

УДК 539.375

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ЧАСТИЧНОГО ЗАКРЫТИЯ ЩЕЛИ ПЕРЕМЕННОЙ ШИРИНЫ
С КОНЦЕВЫМИ ЗОНАМИ В МАССИВЕ ГОРНЫХ ПОРОД**

В. М. Мирсалимов

*Азербайджанский технический университет,
Институт математики и механики НАН Азербайджана,
E-mail: mir-vagif@mail.ru, просп. Гусейна Джавида, 25, AZ1073, г. Баку, Азербайджан*

Рассматривается задача о сжатии изотропной среды с щелью переменной ширины с концевыми зонами, в которых функционируют силы сцепления материала. Взаимодействие поверхностей щели под действием тектонических и гравитационных усилий в массиве горных пород приводит к образованию зон контакта их поверхностей. Исследуется случай появления нескольких участков контакта берегов щели. На некоторой части площадки контакта возникает сцепление берегов, на остальной возможно проскальзывание. Нахождение неизвестных параметров, характеризующих частичное закрытие щели, сводится к решению системы сингулярных интегро-дифференциальных уравнений. Определены контактные напряжения, усилия в связях между берегами щели в концевых зонах, значения размеров участков контакта, зон сцепления и концевых зон предразрушения.

Массив горных пород, щель переменной ширины, концевые зоны предразрушения, тектонические и гравитационные усилия, силы сцепления, контактные напряжения

DOI: 10.15372/FTPRPI20200102

В механике горных пород, изучающей закономерности напряженного состояния и механического поведения горного массива при добыче полезных ископаемых, широко используются методы механики разрушения. Актуальной проблемой является исследование разрушения массива горных пород, ослабленного различными трещинами, щелями, полостями.

Рассматривается разрушение массива, ослабленного прямолинейной щелью переменной ширины $h(x)$, на поверхность которой воздействует внутреннее давление $p(x)$. Принято, что щель имеет концевые зоны со связями между берегами. Описывается квазистатический процесс деформирования массива горных пород. При наличии вблизи щели зон с нарушенной структурой в процесс разрушения вовлекается большая часть щели. В таких случаях область, в которой происходит разрушение, представляет собой некоторый слой (концевая зона), примыкающий к щели и содержащий материал с частично нарушенными связями. Используется модель щели со связями между берегами в концевой зоне, получившая экспериментальное подтверждение [1 – 4]. Опубликован ряд работ, посвященных исследованию деформированных тел с трещинами при наличии сил сцепления между берегами и возможности их контакта [5 – 22].

Решить задачу механики разрушения с учетом контакта берегов трещины непросто из-за увеличения числа неизвестных параметров задачи, таких как контактные напряжения, границы контакта и т. п. Эти проблемы важны при исследовании разрушения композитных материалов, горных пород и др. Вопросы частичного контактирования берегов щели переменной ширины и учета переменности ширины щели к настоящему времени малоизученны.

В настоящей работе дается общая постановка задачи с переменной шириной щели, трением и сцеплением ее берегов при действии тектонических и гравитационных сил. Получено решение этой задачи для щели со связями между берегами в концевых зонах. Контактные напряжения определяются в квадратурах, что удобно для практического применения в инженерных расчетах.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим массив горных пород, ослабленный прямолинейной щелью переменной ширины $h(x)$, сравнимой с упругими деформациями. Горная порода — однородное и изотропное тело, щель расположена далеко от поверхности земли. Длина щели $2l = b - a$ (рис. 1). Пусть весомое полупространство $y < H$ ослаблено одной прямолинейной щелью параллельной поверхности полупространства. Описывается модель щели с силами сцепления (связями), непрерывно распределенными в узких концевых зонах щели и имеющими заданную диаграмму деформирования. В процессе нагружения массива при некотором соотношении физических и геометрических параметров среды и действующих тектонических и гравитационных усилий, поверхностных нагрузок появляются зоны сжимающих напряжений, в которых берега щели могут войти в контакт. Это приведет к возникновению контактных напряжений на данном участке берегов щели. В процессе деформирования берега щели вступают в контакт на участках (α_k, β_k) ($k = 1, 2, \dots, n$). Принято, что каждая площадка контакта состоит из участка сцепления берегов (c_k, d_k) и двух участков (α_k, c_k) и (d_k, β_k) , на которых возможно проскальзывание.

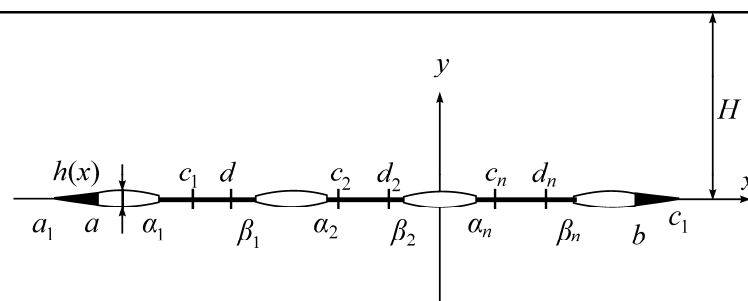


Рис. 1. Расчетная схема задачи о частичном закрытии щели переменной ширины с концевыми зонами предразрушения в массиве горных пород

Напряженно-деформированное состояние горных пород формируется от действия тектонических и гравитационных усилий, первые из которых являются постоянными по глубине массива. Распределение напряжений в горном массиве от действия гравитационных усилий принято согласно гипотезе А. Н. Динника:

$$\sigma_x = -\lambda \rho_* g (H - y), \quad \sigma_y = -\rho_* g (H - y), \quad \tau_{xy} = 0,$$

где σ_x , σ_y — горизонтальные и вертикальные нормальные напряжения соответственно; τ_{xy} — касательные напряжения; $\lambda = \nu / (1 - \nu)$ — коэффициент бокового распора породы; ν — коэффициент Пуассона; ρ_* — средняя плотность горного массива; g — ускорение силы тяжести; $(H - y)$ — глубина рассматриваемой точки массива от поверхности земли.

Считается, что вдали от щели в упругом полупространстве действуют напряжения (имитирующие тектонические усилия) $\sigma_x = \sigma_x^\infty$, $\sigma_y = \sigma_y^\infty$, $\tau_{xy} = 0$, а поверхность полупространства $y = H$ подвержена постоянной нормальной нагрузке $\sigma_y = \sigma_y^\infty$ и равной нулю касательной.

В процессе деформирования массива в зонах, где берега щели вошли в контакт, возникают нормальные $p_y(x)$ и касательные $p_{xy}(x)$ напряжения, значения которых заранее неизвестны и подлежат определению. В этом случае щель состоит из трех областей: 1) противоположные берега щели, нагруженные давлением; 2) концевые зоны (a_1, a) и (b, b_1) со связями между берегами; 3) зоны (α_k, β_k) , в которых берега щели вошли в контакт.

Граничные условия задачи на берегах щели и концевых зон в данной задаче имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_y - i\tau_{xy} &= p_y(x) - ip_{xy}(x) \quad \text{на } L_1, \\ \sigma_y - i\tau_{xy} &= (1 - if_0(x))p_y(x) \quad \text{на } L_2, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y - i\tau_{xy} &= -p(x) \quad \text{на } L_3, \\ \sigma_y - i\tau_{xy} &= q_y(x) - iq_{xy}(x) \quad \text{на } L_4, \\ \frac{\partial}{\partial x}(v^+ - v^-) &= -h'(x) \quad \text{на } L_1 + L_2, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(u^+ - u^-) = 0 \quad \text{на } L_1,$$

где L_1 — совокупность участков сцепления; L_2 — совокупность участков проскальзывания; L_3 — совокупность участков, на которых действует внешнее давление $p(x)$; L_4 — совокупность концевых участков действия сил сцепления $(a_1, a) \cup (b, b_1)$.

Здесь принято, что на участках проскальзывания имеют место силы сухого трения (закон трения принимается в форме Амонтона–Кулона); $f_0(x)$ — коэффициент трения; $q_y(x)$, $q_{xy}(x)$ — нормальные и касательные напряжения в связях между берегами щели в концевых зонах; $(u^+ - u^-)$ и $(v^+ - v^-)$ — касательная и нормальная составляющие раскрытия берегов щели; $p_y(x)$ и $p_{xy}(x)$ — нормальные и касательные контактные напряжения.

Модель контакта с трением и сцеплением впервые рассмотрена в [23]. Размеры контактных и концевых зон щели заранее неизвестны и подлежат определению. Основные соотношения поставленной задачи должны быть дополнены уравнениями, связывающими раскрытие берегов концевых зон щели и усилий в связях

$$\begin{aligned} v^+(x, 0) - v^-(x, 0) - i(u^+(x, 0) - u^-(x, 0)) &= \Pi_y(x, \sigma)q_y(x) - i\Pi_x(x, \sigma)q_{xy}(x), \\ \sigma &= \sqrt{q_{xy}^2 + q_y^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

$\Pi_y(x, \sigma)$, $\Pi_x(x, \sigma)$ — эффективные податливости связей, зависящих от их натяжения; σ — модуль вектора усилий в связях.

МЕТОД РЕШЕНИЯ

Напряженное состояние в горном массиве с щелью представим в виде суммы

$$\sigma_x = \sigma_x^0 + \sigma_x^1, \quad \sigma_y = \sigma_y^0 + \sigma_y^1, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^0 + \tau_{xy}^1. \quad (4)$$

Здесь $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$ — компоненты тензора напряжений в нетронутом (сплошном) массиве $y < H$

$$\begin{aligned} \sigma_x^0 + \sigma_y^0 &= \sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty + \frac{\rho_* g}{2i(1-\nu)}(z - \bar{z} - 2iH), \\ \sigma_y^0 - \sigma_x^0 + 2i\tau_{xy}^0 &= \sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty + \frac{\rho_* g(1-2\nu)}{2i(1-\nu)}(z - \bar{z} - 2iH). \end{aligned}$$

Щель расположена далеко от поверхности полупространства, при этом граничные условия на берегах щели будем удовлетворять точно, а на границе полупространства — приближено, асимптотически. С учетом формул (4) граничные условия (1) запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_y^1 - i\tau_{xy}^1 &= p_y(x) - ip_{xy}(x) - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) \quad \text{на } L_1, \\ \sigma_y^1 - i\tau_{xy}^1 &= (1 - if_0(x))p_y(x) - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) \quad \text{на } L_2, \\ \sigma_y^1 - i\tau_{xy}^1 &= -p(x) - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) \quad \text{на } L_3, \\ \sigma_y^1 - i\tau_{xy}^1 &= q_y(x) - iq_{xy}(x) - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) \quad \text{на } L_4. \end{aligned} \tag{5}$$

Напряженное состояние $\sigma_x^1, \sigma_y^1, \tau_{xy}^1$ удовлетворяет однородному бигармоническому уравнению для функций напряжений. Следовательно, компоненты тензора напряжений $\sigma_x^1, \sigma_y^1, \tau_{xy}^1$ и вектора перемещений u_1, v_1 можно выразить через две кусочно-аналитические функции комплексного переменного $z = x + iy$ $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$

$$\begin{aligned} \sigma_y^1 - i\tau_{xy}^1 &= \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \\ 2\mu \frac{\partial}{\partial x}(u_1 + iv_1) &= \kappa\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \end{aligned} \tag{6}$$

где μ — модуль сдвига материала горной породы [24].

С помощью граничных условий (5) и представлений (6) приходим к задаче линейного сопряжения с разрывными коэффициентами [24]

$$\begin{aligned} [\Phi(t) + \Omega(t)]^+ + [\Phi(t) + \Omega(t)]^- &= 2f(t), \\ [\Phi(t) - \Omega(t)]^+ - [\Phi(t) - \Omega(t)]^- &= 0, \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$f(t) = \begin{cases} p_y - ip_{xy} - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) & \text{на } L_1, \\ (1 - if_0(x))p_y - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) & \text{на } L_2, \\ -p(x) - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) & \text{на } L_3, \\ q_y - iq_{xy} - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) & \text{на } L_4. \end{cases}$$

Так как напряжения в массиве горных пород ограничены, решение краевой задачи (7) следует искать в классе всюду ограниченных функций:

$$\begin{aligned} \Phi(z) = \Omega(z) &= \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{a_1}^{b_1} \frac{f(t)}{X(t)(t-z)} dt, \\ X(z) &= \sqrt{(z-a_1)(z-b_1)}. \end{aligned} \tag{8}$$

При $z \rightarrow \infty$ $X(z) \rightarrow z + O(1/z)$. Корень под знаком интеграла представляет собой значение ветви соответствующей функции, выделяемой приведенным условием на верхнем берегу щели.

Из условия разрешимости краевой задачи (7) в классе всюду ограниченных функций

$$\int_{a_1}^{b_1} \frac{f(t)}{X^+(t)} dt = 0, \quad \int_{a_1}^{b_1} \frac{tf(t)}{X^+(t)} dt = 0. \quad (9)$$

Соотношения (9) служат для определения неизвестных параметров a_1 и b_1 . В (8), (9) входят неизвестные контактные напряжения $p_y(x)$, $p_{xy}(x)$ и усилия в связях $q_y(x)$, $q_{xy}(x)$. Для их установления построим интегральные уравнения. Условиями, определяющими неизвестные функции $p_y(x)$, $p_{xy}(x)$, $q_y(x)$ и $q_{xy}(x)$, являются соотношения (2) и (3). Используя вторую формулу в (6) и граничные значения функции $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ на отрезке $y = 0$ $a_1 \leq x_1 \leq b_1$, получаем

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = \frac{2\mu}{1 + \kappa} \left[\frac{\partial}{\partial x} (u^+ - u^-) + i \frac{\partial}{\partial x} (v^+ - v^-) \right]. \quad (10)$$

Теперь, применяя формулы Сохоцкого – Племеля из [24] и учитывая (8), находим

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = -\frac{iX^+(x)}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} \frac{f(t)}{X^+(t)(t-x)} dt. \quad (11)$$

С помощью (2), (8), (10), (11) после ряда преобразований имеем систему интегро-дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $q_y(x)$, $q_{xy}(x)$ и $p_y(x)$, $p_{xy}(x)$:

$$\begin{aligned} & \frac{X_1^+(x)}{\pi} \left[\int_{L_1+L_2} \frac{p_y(t)}{X_1^+(t)(t-x)} dt - \int_{a_1}^{b_1} \frac{\sigma_y^0(t) dt}{X_1^+(t)(t-x)} dt - \right. \\ & \left. - \int_{L_3} \frac{p(t)}{X_1^+(t)(t-x)} dt + \int_{L_4} \frac{q_y(t)}{X_1^+(t)(t-x)} dt \right] = \frac{2\mu}{1 + \kappa} h'(x), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\int_{L_1} \frac{p_{xy}(t)}{X_1^+(t)(t-x)} dt + \int_{L_2} \frac{f_0 p_y(t)}{X_1^+(t)(t-x)} dt - \int_{a_1}^{b_1} \frac{\tau_{xy}^0(t)}{X_1^+(t)(t-x)} dt + \int_{L_4} \frac{q_{xy}(t)}{X_1^+(t)(t-x)} dt = 0, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{X_1^+(x)}{\pi} \left[\int_{L_4} \frac{q_y(t)}{X_1^+(t)(t-x)} dt + \int_{L_1+L_2} \frac{p_y(t)}{X_1^+(t)(t-x)} dt - \int_{a_1}^{b_1} \frac{\sigma_y^0(t)}{X_1^+(t)(t-x)} dt - \right. \\ & \left. - \int_{L_3} \frac{p(t)}{X_1^+(t)(t-x)} dt \right] = \frac{2\mu}{1 + \kappa} \frac{d}{dx} [\Pi_y(x, \sigma) q_y(x)] \quad x \in L_4, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{X_1^+(x)}{\pi} \left[\int_{L_4} \frac{q_{xy}(t)}{X_1^+(t)(t-x)} dt + \int_{L_1} \frac{p_{xy}(t)}{X_1^+(t)(t-x)} dt - \int_{L_2} \frac{f_0 p_y(t)}{X_1^+(t)(t-x)} dt - \right. \\ & \left. - \int_{a_1}^{b_1} \frac{\tau_{xy}^0(t)}{X_1^+(t)(t-x)} dt \right] = \frac{2\mu}{1 + \kappa} \frac{d}{dx} [\Pi_x(x, \sigma) q_{xy}(x)] \quad x \in L_4, \end{aligned} \quad (15)$$

где $X_1^+(t) = \sqrt{(t-a_1)(b_1-t)}$.

МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Поставленная задача распалась на две независимые: для щели нормального разрыва (12), (14) и поперечного сдвига (13), (15). Интегральное уравнение (12) можно решить с помощью соответствующей задачи Римана [25]. Представим его в виде

$$\int_{L_1+L_2} \frac{p_y^*(\tau)}{\tau-t} d\tau = f_*(t); \quad p_y^*(t) = \frac{p_y(t)}{X_1(t)},$$

$$f_*(t) = \frac{2\mu h'(t)}{(1+\kappa)X_1(t)} + \int_{a_1}^{b_1} \frac{\sigma_y^0(\tau)}{X_1^+(\tau)(\tau-t)} d\tau + \int_{L_3} \frac{p(\tau)}{X_1^+(\tau)(\tau-t)} d\tau - \int_{L_4} \frac{q_y(\tau)}{X_1^+(\tau)(\tau-t)} d\tau.$$

Введем кусочно-аналитическую функцию $F_*(z)$, заданную интегралом Коши, плотность которого является искомым решением интегрального уравнения

$$F_*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1+L_2} \frac{p_y^*(\tau)}{t-\tau} d\tau.$$

Аналитическая функция $F_*(z)$ — решение задачи линейного сопряжения граничных значений

$$F_*^+(\tau) + F_*^-(\tau) = \frac{f_*(\tau)}{\pi i}. \tag{16}$$

Решение краевой задачи (16) в классе всюду ограниченных функций имеет вид

$$F_*(z) = \frac{X_2(z)}{2\pi i} \int_{L_1+L_2} \frac{f_*^1(\tau)}{X_2^+(\tau)(t-\tau)} d\tau,$$

где $X_2(z) = \prod_{k=1}^n \sqrt{(z-\alpha_k)(z-\beta_k)}$; $f_*^1(\tau) = \frac{f_*(\tau)}{\pi i}$; $X_2^+(\tau) = \prod_{k=1}^n \sqrt{(\tau-\alpha_k)(\tau-\beta_k)}$.

Принимая во внимание формулы Сохоцкого–Племеля, получаем решение интегрального уравнения (12):

$$p_y^*(t) = F_*^+(t) - F_*^-(t),$$

$$F_*^+(t) = X_2^+(t) \left(\frac{1}{2} \frac{f_*^1(t)}{X_2^+(t)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1+L_2} \frac{f_*^1(\tau)}{X_2^+(\tau)(\tau-t)} d\tau \right),$$

$$F_*^-(t) = X_2^-(t) \left(-\frac{1}{2} \frac{f_*^1(t)}{X_2^+(t)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1+L_2} \frac{f_*^1(\tau)d\tau}{X_2^+(\tau)(\tau-t)} \right).$$

С учетом $X_2^-(t)/X_2^+(t) = -1$

$$p_y^*(t) = \frac{X_2^+(t)}{\pi i} \int_{L_1+L_2} \frac{f_*^1(\tau)}{X_2^+(\tau)(\tau-t)} d\tau,$$

откуда следует

$$p_y(t) = X_1^+(t) \frac{X_2^+(t)}{\pi i} \int_{L_1+L_2} \frac{f_*^1(\tau)}{X_2^+(\tau)(\tau-t)} d\tau. \tag{17}$$

Для определения параметров α_k и β_k примем

$$\int_{L_1+L_2} \frac{t^{k-1} f_*(t)}{X_2^+(t)} dt = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (18)$$

Недостающие n уравнений для установления координат концов участков контакта берегов щели получим из условий

$$v^+(\alpha_k) - v^-(\alpha_k) = -h(\alpha_k), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Имеем

$$v^+(x) - v^-(x) = \frac{1}{4\pi i \gamma} \int_{\alpha_1}^x G(t) dt,$$

$$\gamma = \mu / (\pi(1 + \kappa)), \quad G(t) = [\Phi + \bar{\Phi}]^+ - [\Phi + \bar{\Phi}]^-.$$

Применяя предыдущие формулы, находим искомые уравнения

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_1} G(t) dt = -4\pi i \gamma h(\alpha_1), \quad (19)$$

$$\int_{\beta_k}^{\alpha_{k+1}} G(t) dt = -4\pi i \gamma [h(\alpha_{k+1}) - h(\beta_k)], \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Аналогично решая сингулярное интегральное уравнение (13), получим

$$p_{xy}(x) = \frac{X_1^+(x) X_3^+(x)}{\pi^2} \int_{L_1} \frac{f_{xy}(\tau)}{X_3^+(\tau)(\tau - x)} d\tau, \quad (20)$$

где

$$X_3^+(x) = \prod_{k=1}^m \sqrt{(x - c_k)(x - d_k)};$$

$$f_{xy}(x) = - \int_{L_2} f_0 p_y(t) dt / (X_1^+(t)(t - x)) + \int_{a_1}^{b_1} \tau_{xy}^0(t) / (X_1^+(t)(t - x)) dt - \int_{L_4} q_{xy}(t) / (X_1^+(t)(t - x)) dt.$$

Для определения неизвестных c_k и d_k используем

$$\int_{L_1} \frac{t^{k-1} f_{xy}(t)}{X_3^+(t)} dt = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (21)$$

Недостающие m уравнений для нахождения координат концов участков контакта получим из условий

$$u^+(c_k) - u^-(c_k) = \int_{a_1}^{c_k} \frac{\partial}{\partial t} (u^+ - u^-) dt = 0 \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Имеем

$$\int_{a_1}^{c_1} [\Phi^+ - \Phi^-] dt = -2\pi i \gamma h(c_1); \quad (22)$$

$$\int_{d_k}^{c_{k+1}} [\Phi^+ - \Phi^-] dt = -2\pi i \gamma [h(c_{k+1}) - h(d_k)], \quad k = 1, 2, \dots, m-1.$$

Для определения участков сцепления получили полную систему уравнений: (14), (15) представляют собой нелинейные интегро-дифференциальные уравнения с ядром Коши и могут быть решены численно. Для этого используем коллокационную схему с аппроксимацией неизвестных функций [26]. В (14), (15), (9) все интервалы интегрирования приводятся к $[-1, 1]$, а интегралы заменяются конечными суммами с помощью квадратурных формул типа формулы Гаусса. Производные в правых частях (14), (15) замещаются конечно-разностными аппроксимациями. При этом учитываются граничные условия $q_y(a_1) = q_y(b_1) = 0$, $q_{xy}(a_1) = q_{xy}(b_1) = 0$, что соответствует $v^+(a_1, 0) - v^-(a_1, 0) = 0$, $v^+(b_1, 0) - v^-(b_1, 0) = 0$, $u^+(a_1, 0) - u^-(a_1, 0) = 0$, $u^+(b_1, 0) - u^-(b_1, 0) = 0$. В дискретной постановке задачи вместо каждого интегрального уравнения в (14), (15) с соответствующими дополнительными условиями получаем $M_1 + 2$ алгебраических уравнения для определения напряжений в узловых точках, расположенных в концевых зонах (a_1, a) и (b, b_1) щели, и неизвестных параметров a_1, b_1

$$\sum_{k=1}^M A_{mk} (q_{y,k} + p_{y,k} + f_{oy,k}) = \frac{(1+\kappa)M}{4\mu(b_1 - a_1)} [\Pi_y(x_{m+1}\sigma(x_{m+1}))q_{y,m+1} - \Pi_y(x_{m-1}, \sigma(x_{m-1}))q_{y,m-1}], \quad m = 1, 2, \dots, M_1, \quad (23)$$

$$\sum_{k=1}^M f_y(\tau_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^M \tau_k f_y(\tau_k) = 0;$$

$$\sum_{k=1}^M A_{mk} (q_{xy,k} + p_{xy,k} + f_{0y,k} + f_{ox,k}) = \frac{(1+\kappa)M}{4\mu(b_1 - a_1)} [\Pi_x(x_{m+1}\sigma(x_{m+1}))q_{xy,m+1} - \Pi_x(x_{m-1}, \sigma(x_{m-1}))q_{xy,m-1}] \quad m = 1, 2, \dots, M_1, \quad (24)$$

$$\sum_{k=1}^M f_x(\tau_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^M \tau_k f_x(\tau_k) = 0.$$

Здесь $q_{y,k} = q_y(\tau_k)$, $q_{xy,k} = q_{xy}(\tau_k)$, $p_{y,k} = p_y(\tau_k)$, $p_{xy,k} = p_{xy}(\tau_k)$, $\tau_k = \cos \theta_k$, $f_y(x) = \operatorname{Re} f_0(x)$, $f_x(x) = \operatorname{Im} f_0(x)$, $A_{mk} = -1/M \cdot \operatorname{ctg}(\theta_m \mp \theta_k) / 2$, $\theta_m = (2m-1)/(2M) \cdot \pi$ ($m = 1, 2, \dots, M$), $x_{m+1} = (a_1 + b_1) / 2 + (b_1 - a_1) / 2 \cdot \eta_{m+1}$, $f_{oy,k} = f_{oy}(\tau_k)$, $f_{ox,k} = f_{ox}(\tau_k)$, $\eta_m = \cos \theta_m$, в формулах для A_{mk} верхний знак выбирается, если число $(m-k)$ нечетное, а нижний — если четное; M_1 — число узловых точек, принадлежащих отрезкам (a_1, a) и (b_1, b) , отрезок интегрирования (a_1, b_1) включает M узловых точек.

Совместное решение уравнений (17)–(19), (20), (22)–(24) позволяет при заданных характеристиках связей определить усилия в связях $q_y(x)$, $q_{xy}(x)$, контактные напряжения $p_y(x)$, $p_{xy}(x)$, размеры концевых и контактных зон.

Полученные системы уравнений даже в частном случае линейно-упругих связей оказываются нелинейными, поскольку размеры концевых зон щели не известны. В [27] для решения данных систем в случае линейных связей применялся метод последовательных приближений, суть которого состоит в следующем. Решается система (23) при некоторых значениях a_1^* и b_1^* относительно M_1 неизвестных $q_{y,1}$, $q_{y,2}, \dots, q_{y,M_1}$. Значения a_1^* , b_1^* и $q_{y,1}$, $q_{y,2}, \dots, q_{y,M_1}$ подставляются в неиспользованные уравнения системы (23). Выбранные значения параметров a_1^* , b_1^* и соответствующие значения $q_{y,1}$, $q_{y,2}, \dots, q_{y,M_1}$ не удовлетворяют двум последним уравнениям системы (23). Мето-

дом Ньютона–Рафсона ищем поправки к значениям a_1^* и b_1^* из последних уравнений системы (23). С учетом этих поправок, подбирая значения параметров a_1^* и b_1^* , необходимо многократно повторять вычисления, пока дополнительные уравнения системы (23) не будут справедливы с заданной точностью. Аналогично вычисляются значения $q_{xy,1}, q_{xy,2}, \dots, q_{xy,M_1}$.

Если закон деформирования связей нелинейный, для определения усилий $q_y(x), q_{xy}(x)$ в связях используется итерационный алгоритм, подобный методу упругих решений [28]. Закон деформирования межчастичных связей линейный при $V = |(u^+ - u^-) - i(v^+ - v^-)| \leq V_*$. Первый шаг итерационного процесса вычислений состоит в решении систем уравнений (17)–(24) для линейно-упругих межчастичных связей. Последующие итерации выполняются, только если на участках зон (a_1, a) и (b, b_1) есть соотношение $V > V_*$. При $V > V_*$ закон деформирования описывается нелинейной зависимостью, определяемой двумя точками (V_*, σ_*) и (δ_c, σ_c) , но если $\sigma_c \geq \sigma_*$, имеет место возрастающая линейная зависимость (линейное упрочнение, соответствующее упругопластической деформации связей материала). Здесь σ_* — максимальное упругое напряжение в связях; σ_c — напряжение в связях, соответствующее предельному раскрытию берегов зоны предразрушения. При таких итерациях решается система разрешающих уравнений в каждом приближении для квазихрупких связей с эффективной податливостью вдоль зон (a_1, a) и (b, b_1) , зависящей от величины модуля вектора усилий в связях, полученного на предыдущем шаге расчета. Расчет эффективной податливости проводится подобно расчету секущего модуля в методе переменных параметров упругости [29]. Процесс последовательных приближений заканчивается в тот момент, когда усилия вдоль зон (a_1, a) и (b, b_1) , полученные на двух последовательных итерациях, будут различаться на величину, меньшую 10^{-4} . Проведен параметрический анализ зависимости контактных напряжений $p_y(x), p_{xy}(x)$ и усилий в связях $q_y(x), q_{xy}(x)$ от размера щели и физико-механических параметров связей.

При вычислении контактных напряжений, усилий в связях и размеров концевых и контактных зон полагалось, что на берега щели действует постоянное давление. Результаты расчета абсолютных величин контактных напряжений $p_y / \rho_* g H$ при различных значениях относительного размера концевой области $l_0 = (a_0 - a_1) / (b - a)$ щели вдоль контактной зоны (α_1, β_1) представлены на рис. 2. В расчетах использована безразмерная координата x' , связанная с x соотношением $x = (\beta_1 + \alpha_1) / 2 + x'(\beta_1 - \alpha_1) / 2$, наибольшие значения контактных напряжений достигаются в средней части контактной зоны, где берега щели смыкаются.

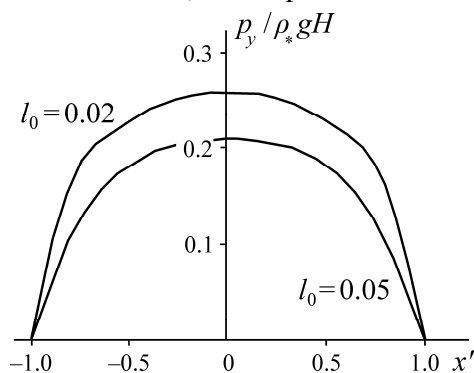


Рис. 2. Распределение контактных напряжений при различных значениях относительного размера концевой области щели вдоль контактной зоны

На рис. 3 представлены зависимости длины концевой зоны щели $l_1 = (b - b_0)/(b - a)$ от безразмерного значения внешних напряжений $\sigma_y^\infty / \sigma_*$ для разных длин щелей $l = (b - a)/R$. Здесь R — характерный линейный размер среды. На рис. 4 приведены распределения нормальных усилий $q_y / \rho_* g H$ в связях между берегами щели от безразмерной координаты x'' , связанной с x соотношением $x = (b_1 + b)/2 + x''(b_1 - b)/2$. Кривая 1 соответствует линейной связи, а 2 — билинейной.

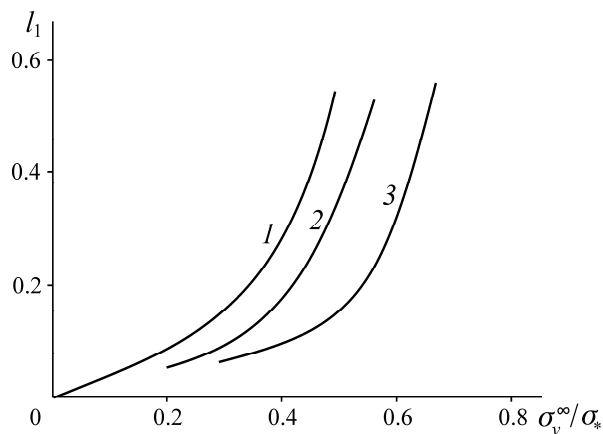


Рис. 3. Зависимость длины концевой зоны щели от безразмерного значения внешних напряжений для разных длин щелей: 1 — $l = 0.02$; 2 — 0.05 ; 3 — 0.10

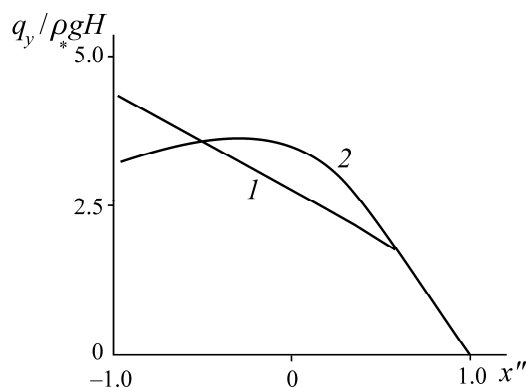


Рис. 4. Распределение нормальных усилий в связях между берегами щели

С увеличением размера концевой зоны сил сцепления материала напряжения $q_y(x)$, $q_{xy}(x)$ в связях и контактные напряжения уменьшаются. Характер изменения касательных контактных напряжений $p_{xy}(x)$ вдоль контактной зоны подобен изменению нормальных контактных напряжений $p_y(x)$, но абсолютные значения касательных напряжений меньше.

Для установления предельного состояния, при котором происходит рост щели, используем критическое условие $|(v^+ - v^-) - i(u^+ - u^-)| = \delta_c$, где δ_c — характеристика трещиностойкости материала массива, определяемая экспериментально.

Раскрытие щели в пределах зон действия сил сцепления можно найти с помощью соотношений

$$v^+(x, 0) - v^-(x, 0) = \Pi_y(x, \sigma) q_y(x), \quad u^+(x, 0) - u^-(x, 0) = \Pi_x(x, \sigma) q_{xy}(x)$$

$$(a_1 \leq x < a, b \leq x \leq b_1).$$

Условие предельного раскрытия щели на краях зон действия сил сцепления имеет вид

$$\text{при } x = a \quad \sqrt{\Pi_y^2(a, \sigma(a))q_y^2(a) + \Pi_x^2(a, \sigma(a))q_{xy}^2(a)} = \delta_c,$$

$$\text{при } x = b \quad \sqrt{\Pi_y^2(b, \sigma(b))q_y^2(b) + \Pi_x^2(b, \sigma(b))q_{xy}^2(b)} = \delta_c.$$

ВЫВОДЫ

Предложена эффективная схема расчета частично закрытой тектоническими и гравитационными силами щели переменной ширины со связями между берегами в концевых зонах под действием внутреннего давления. Анализ модели частичного закрытия щели переменной ширины с концевыми зонами действия сил сцепления в изотропной горной среде при наличии гравитационных и тектонических усилий сводится к параметрическому исследованию системы сингулярных интегральных уравнений при различных геометрических и физических параметрах горной среды, законах деформирования связей и размерах областей действия сил сцепления. Непосредственно из решения полученных систем определяются контактные напряжения $p_y(x)$, $p_{xy}(x)$, усилия в связях $q_y(x)$, $q_{xy}(x)$, а также размеры контактных и концевых зон. Эти соотношения позволяют найти решение обратной задачи, т. е. установить параметры напряженного состояния массива горных пород, при которых имеет место заданная область контакта берегов щели переменной ширины.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cornec A., Yuan H., and Lin G. Cohesive zone model for ductile fracture, In: Proc. of the 15th Riso Inter. Symposium on Materials Science “Numerical Predictions of Deformation Processes and the Behaviour of Real Materials” (ed. S. I. Andersen et al), Roskilde, Denmark, 5–9 September, 1994. — P. 269–274.
2. Cox B. N. and Marshall D. B. Concepts for bridged cracks fracture and fatigue, Acta Metallurgica et Materialia, 1994, Vol. 42. — P. 341–363.
3. Needleman A. An analysis of decohesion along an imperfect interface, Int. J. Fracture, 1990, Vol. 42. — P. 21–40.
4. Spec. issue. Cohesive models, Engineering fracture mechanics, 2003, Vol. 70 (14).
5. Kovtunen V. A. Nonconvex problem for crack with nonpenetration, ZAMM, 2005, Vol. 85. — P. 242–251.
6. Хлуднев А. М. Теория трещин с возможным контактом берегов // Успехи механики. — 2005. — Т. 3. — Вып. 4. — С. 41–82.
7. Хлуднев А. М. Задачи теории упругости в негладких областях. — М.: Физматлит, 2010. — 252 с.
8. Prechtel M., Leiva Ronda P., Janisch R., Hartmaier A., Leugering G., Steinmann P. and Stingl M. Simulation of fracture in heterogeneous elastic materials with cohesive zone models, Int. J. Fracture, 2011, Vol. 168. — P. 15–29.
9. Гасанов Ш. Г. Когезионная трещина с частично контактирующими берегами в сечении дорожного покрытия // Механика машин, механизмов и материалов. — 2012. — № 2 (19). — С. 58–64.
10. Mirsalimov V. M. and Rustamov B. E. Interaction of prefraction zones and crack visible cavity in a burning solid with mixed boundary conditions, Acta Mechanica, 2012, Vol. 223. — P. 627–643.
11. Мирсалимов В. М., Рустамов Б. Э. Моделирование частичного закрытия трещиновидной полости со связями между берегами в изотропной среде // ПМТФ. — 2013. — Т. 54. — № 6. — С. 181–190.

12. **Mirsalimov V. M. and Zolghannein E.** Cracks with interfacial bonds in the hub of a friction pair, *Meccanica*, 2012, Vol. 47. — P. 1591–1600.
13. **Мустафаев А. Б.** Взаимодействие берегов щели переменной ширины при изгибе полосы (балки) под воздействием температурного поля // *Механика машин, механизмов и материалов*. — 2014. — № 3 (28). — С. 30–36.
14. **Mirsalimov V. M. and Mustafayev A. B.** Inhibition of a curvilinear bridged crack by induced thermoelastic stress field, *J. Thermal Stresses*, 2016, Vol. 39. — P. 1301–1319.
15. **Мир-Салим-заде М. В.** Частичный контакт берегов щели переменной ширины в подкрепленной стрингерами пластине // *ФХММ*. — 2016. — Т. 52. — № 3. — С. 29–34.
16. **Mir-Salim-zada M. V.** Contact problem for a stringer plate weakened by a periodic system of variable width slots, *Structural Engineering and Mechanics*, 2017, Vol. 62, No. 6. — P. 719–724.
17. **Mirsalimov V. M. and Mustafayev A. B.** Effect of induced temperature field on development of curvilinear crack with bonds between the faces in end zones, *J. Theor. and Appl. Mech.*, 2017, Vol. 55. — P. 765–778.
18. **Мир-Салим-заде М. В.** Частичное закрытие прямолинейных трещин со связями в стрингерной пластине с отверстием // *Проблемы машиностроения. НАН Украины*. — 2017. — Т. 20. — № 2. — С. 46–53.
19. **Мустафаев А. Б.** Замедление роста щели переменной ширины под действием температурного поля // *ПМТФ*. — 2017. — Т. 58. — № 1. — С. 168–176.
20. **Мир-Салим-заде М. В.** Частичное закрытие прямолинейной трещины, исходящей из контура кругового отверстия в стрингерной пластине // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. — 2018. — № 14 (4). — С. 313–322.
21. **Khludnev A., Faella L., and Popova T.** Junction problem for rigid and Timoshenko elastic inclusions in elastic bodies, *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2017, Vol. 22, Issue 4. — P. 737–750.
22. **Khludnev A. M.** On modeling thin inclusions in elastic bodies with a damage parameter, *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2019, Vol. 24, Issue 9. — P. 2742–2753.
23. **Галин Л. А.** Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления // *Прикл. математика и механика*. — 1945. — Т. 9. — Вып. 5. — С. 413–424.
24. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М.: Наука, 1966. — 707 с.
25. **Гахов Ф. Д.** Краевые задачи. — М.: Наука, 1977. — 640 с.
26. **Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.** Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. — Киев: Наук. думка, 1976. — 443 с.
27. **Мирсалимов В. М.** Неоднородные упругопластические задачи. — М.: Наука, 1987. — 256 с.
28. **Ильюшин А. А.** Пластичность. — М.: Логос, 2003. — 388 с.
29. **Биргер И. А.** Расчет конструкций с учетом пластичности и ползучести // *Изв. АН СССР. Механика*. — 1965. — № 2. — С. 113–119.

Поступила в редакцию 15/V 2019

После доработки 28/I 2020

Принята к публикации 04/II 2020