O'$  вверх (вектор деформаций в точке  $A$  направлен вверх), точка  $O$  относительно  $O'$  движется вниз (вектор деформаций направлен вниз). Однако из рис. 2 видно, что сумма векторов деформаций в точках  $A$  и  $O$  равняется нулевому вектору, т. е. имеет место равенство

$$\vec{q}_A + \vec{q}_O = \vec{0} \quad (3)$$

(векторы  $\vec{q}_A$ ,  $\vec{q}_O$  имеют противоположные направления и одинаковые длины). Равенство (2) означает, что главный вектор относительных смещений в случае растяжения (сжатия) стержня обращается в нулевой вектор, если стержень закреплен в любой точке внутри стержня, включая граничную точку  $O$ .

Следующий пример касается сдвига, представленного на рис. 2в. Имеется сдвигаемое тело, сверху к нему приложено касательное усилие  $\vec{\tau}$ . Тело закреплено, усилие  $\vec{\tau}$  уравнивается силой, приложенной к нижней части тела (например, силой трения). Высота тела равна  $H$ , угол сдвига  $\beta$ .

Вектор деформаций в точке  $A$  совпадает с отношением

$$\vec{q}_A = \vec{u}_A / H .$$

Вектор деформаций в промежуточной точке  $O'$

$$\vec{q}_{O'} = \vec{q}_A .$$

В точке  $O$  имеет место опять соотношение (3) — главный вектор векторов деформаций обращается в ноль.

Следующий пример изображен на рис. 3.

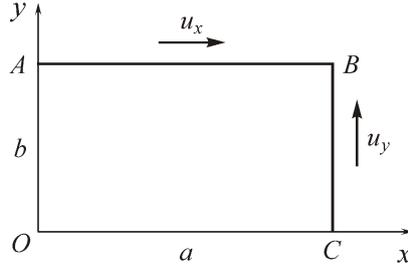


Рис. 3. Прямоугольник со смещением точек границ  $u_x$  и  $u_y$

Рассмотрим деформации прямоугольника на нем. Чтобы он не вращался как жесткое целое необходимо, чтобы главный момент векторов деформаций был равен нулю. Другими словами

$$\frac{u_x}{b} ab = \frac{u_y}{a} ba. \quad (4)$$

Здесь левая часть уравнения есть произведение  $u_x a / b$  на плечо  $b$ , правая часть — произведение  $u_y a / b$  на плечо  $a$ . При этом  $\bar{u}_x / b$  — вектор деформаций в точке,  $(\bar{u}_x / b)a$  — вектор относительных смещений всех точек верхней грани прямоугольника,  $b$  — плечо. Аналогично  $(\bar{u}_y / a)b$  — вектор относительных смещений всех точек правой грани прямоугольника,  $a$  — плечо.

Из (4) следует

$$\frac{u_x}{b} = \frac{u_y}{a}. \quad (5)$$

Оно выражает собой симметричность тензора деформации. А соотношение

$$\bar{q} - \varepsilon_{ij} n_j \bar{l}_i = \vec{0} \text{ или } \bar{q} = \varepsilon_{ij} n_j \bar{l}_i$$

свидетельствует о равенстве нулю главного вектора относительных смещений.

Непотенциальный характер работы вектора напряжений Коши на площадке на изменениях вектора деформаций

Пусть в некоторой прямоугольной декартовой системе координат  $xOyz$  тензор напряжений  $T_\sigma$  имеет вид:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Для него находятся собственные числа  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  и собственные векторы, определяющие матрицу преобразования при переходе от осей  $x, y, z$  к главным осям  $x_1, x_2, x_3$  тензора  $T_\sigma$ , в которых  $T_\sigma$  имеет диагональный вид. Орты этой системы координат обозначим как  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ .

Рассматривается произвольная площадка с нормалью  $\vec{n}$  и на ней вектор напряжений Коши  $\vec{p}_n = \sigma_1 n_1 \vec{e}_1 + \sigma_2 n_2 \vec{e}_2 + \sigma_3 n_3 \vec{e}_3$  ( $n_1, n_2, n_3$  — направляющие косинусы нормали  $\vec{n}$ ). Вектор  $\vec{p}_n$  раскладывается на две составляющие — на направление  $\vec{n}$  и на направление касательной  $\vec{t}$ . При этом  $\vec{p}_n = \vec{\tau}_n + \vec{\sigma}_n$ , где  $\vec{\sigma}_n = \sigma_n \cdot \vec{n}$ ,

$$\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \quad (6)$$

На площадке с нормалью  $\vec{n}$  вводится в рассмотрение векторный базис. Кроме  $\vec{n}$  используются еще два единичных вектора  $\vec{t}_1$  и  $\vec{t}_2$ , ортогональных между собой и с  $\vec{n}$ :

$$\vec{t}_1 = \frac{(1-n_1^2)\vec{e}_1 - n_1 n_2 \vec{e}_2 - n_1 n_3 \vec{e}_3}{\sqrt{1-n_1^2}}, \quad \vec{t}_2 = \frac{n_3 \vec{e}_2 - n_2 \vec{e}_3}{\sqrt{1-n_1^2}}. \quad (7)$$

Легко проверить, что в последовательности  $\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{n}$  данные векторы образуют правую тройку векторов (их смешанное произведение равно +1). Найдем проекции вектора напряжений  $\vec{p}_n$  на эти орты. Обозначаем их соответственно как  $\tau_1, \tau_2$ . Тогда

$$\tau_1 = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)n_2^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)n_3^2}{\sqrt{1-n_1^2}} n_1, \quad \tau_2 = \frac{(\sigma_2 - \sigma_3)n_2 n_3}{\sqrt{1-n_1^2}}. \quad (8)$$

На этой же площадке рассматриваем вектор деформаций  $\vec{q}_n$ :

$$\vec{q}_n = \varepsilon_1 n_1 \vec{e}_1 + \varepsilon_2 n_2 \vec{e}_2 + \varepsilon_3 n_3 \vec{e}_3.$$

Он также имеет разложение

$$\vec{q}_n = \varepsilon_n \vec{n} + \vec{\gamma}_n,$$

где  $\varepsilon_n = \varepsilon_1 n_1^2 + \varepsilon_2 n_2^2 + \varepsilon_3 n_3^2$ .

Для определенности рассматриваем упругое состояние среды с законом Гука вида

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)], \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E}[\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)], \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)], \quad (9)$$

где  $E$  — модуль Юнга материала;  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Если координаты вектора напряжений  $\vec{p}_n$  в базисе  $\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{n}$  имели значения координаты  $\tau_1, \tau_2, \sigma_n$ , определяемые (6), (8), то для вектора  $\vec{q}_n$  аналогичные координаты обозначаем как  $\gamma_1, \gamma_2, \varepsilon_n$ . С учетом (9)

$$\gamma_1 = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)n_2^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)n_3^2}{\sqrt{1-n_1^2}} n_1 = \frac{\tau_1}{2\mu}, \quad \gamma_2 = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)n_2 n_3}{\sqrt{1-n_1^2}} = \frac{\tau_2}{2\mu}, \quad (10)$$

где  $2\mu = E/(1+\nu)$ .

Для выражения координаты  $\varepsilon_n = \varepsilon_1 n_1^2 + \varepsilon_2 n_2^2 + \varepsilon_3 n_3^2$  через координаты вектора  $\vec{p}_n$  необходимы связи  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  через  $\tau_1, \tau_2, \sigma_n$ . С применением (7), (8) получаем

$$\sigma_1 = \frac{\sqrt{1-n_1^2}}{n_1} \tau_1 + \sigma_n, \quad \sigma_2 = -\frac{n_1}{\sqrt{1-n_1^2}} \tau_1 + \frac{n_3}{n_2 \sqrt{1-n_1^2}} \tau_2 + \sigma_n, \quad \sigma_3 = -\frac{n_1}{\sqrt{1-n_1^2}} \tau_1 - \frac{n_2}{n_3 \sqrt{1-n_1^2}} \tau_2 + \sigma_n. \quad (11)$$

Тогда подстановка (11) в выражение для  $\varepsilon_n$  дает:

$$\varepsilon_n = \frac{\nu}{E} \frac{(3n_1^2 - 1)}{n_1 \sqrt{1-n_1^2}} \tau_1 + \frac{\nu}{E} \frac{(n_2^2 - n_3^2)}{n_2 n_3 \sqrt{1-n_1^2}} \tau_2 + \frac{1-2\nu}{E} \sigma_n. \quad (12)$$

Вычисляя работу, находим

$$A = \int_{(M)}^{(N)} \vec{p}_n \cdot d\vec{q}_n = \int_{(M)}^{(N)} (\tau_1 d\gamma_1 + \tau_2 d\gamma_2 + \sigma_n d\varepsilon_n). \quad (13)$$

Согласно (10), имеем

$$\int_{(M)}^{(N)} \tau_1 d\gamma_1 = \int_{(M)}^{(N)} \tau_1 \frac{d\tau_1}{2\mu} = \frac{1}{4\mu} \tau_1^2 \Big|_{(M)}^{(N)}, \quad \int_{(M)}^{(N)} \tau_2 d\gamma_2 = \frac{1}{4\mu} \tau_2^2 \Big|_{(M)}^{(N)}.$$

Вычисляя третий интеграл в (13), с учетом (12) получаем:

$$I_3 = \frac{\nu}{E} \frac{(3n_1^2 - 1)}{n_1 \sqrt{1-n_1^2}} \int_{(M)}^{(N)} \sigma_n d\tau_1 + \frac{\nu}{E} \frac{(n_2^2 - n_3^2)}{n_2 n_3 \sqrt{1-n_1^2}} \int_{(M)}^{(N)} \sigma_n d\tau_2 + \frac{1-2\nu}{E} \frac{\sigma_n^2}{2} \Big|_{(M)}^{(N)}. \quad (14)$$

Основная его особенность состоит в том, что для вычисления первого и второго интегралов в (14) необходимо задавать в плоскостях  $(\tau_1, \sigma_n)$ ,  $(\tau_2, \sigma_n)$  пути интегрирования или пути нагружения (они не известны, о них можно только догадываться). В зависимости от этих путей интегралы могут быть и положительными, и отрицательными, могут по модулю неограниченно возрастать для петлеобразных траекторий (рис. 4).

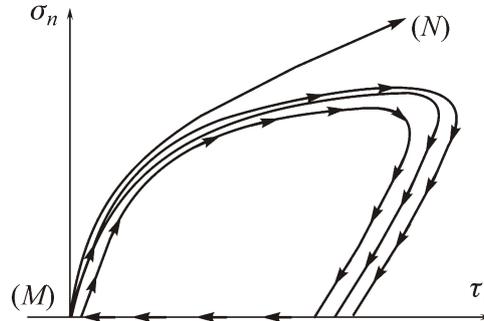


Рис. 4. Один из возможных путей нагружения площадки с нормалью  $\vec{n}$  в плоскости  $(\tau_1, \sigma_n)$ , ведущий к бесконечному значению работы

Придавать какой-то глобальный смысл этим и подобным площадкам с заданием траектории нагружения нет оснований потому, что существуют такие площадки как равнонаклонные к осям  $x_1, x_2, x_3$ , на которых зануляются коэффициенты при этих интегралах:

$$3n_1^2 - 1 = 0, \quad n_2^2 - n_3^2 = 0$$

и при этом нет необходимости задавать и следить за путями интегрирования. В этом случае работа  $A$  представляется суммой двух слагаемых

$$A = \frac{1}{2} \left( \frac{|\vec{\tau}_n|}{2\mu} + \frac{\sigma_n^2}{K} \right) \Bigg|_{(M)}^{(N)}.$$

Эти площадки определяются законом Гука, на них формулируются основные законы неупругого деформирования первоначально изотропных сред [12], не противоречащие экспериментальным данным, например [13].

## ВЫВОДЫ

На примерах дано определение вектора деформаций на площадке как отношение вектора смещений точек площадки к расстоянию от точки отсчета смещений до площадки. Показано, что он удовлетворяет таким же условиям как и вектор напряжений Коши, а именно главный вектор векторов деформаций, распределенных по замкнутой поверхности элемента среды, обращается в нулевой вектор. Главный момент векторов деформаций также обращается в ноль. Эти условия исключают смещения элемента как жесткого целого, фиксируют его жесткий поворот.

На произвольно ориентированной площадке работа вектора напряжений на изменениях вектора деформаций не потенциальна даже в случае упругости. Исключение составляют октаэдрические или равнонаклонные к главным осям тензора напряжений площадки, на которых эта работа не зависит от пути интегрирования. Данный факт позволяет прогнозировать неупругое поведение среды через указанные площадки.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. Muskhelishvili N. I. Some basic problems of the mathematical theory of elasticity, Moscow, Nauka, 1966, 707 pp. (in Russian) [Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М.: Наука, 1966. — 708 с.]

2. **Kachanov M. V.** Fundamentals of the theory of plasticity, Moscow, Nauka, 1969, 420 pp. (in Russian) [**Качанов Л. М.** Основы теории пластичности. — М.: Наука, 1969. — 420 с.]
3. **Malinin N. N.** Applied theory of plasticity and creep, Moscow, Mechanical engineering, 1975, 400 pp. (in Russian) [**Малинин Н. Н.** Прикладная теория пластичности и ползучести. — М.: Машиностроение, 1975. — 400 с.]
4. **Leonov M. Ya.** Mechanics of deformations and destruction: Physical and mathematical foundations of the theory, Frunze, Ilim Publishing House, 1981, 236 pp. (in Russian) [**Леонов М. Я.** Механика деформаций и разрушения: Физико-математические основы теории. — Фрунзе: Изд-во “Илим”, 1981. — 236 с.]
5. **Batdorf S. B., Budyanskiy B.** Mathematical theory of plasticity based on the concept of sliding, Mechanics, collection of translations of foreign articles, 1962, no. 1, pp. 135–155. (In Russian) [**Батдорф С. Б., Будянский Б.** Математическая теория пластичности, основанная на концепции скольжения // Механика: сборник переводов иностр. статей. — 1962. — № 1. — С. 135–155.]
6. **Shvaiko N. Yu.** On the theory of plasticity based on the concept of sliding, Applied Mechanics, 1976, vol. 12, no. 11, pp. 12–24. [**Швайко Н. Ю.** К теории пластичности, основанной на концепции скольжения // Прикладная механика. — 1976. — Т. 12. — № 11. — С. 12–24.]
7. **Rusinko K. N.** Peculiarities of inelastic deformation of solids, Lviv, Vishcha school, 1986, 151 pp. [**Русинко К. Н.** Особенности неупругой деформации твердых тел. — Львов, Вища школа, 1986. — 151 с.]
8. **Shemyakin E. I.** Anisotropy of plastic state, Numerical methods of continuum mechanics, 1973, vol. 4, no. 4, pp. 150–162. (in Russian) [**Шемякин Е. И.** Анизотропия пластического состояния // Численные методы механики сплошной среды. — 1973. — Т. 4. — № 4. — С. 150–162.]
9. **Khristianovich S. A.** Deformation of hardening plastic material, Solid mechanics, 1974, no. 2, pp. 148–174. (in Russian) [**Христианович С. А.** Деформация упрочняющегося пластического материала // Изв. АН СССР. МТТ. — 1974. — № 2. — С. 148–174.]
10. **Kovrizhnykh A. M.** Plastic deformation of hardening materials under complex loading, Solid mechanics, 1986, no. 4, pp. 140–146. (in Russian) [**Коврижных А. М.** Пластическое деформирование упрочняющихся материалов при сложном нагружении // Изв. АН СССР. МТТ. — 1986. — № 4. — С. 140–146.]
11. **Rabotnov Yu. N.** Resistance of materials, Moscow, Fizmatgiz, 1962, 456 pp. [**Работнов Ю. Н.** Сопротивление материалов. — М.: Физматгиз, 1962. — 456 с.]
12. **Puushin A. A.** Plastic, Moscow, Gostekhizdat, 1948, 376 pp. [**Ильюшин А. А.** Пластичность. — М.: Гостехиздат, 1948. — 376 с.]
13. **Zhukov A. M.** Plastic deformations of steel under complex loading, Mech. Solids, 1954, no. 11, pp. 53–61. (in Russian) [**Жуков А. М.** Пластические деформации стали при сложном нагружении // Изв. АН СССР, ОТН. — 1954. — № 11. — С. 53–61.]