

однозначно лишь на достаточном удалении от поверхности раздела областей. Вблизи же поверхности тип разрушения определяется лишь с некоторой вероятностью, так как за счет случайной флуктуации отношения прочностей точка может переходить с одной стороны поверхности на другую. Поскольку относительный разброс прочностей мал ($\pm 5\%$), отношение прочностей распределено почти симметрично относительно τ^*/σ^* . Поэтому, казалось бы, случаи расслоения и нормального разрыва должны быть равновероятны. Однако счет показал преобладание расслоения особенно в области больших углов и длин. Результаты представлены в табл. 3. Вероятность рассчитывалась по 10 испытаниям, причем глубина движения трещины составляла пять волокон. При каждом продвижении трещины учитывалось изменение геометрии задачи и напряженное состояние пересчитывалось заново. На рис. 4 приведены типичные возможности развития трещины.

Преобладание расслоений можно объяснить следующим образом. Первый акт разрушения может быть с равной вероятностью разрывом или расслоением. Однако дальше симметрия нарушается. Возникновение расслоения очень сильно снижает концентрацию нормальных напряжений в волокнах и делает дальнейшие разрывы маловероятными. Если же произошел разрыв волокна, то это не мешает появиться расслоению на следующем шаге за счет случайной вариации прочности. Кроме того, благодаря подрастанию трещины возможен переход изображающей точки через поверхность раздела в область расслоения, вследствие чего дальнейшие разрывы становятся менее вероятными.

Таким образом, разброс прочностных свойств элементов композита может способствовать стабилизации трещин и тем самым повышению несущей способности изделий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Михайлов А. М. О разрушении однонаправленного стеклопластика // Изв. АН СССР. МТТ.— 1973.— № 5.
2. Гюнтер Н. М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики.— М.: Гостехиздат, 1953.
3. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа.— М.: Наука, 1978.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: Физматгиз, 1963.
5. Колпаков А. Г. Концентрация напряжений в конструкции из однонаправленного композита // ПМТФ.— 1982.— № 2.
6. Ланкина Е. А., Михайлов А. М. Фундаментальные решения теории однонаправленного композита.— Новосибирск, 1991.— Деп. в ВИНТИ 30.05.91, № 2953.
7. Чамис К. Микромеханические теории прочности // Композитные материалы. Разрушение и усталость.— М.: Мир, 1978.— Т. 5.

г. Комсомольск-на-Амуре

Поступила 18/IX 1991 г.

УДК 539.219.1

Л. Ф. Колкер, Г. Н. Миренкова, Э. Г. Соснина

ЗАВИСИМОСТЬ НАПРЯЖЕНИЙ НА ПОВЕРХНОСТИ ТРЕЩИНЫ ОТ АНИЗОТРОПИИ СРЕДЫ

Решается пространственная задача о влиянии анизотропии на концентрацию напряжений на поверхности узкой трещины в ортотропной и трансверсально-изотропной упругих средах во внешнем однородном поле. Под узкой трещиной понимается эллипсоидальная полость, характеризующаяся двумя малыми (но конечными) параметрами. Получены явные

выражения для напряжений на поверхности трещины в зависимости от упругих постоянных среды и нормали к поверхности для различных случаев внешнего поля. Установлено, что анизотропия среды вносит не только количественные, но и качественные изменения в распределение напряжений на трещине. Так, за счет анизотропии возможен сдвиг максимума напряжений от кромки трещины при одноосном растяжении. Определены условия на упругие постоянные среды, при которых имеет место сдвиг максимума напряжений, вычислены координаты точек максимумов и значения максимальных напряжений. Найдены также условия, при которых напряжения в торцах трещины больше напряжений в вершинах среднего сечения, что принципиально невозможно получить из решения плоской задачи.

В работе использовано общее решение задачи о распределении напряжений на поверхности эллипсоидальной полости, полученное в [1].

1. Рассмотрим узкую эллипсоидальную трещину в упругой среде, находящейся под действием внешнего однородного поля $\sigma_0^{\alpha\beta}$. Систему координат x^α ($\alpha = 1, 2, 3$) жестко свяжем с полуосями a_1, a_2, a_3 эллипсоида и введем безразмерные параметры $\zeta = a_2 a_1^{-1}, \xi = a_3 a_2^{-1}$. Случай $\zeta \ll 1, \xi \sim 1$ соответствует игле, $\zeta \sim 1, \xi \ll 1$ — трещине, $\zeta \ll 1, \xi \ll 1$ — узкой трещине. Решение для узкой трещины получим из решения для иглы [2], разложив его по малому параметру ξ и ограничившись главными членами разложения.

Напряжения на поверхности произвольной эллипсоидальной полости находятся по формулам [1]

$$\sigma^{\alpha\beta}(\mathbf{n}) = B^{\alpha\beta\lambda\mu}(\mathbf{n}) B_{\lambda\mu\kappa\rho}^{-1} \sigma_0^{\kappa\rho},$$

$$B^{\alpha\beta\lambda\mu}(\mathbf{n}) = c^{\alpha\beta\lambda\mu} - c^{\alpha\beta\kappa\rho} K_{\kappa\rho\nu\eta}(\mathbf{n}) c^{\nu\eta\lambda\mu}.$$

Здесь $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ — единичный вектор нормали к поверхности эллипсоида; $c^{\alpha\beta\lambda\mu}$ — тензор упругих постоянных среды; $B_{\lambda\mu\kappa\rho}^{-1}$ — постоянный тензор, обратный $B^{\lambda\mu\kappa\rho}$, который для иглы имеет вид [2]

$$(1.1) \quad B = B_0 + O(\xi^2 \ln \zeta), \quad B_0 = \frac{\xi}{2\pi} \int_0^\pi \frac{B(\varphi, 0) d\varphi}{\cos^2 \varphi + \xi^2 \sin^2 \varphi},$$

$$B(\varphi, 0) = B(\mathbf{n})|_{n_1=0, n_2=\cos \varphi, n_3=\sin \varphi}.$$

Компоненты тензора $B(n)$ для ортотропной среды по главным сечениям эллипсоида приведены в [2], компоненты $K(\mathbf{n})$ на всей поверхности эллипсоида — в [3]. Чтобы осуществить предельный переход к узкой трещине, рассмотрим в (1.1) функцию

$$f(\varphi, \xi) = \pi^{-1} \xi (\cos^2 \varphi + \xi^2 \sin^2 \varphi)^{-1}.$$

Можно показать, что при $\xi \rightarrow 0, \varphi \rightarrow \pi/2$ $f(\varphi, \xi) \rightarrow \delta(\varphi - \pi/2)$, где $\delta(\varphi)$ — δ -функция Дирака. Поэтому разложение $f(\varphi, \xi)$ по малому параметру ξ запишем как

$$f(\varphi, \xi) = \delta(\varphi - \pi/2) + \xi \cos^2 \varphi + O(\xi^2).$$

Разложение тензора B по ξ получим из (1.1), подставив в него разложение $f(\varphi, \xi)$ и проведя регуляризацию интегралов [4]:

$$B = B_{00} + \xi B_{01} + O(\xi^2, \xi^2 \ln \zeta), \quad B_{00} = B(\pi/2, 0),$$

$$B_{01} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} [B(\varphi, 0) - B(\pi/2, 0)] \cos^{-2} \varphi d\varphi.$$

Таким образом, определение напряжений на поверхности трещины сведено к нахождению однократных интегралов и обращению тензора B .

2. Считаем, что внешняя среда ортотропна и оси упругой симметрии среды совпадают с осями эллипсоида. Опуская процесс вычисления и об-

ращения тензора B , приведем компоненты тензора B^{-1} , удержав в них два главных члена разложения по малому параметру ξ :

$$(2.1) \quad B_{11\alpha\alpha}^{-1} = \Delta_{1\alpha}\Delta^{-1} \quad (\alpha = 1, 2, 3), \quad B_{2222} = \Delta_{22}\Delta^{-1},$$

$$B_{2233}^{-1} = \Delta_{11}^{-1}(\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta^{-1} - kc_{33}),$$

$$B_{3333}^{-1} = \xi^{-1}L\Delta_{11}^{-1} + \Delta_{33}\Delta^{-1}, \quad B_{1212} = (4c_{66})^{-1},$$

$$B_{1313}^{-1} = (4c_{55})^{-1}(\xi^{-1}\sqrt{c_{55}c_{66}^{-1}} + 1), \quad B_{2323}^{-1} = (4k\Delta_{11})^{-1}L(\xi^{-1} + l),$$

$$k = \sqrt{\frac{c_{22}}{c_{33}}}, \quad l = \sqrt{\frac{\Delta_{11} - 2c_{23}c_{44}}{c_{33}c_{44}}} + 2k, \quad L = klc_{33}.$$

Здесь $c_{\alpha\beta} = c^{\alpha\alpha\beta\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$); $c_{11} = c^{2323}$; $c_{55} = c^{3131}$; $c_{66} = c^{1212}$; $\Delta, \Delta_{\alpha\beta}$ — определитель и алгебраические дополнения элементов $c_{\alpha\beta}$ матрицы $\|c_{\alpha\beta}\|$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$); k, l — параметры анизотропии, аналогичные введенным в [5] для плоских задач.

Исследование поведения напряжений проводится в локальной системе координат $x^{\alpha'}$ ($\alpha' = 1, 2, 3$) с осью $x^{3'}$, направленной по нормали к поверхности [6]. В новых осях в силу условий равновесия отличны от нуля лишь напряжения $\sigma^{1'1'} = \sigma_1$, $\sigma^{2'2'} = \sigma_2$ и $\sigma^{1'2'} = \tau$, причем σ_1 и σ_2 в сечениях $n_1 = 0$ и $n_2 = 0$ направлены соответственно перпендикулярно плоскости и вдоль контура сечения, на кромке трещины ($n_3 = 0$) — наоборот.

Ввиду громоздкости общих выражений для σ_1, σ_2 и τ рассмотрим только сингулярные составляющие этих напряжений вдоль главных сечений трещины. В сечении $n_1 = 0$ имеем

$$(2.2) \quad \sigma_1 = -(\xi\Delta_{11})^{-1}L\eta_1(n_2^2\sigma_0^{33} - k^{-1}n_2n_3\sigma_0^{23}),$$

$$\sigma_2 = -\Delta_{11}p_1\eta_1^{-1}\sigma_1, \quad \tau = (\xi\sqrt{c_{55}c_{66}})^{-1}\psi_1n_2\sigma_0^{13};$$

в сечении $n_2 = 0$

$$(2.3) \quad \sigma_1 = -\xi^{-1}\eta_2[L\Delta_{11}^{-1}n_1^2\sigma_0^{33} - (\sqrt{c_{55}c_{66}})^{-1}n_1n_3\sigma_0^{13}],$$

$$\sigma_2 = -\Delta_{22}p_2\eta_2^{-1}\sigma_1, \quad \tau = (\xi k\Delta_{11})^{-1}L\psi_2\sigma_0^{23};$$

в сечении $n_3 = 0$

$$(2.4) \quad \sigma_1 = -(\xi\Delta_{11})^{-1}L\eta_3\sigma_0^{33}, \quad \sigma_2 = p\eta_3^{-1}\sigma_1,$$

$$\tau = \xi^{-1}\psi_3[(k\Delta_{11})^{-1}Ln_1\sigma_0^{23} - (\sqrt{c_{55}c_{66}})^{-1}n_2\sigma_0^{13}].$$

Здесь

$$(2.5) \quad p = p_3[\Delta_{22}n_1^4 + \Delta_{11}n_2^4 + (\Delta_{66}^{-1} + 2\Delta_{12})n_1^2n_2^2],$$

$$p_1 = [c_{22}n_2^2 + c_{33}n_3^2 + (\Delta_{11}c_{44}^{-1} - 2c_{23})n_2^2n_3^2]^{-1},$$

$$\eta_1 = p_1(\Delta_{13}n_2^2 + \Delta_{12}n_3^2), \quad \psi_1 = c_{55}c_{66}(c_{66}n_2^2 + c_{55}n_3^2)^{-1}.$$

Выражения для p_2, η_2, ψ_2 и p_3, η_3, ψ_3 получаются из p_1, η_1, ψ_1 заменой индексов $1 \leftrightarrow 2, 4 \leftrightarrow 5$ и $1 \leftrightarrow 3, 4 \leftrightarrow 6$.

Приведем также напряжения в вершинах трещины $A(n_1 = 1, n_2 = n_3 = 0)$ и $B(n_1 = n_3 = 0, n_2 = 1)$ (в вершине $C(n_1 = n_2 = 0, n_3 = 1)$ сингулярные напряжения отсутствуют):

$$(2.6) \quad \sigma_1(A) = -\Delta_{23}\Delta_{22}^{-1}\sigma_2(A) = -L(\xi c_{11}\Delta_{11})^{-1}\Delta_{23}\sigma_0^{33},$$

$$\sigma_1(B) = -\Delta_{13}\Delta_{11}^{-1}\sigma_2(B) = -L(\xi c_{22}\Delta_{11})^{-1}\Delta_{13}\sigma_0^{33},$$

$$\tau(A) = (\xi k\Delta_{11})^{-1}Lc_{44}\sigma_0^{23}, \quad \tau(B) = -(\xi\sqrt{c_{66}})^{-1}\sqrt{c_{55}}\sigma_0^{13}.$$

Отсюда найдем, что в анизотропной среде (в отличие от изотропной) напряжения в торце A могут быть больше, чем в боковой точке B . Так,

$\sigma_1(A) > \sigma_1(B)$ и $\sigma_2(A) > \sigma_2(B)$, если выполнены соответственно условия

$$c_{11}c_{22}(c_{13} + c_{23}) > c_{12}(c_{11}c_{23} + c_{22}c_{13}), \quad c_{11}c_{23}^2 > c_{22}c_{13}^2.$$

Отметим, что данный результат принципиально невозможно получить из решения плоской задачи*.

3. Исследуем качественное влияние анизотропии среды на поведение напряжений. Анализируя формулы (2.2)–(2.5), найдем, что в ортотропной среде при одноосном растяжении σ_0^{33} максимум напряжений σ_1, σ_2 может достигаться не на кромке трещины, как в изотропном случае [6], а смещаться от нее вдоль сечений. В сечении $n_2 = 0$ напряжение σ_2 имеет максимальное значение σ_2^* в точке $n_1^* < 1$, если для упругих постоянных среды выполняется соотношение

$$(3.1) \quad c_{55} > \Delta_{22}(c_{11} + 2c_{13})^{-1}.$$

При этом

$$(3.2) \quad n_1^* = \sqrt[4]{c_{33}c_{55}[(c_{11} + c_{33} + 2c_{13})c_{55} - \Delta_{22}]^{-1}}, \\ \sigma_2^* = \frac{L\xi^{-1}}{c_{55}} \left[\Delta_{22}c_{55}^{-1} - 2(c_{13} + c_{33}) + 2\sqrt{c_{33}(c_{11} + c_{33} + 2c_{13}) - \Delta_{22}c_{55}^{-1}} \right]^{-1}.$$

Для сдвига максимума σ_1 от кромки трещины достаточно условия

$$(3.3) \quad c_{55} > \Delta_{22}\Delta_{23}(c_{11}\Delta_{12} + 2c_{13}\Delta_{23})^{-1}.$$

В сечении $n_1 = 0$ аналогичные соотношения получаются из (3.1)–(3.3) заменой индексов $2 \leftrightarrow 1$ и $5 \leftrightarrow 4$.

На кромке трещины в ортотропной среде в отличие от изотропной сингулярные напряжения зависят от координат точки, причем возможен сдвиг максимумов σ_1 и σ_2 вдоль кромки от вершин. Так, сдвиг максимумов σ_1 от торца A происходит при

$$c_{66} > \Delta_{23}\Delta_{33}[c_{11}(\Delta_{13} + \Delta_{23}) + 2c_{13}\Delta_{23}]^{-1}.$$

Если внешнее поле — чистый сдвиг σ_0^{13} , то максимальные по модулю значения σ_1 и σ_2 в сечении $n_1 = 0$ смещаются от кромки трещины в точки n_2^* при условии $c_{66} > 2c_{55}$, причем

$$n_2^* = \pm \sqrt{c_{55}(c_{66} - c_{55})^{-1}}, \quad \sigma_2^* = \sqrt{c_{66}}(2\xi\sqrt{c_{66} - c_{55}})^{-1}.$$

В сечении $n_2 = 0$, как и в изотропном случае, наблюдается «эффект всплеска» напряжений [6].

4. Исследуем поведение напряжений на узкой трещине в трансверсально-изотропной среде с упругими постоянными E_i, ν_i, G ($i = 1, 2$) в зависимости от расположения оси упругой симметрии среды. Связь между упругими постоянными $c_{\alpha\beta}$ и E_i, ν_i, G можно получить из закона Гука [5]. Параметры анизотропии k и l для среды с осью симметрии, направленной по x^3 , примут вид

$$k_0 = \sqrt{\frac{\rho - \nu_2^2}{1 - \nu_1^2}}, \quad l_0 = \sqrt{\frac{E_1}{G(1 - \nu_1^2)} - \frac{2\nu_2}{1 - \nu_1} + 2k_0}, \quad \rho = \frac{E_1}{E_2}.$$

Для осей симметрии, направленных по x^2 и x^1 , $k = k_0^{-1}, l = l_0k_0^{-1}$ и $k = 1, l = 2$.

Из формул (2.2)–(2.5) найдем, что при одноосном растяжении σ_0^{33} в сечениях трещины, лежащих в плоскостях изотропии среды, поведение напряжений такое же, как в изотропной среде: максимум достигается в точках кромки, а на кромке они постоянны.

Для сечений, проходящих через ось упругой симметрии среды, условия, при которых имеется сдвиг максимумов σ_1 и σ_2 при растяжении

* Решению плоской задачи отвечают значения напряжений в сечении $n_1 = 0$, где практически не сказывается влияние торцов.

Напря- жение	Ось упру- гой сим- метрии	Сечение	Условия на упругие параметры среды, при кото- рых имеет место сдвиг максимума напряжений
σ_1	x^1 x^2	$n_2 = 0$ $n_1 = 0$	$\kappa < \frac{v_2(1+v_1)}{2v_1}$
	x^3	$n_1 = 0$ $n_2 = 0$	$\kappa < v_2 + \frac{v_1(1-v_1)k_0^2}{2v_2}$
	x^1 x^2	$n_3 = 0$	$\kappa < \frac{v_1(1-v_1) + v_2(1+v_1)}{2v_1}, k_0^2 \geq \frac{v_2}{v_1}$ $\kappa < v_2 + \frac{(1-v_1)(v_1+v_2)k_0^2}{2v_2}, k_0^2 < \frac{v_2}{v_1}$
σ_2	x^1 x^2	$n_2 = 0$ $n_1 = 0$	$\kappa < v_2 + \frac{1-v_1}{v_2}$
	x^3	$n_1 = 0$ $n_2 = 0$	$\kappa < v_2 + \frac{(1-v_1)k_0^2}{2}$
	x^1 x^2	$n_3 = 0$	$\kappa < \frac{\rho v_1^2 + v_2}{v_2(1+v_1)}, \rho < \frac{v_2^2}{v_1^2}$ $\kappa < \frac{v_2}{v_1}, \rho \geq \frac{v_2^2}{v_1^2}$

σ_0^{33} , сведены в таблицу, из которой видно, что качественная картина поведения напряжений меняется при увеличении G (уменьшении $\kappa = E_1[2G(1+v_1)]^{-1}$).

Анализ полученных результатов и расчеты показали, что сдвиг максимальных напряжений от кромки трещины наиболее ярко выражен, когда ось упругой симметрии среды направлена перпендикулярно плоскости трещины. При этом величина максимума и его расположение существенно зависят от модуля сдвига G : с увеличением G разность между максимальным напряжением и его значением на кромке увеличивается, а точка максимума смещается от кромки.

Напряжения в торце трещины становятся больше напряжений в вершине ее среднего сечения только в том случае, когда ось упругой симметрии среды проходит через плоскость трещины. Для оси симметрии, направленной по x^1 , напряжения $\sigma_i(A) > \sigma_i(B)$, $i = 1, 2$, если соответственно выполняются неравенства

$$E_1 v_1 > E_2 v_2 [1 + v_1(v_2 - v_1)], \quad E_1 v_1^2 > E_2 v_2^2.$$

Для оси симметрии x^2 знаки неравенств меняются на противоположные.

Из (2.6) можно получить условия, при которых коэффициент концентрации напряжений на трещине в анизотропной среде становится больше, чем в изотропной. В частности, для трансверсально-изотропной среды с осью симметрии x^2 это наблюдается при $l_0 > 2$ (например, для стеклопластиков).

Если внешнее поле — чистый сдвиг σ_0^{13} , то в сечениях, проходящих через ось упругой симметрии среды, максимум напряжений σ_1 и σ_2 может смещаться от кромки трещины, как и при одноосном растяжении. Для сред с осями упругой симметрии, направленными по x^2 и x^3 , в сечении

$n_1 = 0$ смещение имеет место при $\kappa < 0,5$ и $\kappa > 2$ соответственно. В сечении $n_2 = 0$ при любом направлении оси упругой симметрии среды наблюдается «эффект всплеска».

Таким образом, полученные результаты показывают, когда при решении конкретных задач целесообразны применение пространственной модели и учет анизотропии среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кунин И. А., Соснина Э. Г. Концентрация напряжений на эллипсоидальной неоднородности в анизотропной упругой среде // ПММ.— 1973.— Т. 37, вып. 2.
2. Миренкова Г. Н., Соснина Э. Г. Полая эллипсоидальная игла в ортотропной упругой среде // ПММ.— 1990.— Т. 54, вып. 6.
3. Миренкова Г. Н., Соснина Э. Г. Жесткий эллипсоидальный диск и игла в анизотропной упругой среде // ПММ.— 1981.— Т. 45, вып. 1.
4. Гельфанд И. М., Шилев Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними.— М.: ГИФМЛ, 1959.
5. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела.— М.: Наука, 1977.
6. Кунин И. А., Миренкова Г. Н., Соснина Э. Г. Эллипсоидальная трещина и игла в анизотропной упругой среде // ПММ.— 1973.— Т. 37, вып. 3.

г. Новосибирск

Поступила 2/X 1991 г.

УДК 539.3

А. Б. Киселев, М. В. Юмашев

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ ТВЕРДОГО ТОПЛИВА ПРИ УДАРНОМ НАГРУЖЕНИИ

Движение многих типов ракет обеспечивается твердыми видами горючего. Структура таких материалов очень неоднородна вследствие соединения расплавленных кристаллических наполнителей сгорания (окислителей) и полимерной матрицы, которая составляет в весовом отношении большой процент. Технология изготовления твердых топлив не позволяет полностью исключить наличие рассеянных микропор, которые могут явиться одной из причин неприятностей при эксплуатации. Могут появиться поры и в результате длительного хранения топлива, поскольку и в обычных условиях в нем идут медленные химические реакции, в результате которых материал «газит», что, в частности, и приводит к разрыву микропор. Кроме того, на практике имеют место аварийные ситуации, например при транспортировке, в результате которых происходит удар по блоку твердого топлива инородным телом, падение блока. Вследствие этого могут появиться повреждения, трещины в топливе. Поведение их представляет большой интерес, так как по ним формируется доминирующая траектория горения, что может привести к нарушению равновесия конструкции в полете или даже взрыву системы [1]. Прогнозирование поведения твердых топлив при ударном нагружении, оценки уровней допустимых с точки зрения целостности конструкций и их пожаровзрывоопасности динамических нагрузок составляет одну из важнейших проблем, стоящих перед исследователями.

Предлагаемая в настоящей работе модель твердого топлива как пористой термоупругопластической среды принадлежит к классу моделей сред с внутренними параметрами состояния, активно разрабатываемому в настоящее время на основе термодинамических принципов механики сплошной среды. Основы феноменологического описания таких сред заложены в [2—4], представление об основных направлениях развития ко-