8. **Вазов В.** Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., «Мир», 1968.
9. **Yih Chia-shun.** Stability of liquid down an inclined plan.—«Phys. Fluids», 1963, vol. 6, N 3, p. 321—334.
10. **Гончаренко Б. Н., Уринцев А. Л.** Об устойчивости течения вязкой жидкости по наклонной плоскости.— ПМТФ, 1975, № 3.
11. **Вайнберг М. М., Треногин В. А.** Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М., «Наука», 1969.
12. **Логинов Б. В., Треногин В. А.** Об использовании групповых свойств для определения многопараметрических семейств решений нелинейных уравнений. Мат. сборник, 1971, т. 85 (127), №3 (7), с. 440—454.
13. **Юдович В. И.** Возникновение автоколебаний в жидкости.—ПММ, 1971, т. 35, № 4, с. 638—655.
14. **Непомнящий А. А.** Трехмерные пространственно-периодические движения в пленке жидкости, стекающей по вертикальной плоскости.—В кн.: Гидродинамика. Вып. VII. Пермь, 1974, с. 43—52.
15. **Шкадов В. Я.** Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости.—«Труды НИИ механики МГУ», 1973, № 25, с. 3—192.
16. **Непомнящий А. А.** Устойчивость волновых режимов в пленке, стекающей по наклонной плоскости.—«Изв. АН СССР. МЖГ», 1974, № 3, с. 28—33.
17. **Непомнящий А. А.** Устойчивость волновых режимов в пленке жидкости относительно трехмерных возмущений.— В кн.: Гидродинамика, Вып. V. Пермь, 1974 с. 91—104.

---

УДК 532.5.4

# ВИХРЕВЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

*В. К. Андреев*

*(Новосибирск)*

Первые работы об устойчивости неустановившихся движений жидкости со свободной границей появились недавно [1—4]. Были исследованы на устойчивость течения в сферической полости [1,2], сферическом слое [3], полосе и кольце идеальной жидкости. В этих работах как основное движение, так и возмущенное предполагались потенциальными. Переходом к лагранжевым координатам удавалось существенно упростить решение задачи. Л. В. Овсянниковым [5] были получены в лагранжевых координатах уравнения малых потенциальных возмущений произвольного потенциального движения. На основе полученных уравнений решены типичные примеры, показывающие степень трудности исследования устойчивости неустановившихся движений [5—8]. Во всех работах устойчивость характеризуется отклонением свободной границы от ее невозмущенного состояния, т. е. нормальной составляющей вектора возмущений.

В данной работе получены общие уравнения малых возмущений неустановившегося течения жидкости со свободной границей в лагранжевых координатах. Для нормальной составляющей вектора возмущений найдено простое выражение. В случае потенциальных массовых сил полученная система сводится к одному уравнению для некоторой скалярной функции с эволюционным условием на свободной границе. Доказана теорема существования и единственности решения, в частности, решен вопрос о корректности линейной задачи о малых потенциальных возмущениях, поставленный в [5]. Исследованы два примера на устойчивость: а) растяжение полосы, б) сжатие круглого цилиндра при условии непотенциальности начального возмущения.

**1. Постановка задачи со свободной границей.** Общая задача со свободной границей формулируется следующим образом: в начальный момент времени заданы область $\Omega$ и поле скоростей $\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$, $\mathrm{div}\,\mathbf{u}_0=0$, $\mathbf{x}\in\Omega$, при $t > 0$ ищется область $\Omega(t)$ и определяются функции $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, $p(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющие в $\Omega(t)$ уравнениям Эйлера

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \mathbf{g}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \tag{1.1}$$

и условиям

$$p|_{\Gamma(t)} = 0, \quad \left.\frac{dF}{dt}\right|_{\Gamma(t)} = 0$$

на свободной границе. Здесь $F(\mathbf{x}, t)=0$—уравнение свободной границы $\Gamma(t)$; $\mathbf{g}$ — вектор массовых сил.

Введем лагранжевы координаты $\xi=(\xi, \eta, \zeta)$ с помощью уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}|_{t=0} = \xi, \quad \xi \in \Omega.$$

Если функция $\mathbf{x}=\mathbf{x}(\xi,t)$ известна, то вектор скорости можно найти просто дифференцированием по $t$, а давление $p$ — интегрированием первого из уравнений (1.1). Область $\Omega(t)$ получится как образ области $\Omega$ при отображении $\xi \to \mathbf{x}=\mathbf{x}(\xi,t)$, и тем самым задача о движении жидкости со свободной границей может рассматриваться как задача об отыскании отображения $\mathbf{x}=\mathbf{x}(\xi, t)$, $\xi \in \Omega$ уже в фиксированной области $\Omega$.

Л. В. Овсянниковым было показано, что задача об отыскании отображения $\mathbf{x}=\mathbf{x}(\xi, t)$, эквивалентная задаче о движении жидкости со свободной границей, в лагранжевых координатах имеет вид [5]

$$\Omega: \begin{cases} \operatorname{div} M^{-1}\mathbf{x}_t=0; & (1.2)\\ M^*(\mathbf{x}_{tt} - \mathbf{g})+\nabla p = 0; & (1.3)\end{cases}$$

$$\Gamma: M^*(\mathbf{x}_{tt} - \mathbf{g})\cdot\tau=0; \tag{1.4}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{x}=\xi, & (1.5)\\ \mathbf{x}_t=\mathbf{u}_0(\xi), \operatorname{div}\mathbf{u}_0=0 & (1.6)\end{array}\right\} t=0.$$

Здесь $M$ — матрица Якоби отображения $\xi \to \mathbf{x}$; $M^{-1}$, $M^*$ — матрицы, соответственно обратная и транспонированная к ней; $\tau$ — любое смещение вдоль границы $\Gamma$; все операторы берутся по лагранжевым координатам.

**2. Уравнения малых возмущений.** Пусть известно некоторое решение задачи (1.2) — (1.6) с начальной функцией $\mathbf{u}_0$, которое мы назовем основным. Рассмотрим другое решение в той же области $\Omega$, но с измененной начальной функцией

$$\tilde{\mathbf{x}}_t(\xi)=\mathbf{u}_0(\xi)+\mathbf{v}(\xi). \tag{2.1}$$

Это решение называется возмущенным решением, а функция $\mathbf{v}$ — начальным возмущением. Если возмущенное решение описывается функцией $\tilde{\mathbf{x}}$, то разность $\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$ можно назвать возмущением основного решения $\mathbf{x}$. Предполагая начальное возмущение $\mathbf{v}$ малым, можно надеяться на то, что возмущения будут малыми хотя бы на ограниченном интервале времени, и изучать задачу об эволюции малых возмущений в линейном приближении.

Положим $\tilde{\mathbf{x}}=\mathbf{x}+\mathbf{X}$ и обозначим через $N$ разность $\tilde{M} - M$ матриц Якоби, соответствующих возмущенному и основному решениям, тогда

$$\tilde{M} = M + N, \quad N = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi}.$$

Рассмотрим уравнение (1.2) для возмущенного решения

$$\operatorname{div} \tilde{M}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_t = 0.$$

Согласно [5], получим в линейном приближении

$$\operatorname{div} M^{-1} \mathbf{X} = 0. \tag{2.2}$$

Перейдем к преобразованию уравнения (1.3). Для возмущенного решения имеем

$$\tilde{M}^*(\tilde{\mathbf{x}}_{tt} - \tilde{\mathbf{g}}) + \nabla \tilde{p} = 0,$$

где

$$\tilde{p} = p + M^{*-1} \nabla \mathbf{g} \cdot \mathbf{X} + P, \ \tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{X}, t).$$

Используя тождество $\nabla(\mathbf{g} \cdot \mathbf{X}) = \nabla(\mathbf{g})\mathbf{X} + N^* \mathbf{g}$, находим

$$\tilde{M}^* (\tilde{\mathbf{x}}_{tt} - \tilde{\mathbf{g}}) + \nabla \tilde{p} = M^* (\mathbf{x}_{tt} - \mathbf{g}) + \nabla p + M^* \mathbf{X}_{tt} - M^*_{tt} \mathbf{X} +$$
$$+ \nabla [(\mathbf{x}_{tt} - \mathbf{g} + M^{*-1} \nabla p) \cdot \mathbf{X}] - A\mathbf{X} + \nabla P,$$
$$A = M^* \frac{\partial (\mathbf{g})}{\partial (\mathbf{x})} - \left(\frac{\partial (\mathbf{g})}{\partial (\xi)}\right)^*$$

в линейном приближении. Учитывая, что в основном движении выполнено (1.3), придем к соотношению

$$M^* \mathbf{X}_{tt} - [M^*_{tt} + A] \mathbf{X} = - \nabla P. \tag{2.3}$$

Условие (1.4) на свободной границе сводится к следующему:

$$\nabla (P + M^{*-1} \nabla p \cdot \mathbf{X})| \cdot {}_{\Gamma}^{\tau} = 0,$$

т. е. величина $P + M^{*-1} \Delta p \cdot \mathrm{X}$ на границе Г имеет постоянное значение, быть может зависящее от времени $t$. Отсюда

$$(P + M^{*-1} \nabla p \cdot \mathbf{X})|_{\Gamma} = 0. \tag{2.4}$$

Равенство (2.4) следует также из условий $\tilde{p}\ |\Gamma = 0$, $p\ |\Gamma = 0$.

К этим уравнениям необходимо добавить начальные условия при $t = 0$, вытекающие из того, что оба решения, основное и возмущенное, удовлетворяют одному и тому же начальному условию (1.5), а также условию (2.1), в результате чего

$$\mathbf{X}|_{t=0} = 0, \ \mathbf{X}_t|_{t=0} = \mathbf{v}, \ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \tag{2.5}$$

Уравнения (2.2) — (2.4) описывают эволюцию малых возмущений с начальными условиями (2.5).

Для дальнейших преобразований предположим, что $A = 0$, и введем новую функция Ф равенством

$$\Phi_t = -P.$$

Можно видеть, что условие $A = 0$ необходимо и достаточно для того, чтобы вектор массовых сил был потенциален в пространстве точки $(x)$: $\mathbf{g} = \nabla_x h$.

Уравнение (2.3) при $A = 0$ имеет общее решение

$$\mathbf{X} = V \int_0^t V^{-1} M^{*-1} (\nabla \Phi + \mathbf{v})\, dt, \tag{2.6}$$

где $V$ — фундаментальная матрица соответствующего однородного уравнения

$$V_t = M^{*-1} M^*_t V, \quad V|_{t=0} = E. \tag{2.7}$$

Так как из уравнения (1.4) следует, что

$$M_t^* = M^* \left(\frac{\partial(\mathbf{u})}{\partial(\mathbf{x})}\right)^*,$$

то уравнение для $V$ можно упростить и придать ему вид

$$V_t = \left(\frac{\partial(\mathbf{u})}{\partial(\mathbf{x})}\right)^* V, \quad V|_{t=0} = E. \tag{2.8}$$

Из (2.8) следует, что если основное движение потенциально, то матрица $V$ совпадает с матрицей $M$, ($M \equiv V$), и из (2. 7) вытекает тождество для таких движений, отмеченное в [5].

Поскольку на границе выполнено условие $p=0$ (граница свободна), градиент давления направлен по нормали к $\Gamma$, т. е.

$$\nabla p|_\Gamma = \frac{\partial p}{\partial n}\Big|_\Gamma \mathbf{n}.$$

Подставляя вектор $\mathbf{X}$ в (2.2), (2.4) и используя полученные уравнения, придем к задаче об эволюции малых возмущений произвольного основного движения жидкости со свободной границей, которое происходит под действием малого возмущения начальной функции (2.1)

$$\Omega : \operatorname{div}\left[M^{-1}V\int_0^t V^{-1}M^{*-1}(\nabla\Phi + \mathbf{v})\,dt\right] = 0; \tag{2.9}$$

$$\Gamma : \Phi_t = \frac{\partial p}{\partial n}\mathbf{n}\cdot M^{-1}V\int_0^t V^{-1}M^{*-1}(\nabla\Phi + \mathbf{v})\,dt; \tag{2.10}$$

$$t=0 : \Phi=0. \tag{2.11}$$

Предположим, что $\partial p/\partial n \neq 0$, $(\xi \in \Gamma, t \in [0, T]$, тогда из (2.9), (2.10) следует равенство

$$\int_\Gamma \left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)^{-1} \Phi_t d\Gamma = 0, \tag{2.12}$$

справедливое для любого решения задачи (2. 9) — (2.11).

Всюду в дальнейшем предполагается, что $\partial p/\partial n \leqslant -d < 0$ с постоянной $d > 0$. Для потенциальных движений жидкости в отсутствие массовых сил это неравенство справедливо всегда [5] и физически означает, что ускорение частиц на границе $\Gamma(t)$ направлено внутрь жидкости.

В предположении потенциальности массовых сил существует интеграл Вебера уравнений Эйлера [11]

$$\Omega : \begin{cases} M^*\mathbf{x}_t = \nabla\varphi + \mathbf{u}_0, \\ \operatorname{div} M^{-1}M^{*-1}(\nabla\varphi + \mathbf{u}_0) = 0; \end{cases}$$

$$\Gamma : \varphi_t = \frac{1}{2}|M^{*-1}(\nabla\varphi + \mathbf{u}_0)|^2 + h;$$

$$t = 0 : \begin{cases} \mathbf{x} = \xi, \varphi = 0, \\ \mathbf{x}_t = \mathbf{u}_0, \operatorname{div}\mathbf{u}_0 = 0. \end{cases}$$

Полагая для возмущенного решения

$$\tilde{\varphi} = \varphi + \mathbf{x}_t \cdot \mathbf{X} + \Phi, \quad \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \mathbf{X},$$

можно показать, что функция $\Phi$ удовлетворяет (2. 9) —(2. 11). Если не предполагать потенциальность вектора g, то надо пользоваться уравнениями (2.2) — (2.5).

**3. Теорема существования и единственности.** Пусть основное решение определено в области $\Omega$ с границей класса $C^2$ и принадлежит классу $C^3$ в цилиндре $D=[0,T]\times\overline{\Omega}$.

Дифференцируя уравнения (2.9), (2.10) один раз по времени, получим

$$(3.1)\qquad -\operatorname{div} M^{-1}M^{*-1}\nabla\Phi=\operatorname{div}\left(\mathbf{q}+B\int_0^t V^{-1}M^{*-1}\nabla\Phi dt\right)\equiv$$
$$\equiv f(\Phi),\quad \xi\in\Omega;$$

$$(3.2)\quad (a\Phi_t)_t+\mathbf{n}\cdot M^{-1}M^{*-1}\nabla\Phi=-\mathbf{n}\cdot\left(\mathbf{q}+B\int_0^t V^{-1}M^{*-1}\nabla\Phi dt\right)\equiv$$
$$\equiv h(\Phi),\quad \xi\in\Gamma,$$

где обозначено

$$\mathbf{q}=\left[M^{-1}M^{*-1}+B\int_0^t V^{-1}M^{*-1}dt\right]\mathbf{v},\ B=(M^{-1}V),$$
$$a=\left(-\frac{\partial p}{\partial n}\right)^{-1}\geqslant a_0>0.$$

Пусть $\|,\ \|_{+,\Gamma},\ \|,\|_{0,\Gamma},\ \|,\|_{0,\Omega},\ \|,\|_{1,\Omega}$ — соответственно нормы в пространствах $W_2^{1/2}(\Gamma)$, $L^2(\Gamma)$, $L^2(\Omega)$, $W_2^1(\Omega)$; $l$ — произвольный элемент пространства $W_2^{1/2}(\Gamma)$.

Л е м м а. Для любого $l\in W_2^{1/2}(\Gamma)$ существует единственное решение задачи

$$(3.3)\qquad \begin{cases}-\operatorname{div} M^{-1}M^{*-1}\nabla\Phi=f(\Phi),\ \xi\in\Omega,\\ \Phi|_\Gamma=l,\ \xi\in\Gamma,\end{cases}$$

при котором

$$\Phi\in L^2\left([0,T];\ W_2^1(\Omega)\right).$$

(Определение пространств $L^p([0,T];H)$, $0<p\leqslant\infty$ и производных по $t$ в этих пространствах дано в [10].)

Доказательство леммы будет приведено после доказательства теоремы существования. Если лемма справедлива, тогда, согласно [10], можно определить производную по конормали как элемент пространства $W_2^{-1/2}(\Gamma)$: $\partial/\partial\nu=\mathbf{n}\cdot M^{-1}M^{*-1}\nabla$. Определяется оператор $K$, сопоставляющий функции $\psi\in W_2^{1/2}(\Gamma)$ элемент $K\psi\in W_2^{-1/2}(\Gamma)$ по правилу: по функции $\psi\in W_2^{1/2}(\Gamma)$ ищется решение задачи (3.3), а затем вычисляется $K\psi=\mathbf{n}\cdot M^{1-}M^{*-1}\nabla\Phi$. Из определения следует, что $K$ действует из $W_2^{1/2}(\Gamma)$ в $W_2^{-1/2}(\Gamma)$.

Положим $\Phi(t)|_\Gamma=\psi(t)$, тогда

$$\frac{\partial\Phi(t)}{\partial\nu}=K(t)\psi(t),$$

и, следовательно, задача (3.1), (3. 2) сводится к задаче Коши для интегро-дифференциального уравнения с неограниченным оператором в гильбертовом пространстве для функции $\psi$ на свободной границе $\Gamma$, а именно

$$(3.4)\qquad \frac{d}{dt}\left(a\frac{d\psi}{dt}\right)+K(t)\psi=h(\psi);$$

$$(3.5)\qquad \psi=\frac{d\psi}{dt}=0\quad\text{при}\quad t=0.$$

Для отыскания функции $\Phi$ остается решить задачу Дирихле

$$-\operatorname{div} M^{-1}M^{*-1}\nabla\Phi=f(\Phi),\quad \xi\in\Omega;$$

$$\Phi(\xi,t)=\psi(\xi,t),\ \xi\in\Gamma.$$

Теорема. Если $v\in L^2(\Omega)$, то существует и притом единственное решение задачи (3.4), (3.5), когда

$$(3.6)\qquad \begin{cases}\psi\in L^2([0,T];\ W_2^{1/2}(\Gamma)),\\ \psi'\in L^2([0,T];\ L^2(\Gamma)),\end{cases}$$

где штрих означает дифференцирование по $t$.

Для доказательства применяется метод Галеркина. Основным моментом доказательства является вывод априорной оценки

$$(3.7)\qquad \|\psi(t)\|^2_{\frac12,\Gamma}+\|\psi'(t)\|^2_{0,\Gamma}\leqslant \text{const},$$

в которой постоянная зависит лишь от области $\Omega$ и основного решения.

Для вывода априорной оценки (3.7) предположим, что кроме включений (3.6) выполнено еще одно условие: фукция $(a\psi')'$ суммируема с квадратом по $t$ на $[0,\ T]$.

Умножим уравнение (3.4) па $\psi'(t)$ и проинтегрируем по $\Gamma$:

$$(3.8)\qquad ((a\psi')',\psi')_\Gamma+(K\psi,\psi')_\Gamma=(h(\psi),\psi')_\Gamma,$$

где

$$(\varphi,\psi)_\Gamma=\int\limits_\Gamma \varphi\psi d\Gamma.$$

Первый член преобразуем следующим образом:

$$((a\psi')',\ \psi')_\Gamma=\frac12\frac{d}{dt}(a\psi',\psi')_\Gamma+\frac12(a'\psi',\psi')_\Gamma,$$

а для преобразования второго — воспользуемся формулой Гаусса — Остроградского

$$(K\psi,\ \psi')_\Gamma=-(\Phi_t,f(\Phi))_\Omega+\frac12\frac{d}{dt}\left(M^{*-1}\nabla\Phi,\ M^{*-1}\nabla\Phi\right)_\Omega-$$

$$-\frac12\left(\nabla\Phi,\ (M^{-1}M^{*-1})'\nabla\Phi\right)_\Omega.$$

Подставляя эти равенства в (3.8) и интегрируя по времени, после преобразований приходим к соотношению

$$(3.9)\qquad (a\psi',\ \psi')_\Gamma+\left(M^{*-1}\nabla\Phi,\ M^{*-1}\nabla\Phi\right)_\Omega=$$

$$=\int\limits_0^t\left(\nabla\Phi,(M^{-1}M^{*-1})'\nabla\Phi\right)_\Omega dt-\int\limits_0^t(a'\psi',\psi')_\Gamma\,dt-2(\nabla\Phi,\mathbf{q})_\Omega-$$

$$-2\left(\nabla\Phi,\ B\int\limits_0^t V^{-1}M^{*-1}\nabla\Phi dt\right)_\Omega+2\int\limits_0^t(\nabla\Phi,\mathbf{q}')_\Omega\,dt+$$

$$+2\int\limits_0^t\left(\nabla\Phi,BV^{-1}M^{*-1}\nabla\Phi\right)_\Omega dt+2\int\limits_0^t\left(\nabla\Phi,\ B'\int\limits_0^\tau V^{-1}M^{*-1}\nabla\Phi d\tau\right)_\Omega dt.$$

Пусть $\alpha=\min\limits_{\xi\in\Gamma,t\in[0,T]} a(\xi,t)>0$, тогда, очевидно, $(a\psi',\ \psi')_\Gamma\geqslant\alpha\|\psi'\|^2_{0,\Gamma}$, а $\left(M^{*-1}\nabla\Phi,\right.$ $\left.M^{*-1}\nabla\Phi\right)_\Omega\geqslant\beta\|\nabla\Phi\|^2_{0,\Omega}$, поскольку для любого вектора $\boldsymbol{\tau}$, $|\boldsymbol{\tau}|\neq0$, имеем $(M^{*-1}\boldsymbol{\tau},M^{*-1}\boldsymbol{\tau})\geqslant\beta\ |\boldsymbol{\tau}|^2$ и левая часть равенства (3.9) оценивается снизу

$$(a\psi',\ \psi')_\Gamma+\left(M^{*-1}\nabla\Phi,\ M^{*-1}\nabla\Phi\right)_\Omega\geqslant\alpha\|\psi'\|^2_{0,\Gamma}+\beta\|\nabla\Phi\|^2_{0,\Omega}.$$

Правую часть оценим, пользуясь теоремой о следах [10], следующим образом:

$$\left|\int_0^t (\nabla \Phi, (M^{-1}M^{*-1})' \nabla \Phi)_\Omega\, dt\right| \leqslant c_0 \int_0^t \|\Phi\|^2_{1,\Omega}\, dt \leqslant c_1 \int_0^t \|\psi\|^2_{+,\Gamma}\, dt,$$

$$\left|-\int_0^t (a'\psi', \psi')_\Gamma\, dt\right| \leqslant c_2 \int_0^t \|\psi'\|^2_{0,\Gamma}\, dt,$$

$$|-2(\nabla \Phi, \mathbf{q})_\Omega| \leqslant \varepsilon_1 \|\nabla \Phi\|^2_{0,\Omega} + \frac{c_3}{\varepsilon_1}\|\mathbf{v}\|^2_{0,\Omega},$$

$$\left|2\int_0^t (\nabla \Phi, \mathbf{q}')_\Omega\, dt\right| \leqslant c_4 \int_0^t \|\psi\|^2_{+,\Gamma}\, dt + c_5\|\mathbf{v}\|^2_{0,\Omega},$$

$$\left|2\left(\nabla \Phi, B\int_0^t V^{-1}M^{*-1}\nabla \Phi dt\right)_\Omega\right| \leqslant c_6\varepsilon_2\|\nabla \Phi\|^2_{0,\Omega} + c_7\int_0^t \|\psi\|^2_{+,\Gamma}\, dt,$$

$$\left|2\int_0^t (\nabla \Phi, BV^{-1}M^{*-1}\nabla \Phi)_\Omega\, dt\right| \leqslant c_8 \int_0^t \|\psi\|^2_{+,\Gamma}\, dt,$$

$$\left|2\int_0^t \left(\nabla \Phi, B'\int_0^\tau V^{-1}M^{*-1}\nabla \Phi d\tau\right)_\Omega dt\right| \leqslant c_9 \int_0^t \|\psi\|^2_{+,\Gamma}\, dt,$$

где $c_i > 0$ обозначают различные постоянные. Суммируя полученные оценки и выбирая $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ так, чтобы $\gamma=\beta - (\varepsilon_1+c_6\varepsilon_2) > 0$ (достаточно взять $\varepsilon_2=\varepsilon_1/c_6, \varepsilon_1 < \beta/2$), получим неравенство

$$\gamma\|\nabla \Phi\|^2_{0,\Omega} + \alpha\|\psi'\|^2_{0,\Gamma} \leqslant m + c_{10}\int_0^t \left(\|\psi\|^2_{+,\Gamma} + \|\psi'\|^2_{0,\Gamma}\right) dt.$$

Прибавим к обеим частям последнего неравенства $\sigma\|\psi\|^2_{0,\Gamma}$ с произвольным $\sigma > 0$ и, замечая, что

$$\|\psi\|_{0,\Gamma} \leqslant \int_0^t \|\psi'(t)\|_{0,\Gamma}\, dt,$$

$$\gamma\|\nabla \Phi\|^2_{0,\Omega} + \sigma\|\psi\|^2_{0,\Gamma} \geqslant \lambda\|\Phi\|^2_{1,\Omega} \geqslant \omega\|\psi\|^2_{+,\Gamma}$$

с положительными постоянными $\lambda, \omega$, окончательно получим неравенство

$$\delta\left(\|\psi'(t)\|^2_{0,\Gamma} + \|\psi(t)\|^2_{+,\Gamma}\right) \leqslant m + c_{11}\int_0^t \left(\|\psi'(t)\|^2_{0,\Gamma} + \|\psi(t)\|^2_{+,\Gamma}\right) dt,$$

где $\delta=\min(\alpha, \omega)$. С помощью леммы Гроноулла отсюда получаем оценку (3.7) с постоянной, равной

$$\frac{mT}{\delta}\exp\left(\frac{c_{11}T}{\delta}\right).$$

Априорная оценка доказана.

Определим приближенное решение $\psi_n$ задачи (3.4), (3.5) с помощью равенств

$$\left.\begin{aligned}
&\psi_n(t) = \sum_{i=1}^n c_{in}(t) w_i, \quad n = 1, 2, \ldots \\
&((a\psi_n')', w_j)_\Gamma + (K(t)\psi_n, w_j)_\Gamma = (h(\psi_n), w_j), \\
&\psi_n(0) = \psi'_n(0) = 0,
\end{aligned}\right\}$$

где $w_j$, $j=1, 2, \ldots$ — базис в $W_2^{1/2}(\Gamma)$. Тогда неизвестные коэффициенты $c_{in}(t)$ определятся из системы интегро-дифференциальных уравнений второго порядка. Поэтому предположение о суммируемости $(a\psi_n')'$ для приближений выполнено, и для них справедлива оценка (3.7). Затем известным способом доказывается, что предельная функция является решением задачи (3.4), (3.5) и единственна [11].

Для доказательства леммы тоже применяется метод Галеркина. Продолжим $l$ на $\Omega$ так, чтобы продолженная функция $\tilde{l}$ принадлежала $W_2^1(\Omega)$. Введем новую функцию $\Psi=\Phi-\tilde{l}$, тогда $\Psi_\Gamma=0$ и в области $\Omega$ для $\Psi$ получим задачу

$$(3.10)\quad -\operatorname{div} M^{-1}M^{*-1}\nabla\Psi = \operatorname{div}\left(\mathbf{q}+\mathbf{p}+B\int_0^t V^{-1}M^{*-1}\nabla\Psi dt\right), \Psi|_\Gamma=0,$$

где

$$\mathbf{p}=M^{-1}M^{*-1}\nabla\tilde{l}+B\int_0^t V^{-1}M^{*-1}\nabla\tilde{l}\,dt.$$

Умножим уравнение (3.10) на $\Psi$ и проинтегрируем по $\Omega$:

$$(3.11)\quad (M^{*-1}\nabla\Psi, M^{*-1}\nabla\Psi)_\Omega=\left(\Psi, \operatorname{div}\left(\mathbf{b}+B\int_0^t V^{-1}M^{*-1}\nabla\Psi dt\right)\right)_\Omega,$$

$\mathbf{b}=\mathbf{p}+\mathbf{q}$.

Очевидно,

$$(M^{*-1}\nabla\Psi, M^{*-1}\nabla\Psi)_\Omega\geqslant\beta\|\nabla\Psi\|_{0,\Omega}^2\geqslant c_1\|\Psi\|_{1,\Omega},$$

а левая часть оценивается следующим образом:

$$\left(\Psi, \operatorname{div}\left(\mathbf{b}+B\int_0^t V^{-1}M^{*-1}\nabla\Psi dt\right)\right)_\Omega\leqslant\left(\frac{1}{2}\varepsilon_1+\frac{c_2\varepsilon_2}{2}\right)\|\Psi\|_{1,\Omega}^2+$$

$$+\|\mathbf{b}\|_{0,\Omega}^2+c_3\int_0^t\|\Psi\|_{1,\Omega}^2\,dt.$$

Полагая $\varepsilon_2=\varepsilon_1/c_2$, $\varepsilon_1=c_1/2$, получим неравенство

$$\frac{c_1}{2}\|\Psi\|_{1,\Omega}^2\leqslant n+c_3\int_0^t\|\Psi\|_{1,\Omega}^2\,dt,$$

откуда следует, что $\|\Psi(t)\|_{1,\Omega}^2\leqslant\text{const}$ при $0\leqslant t\leqslant T$.

Замечания.

1. Из уравнения (3.4) следует, что

$$\frac{d^2\psi}{dt^2}\in L^2\left([0,T]; W_2^{-1/2}(\Gamma)\right),$$

отсюда ([10], теорема 3.1) вытекает, что $\psi'$ — почти всюду непрерывная функция $[0,T]\to W_2^{-1/2}(\Gamma)$, а тогда из (3.6) следует, что $\psi$—непрерывная функция $[0,T]\to L^2(\Gamma)$. Поэтому равенства (3.6) имеют смысл.

2. Из неравенства (3.7) следует более сильное утверждение

$$\psi\in L^\infty\left([0,T]; W_2^{1/2}(\Gamma)\right);\quad \psi'\in L^\infty([0,T); L^2(\Gamma)).$$

3. Теорема существования и единственности в случае, когда основное движение потенциально, доказана автором в [9].

**4. Устойчивость.** В настоящее время нет сколь-нибудь общего подхода к изучению поведения возмущений при $t\to\infty$ задачи (2.9) — (2.11), т. е. к вопросу об устойчивости основного решения относительно изменения начальных данных. Поэтому каждую задачу подобного вида приходится рассматривать индивидуально. Заметим, что в условиях задачи об устойчивости оценка (3.7) с ростом $t$ делается все более слабой и ничего не дает при $t\to\infty$, так как постоянная в (3.7) стремится к бесконечности. Наиболее тонко устойчивость характеризуется поведением при $t\to\infty$ нормальной составляющей вектора возмущений

$$R=\mathbf{X}\cdot\mathbf{n}_x,\ \mathbf{n}_x \text{ — нормаль к } \Gamma(t),$$

т. е. отклонением свободной границы от ее невозмущенного состояния. Имеем в силу уравнения (2.4)

$$R=\mathbf{X}\cdot\mathbf{n}_x=\mathbf{X}\cdot\frac{\nabla_x F}{|\nabla_x F|}=M^{-1}\mathbf{X}\cdot\mathbf{n}\frac{|\nabla_\xi F|}{|M^{*-1}\nabla_\xi F|}=\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)^{-1}\frac{|\nabla_\xi F|}{|M^{*-1}\nabla_\xi F|}\Phi_t|_\Gamma. \tag{4.1}$$

Предположим теперь, что основное движение потенциально. Как уже отмечалось, в этом случае матрица $V$ совпадает с матрицей $M$ и задача (2.9) — (2.11) несколько упрощается. Имеем

$$\Omega:\ \operatorname{div} M^{-1}M^{*-1}(\nabla\Phi+\mathbf{v})=0; \tag{4.2}$$

$$\Gamma:\Phi_{tt}-\frac{\partial p_t}{\partial n}\Phi_t-\frac{\partial p}{\partial n}\mathbf{n}\cdot M^{-1}M^{*-1}(\nabla\Phi+\mathbf{v})=0; \tag{4.3}$$

$$t=0:\ \Phi=\Phi_t=0. \tag{4.4}$$

Здесь рассмотрим задачу (4.2) — (4.4) в двух частных случаях.

Пример 1 (растяжение полосы). Отображение $\xi\to\mathbf{x}$, соответствующее основному решению, возьмем в виде

$$x=\frac{\xi}{1-kt},\quad y=\eta(1-kt),\quad k=\text{const}. \tag{4.5}$$

Компоненты скоростей и давление даются формулами

$$u=\frac{k\xi}{(1-kt)^2}=\frac{kx}{1-kt};\quad v=-k\eta=-\frac{ky}{1-kt};$$

$$p=\frac{k^2}{(1-kt)^4}\left(\xi_0^2-\xi^2\right).$$

Интерпретация этого решения такова: область $\Omega$ имеет вид прямоугольника («бруса») $|\xi|\leqslant\xi_0$, на котором при $t=0$ задано поле скоростей $u_0=k\xi=kx$, $v_0=-k\eta=-ky$. В момент $t=0$ прямая $\eta=\pi$ («штамп») внезапно начинает двигаться поступательно со скоростью $w=-k\pi$, а прямая $\eta=0$ («основание») остается неподвижной. Прямые $|\xi|=\xi_0$ образуют свободную границу, а $\eta=0$, $\eta=\pi$ — непроницаемые стенки.

Подстановка отображения (4.5) в уравнения (4.2) — (4.4) дает ($\mathbf{v}=(u,v)$)

$$\alpha^4\Phi_{\xi\xi}+\Phi_{\eta\eta}+\alpha^4u_\xi+v_\eta=0;\quad |\xi|<\xi_0; \tag{4.6}$$

$$(\alpha^4\Phi_\alpha)_\alpha+2\xi\alpha^2(\Phi_\xi+u)=0,\ |\xi|=\xi_0; \tag{4.7}$$

$$\Phi=\Phi_\alpha=0,\ (\alpha=1-kt),\ \alpha=1. \tag{4.8}$$

Из (4.1) для нормальной компоненты получим

$$R=X=\frac{\alpha^3}{2\xi_0}\Phi_\alpha,\quad Y=\alpha\int\limits_1^\alpha\frac{1}{\alpha^3}(\Phi_\eta+v)\,d\alpha,\quad \mathbf{X}=(X,Y).$$

Условие непротекания сводится к тому, что $Y=0$ при $\eta=0, \eta=\pi$ или

$$\Phi_\eta+v=0, \quad \eta=0, \pi.$$

(Случай, когда $\operatorname{rot}\mathbf{v}=0$, исследован в [4,5].) Дальнейшие выкладки проводятся так же, как в [5], поэтому они не приводятся. Заметим только, что уравнение для амплитуды $R$ неоднородно. Для решений, четных относительно $\xi$, при растяжении бруса $AmR\sim t^2$, а при нечетных решениях $AmR\sim t$, что и означает неустойчивость. При сжатии бруса в линию движение устойчиво.

Если возмущения потенциальны, то движение устойчиво для решений, четных относительно $\xi$.

Пример 2. Эта задача в случае потенциальных возмущений с учетом сил поверхностного натяжения (а также и без них) рассматривалась в [7]. Основное решение берем в виде

$$\mathbf{x}=\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\xi, \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\eta, \gamma\zeta\right), \quad p=-\frac{3\varkappa^2}{8\gamma^3}(\xi^2+\eta^2-\rho_0^2), \tag{4.9}$$

$$\gamma=1+\varkappa t, \quad \varkappa=\text{const}.$$

Свободной границей является боковая поверхность цилиндра. Цилиндр ограничен двумя непроницаемыми стенками: неподвижной $\zeta=0$ и подвижной $\zeta=h$. С ростом $t$ цилиндр при $\varkappa>0$ стягивается к оси $x=y=0$, а при $\varkappa<0$ «разбухает» до бесконечности за время $t^*=-1/\varkappa$. Подставляя (4.9) в уравнения (4.2) — (4.4), получим в цилиндрических координатах $\xi=\rho\cos\theta$, $\eta=\rho\sin\theta$, $\xi=\xi$, ($\mathbf{v}=(u^\rho, u^\theta, w)$):

$$\Phi_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}\Phi_\rho+\frac{1}{\rho^2}\Phi_{\theta\theta}+\frac{1}{\gamma^3}\Phi_{\zeta\zeta}=\left(1-\frac{1}{\gamma^3}\right)w_\zeta, \quad \rho<\rho_0; \tag{4.10}$$

$$\frac{1}{\gamma}(\gamma^3\Phi_\gamma)_\gamma+\frac{3}{4}\rho\Phi_\rho=\frac{3}{4}\rho u^\theta, \quad \rho=\rho_0; \tag{4.11}$$

$$\Phi=\Phi_\gamma=0, \quad \gamma=1. \tag{4.12}$$

Для нормальной составляющей $R$ имеем

$$R=-\frac{4\gamma^{5/2}}{3\varkappa\rho_0}\Phi_\gamma|_{\rho=\rho_0}. \tag{4.13}$$

Полагая

$$(\Phi, w_\zeta, u^\theta)=(A,f,g)\exp[i(n\zeta+\lambda\theta)], \quad i=\sqrt{-1},$$

получим для функции $A(\rho,\gamma)$ неоднородное уравнение на $\Gamma$

$$\frac{1}{\gamma}(\gamma^3A_\gamma)_\gamma+\frac{3}{4}\rho_0\frac{I'_\lambda(\beta\rho_0)}{I_\lambda(\beta\rho_0)}A=\frac{3}{4}\rho_0\left[g+\left(1-\frac{1}{\gamma^3}\right)\int\limits_0^{\rho_0}\frac{I_\lambda(\beta r)}{I_\lambda(\beta\rho_0)}f(r)\,dr\right], \tag{4.14}$$

$$I'_\lambda(\beta\rho_0)=\frac{d}{d\rho}I_\lambda(\beta\rho)|_{\rho=\rho_0}, \quad \beta=n\gamma^{-3/2}.$$

Здесь $I_\lambda$ — функция Бесселя. Исследование уравнения (4.14) показывает, что при $\gamma\to\infty$ в случае осесимметрических возмущений ($\lambda=0$) нормальная компонента $R$ неограниченно возрастает, в то время как она ограничена при потенциальных возмущениях [7]. Если $\gamma\to 0$, то движение устойчиво, т. е. такие возмущения затухают при сближении стенок $\zeta=0$, $\zeta=h$.

Приведенные два примера показывают дестабилизирующее влияние непотенциальных возмущений на устойчивость движения.

В заключение автор благодарит В. В. Пухначева за руководство и постоянное внимание при выполнении данной работы.

*Поступила 20 XII 1974*