

**ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА  
ТЕОРИИ СВЕРХСКОРОСТНОГО КОНТАКТА  
ДЛЯ УСКОРЯЕМОГО ТЕЛА  
С ОРТОТРОПНОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ**

УДК 583.4+533.95

И. М. Карпова, В. В. Титков, Г. А. Шнеерсон

Санкт-Петербургский государственный технический университет,  
195251 Санкт-Петербург

Одной из причин, ограничивающих применение проводящих тел в рельсовых ускорителях [1, 2], является разрушение контакта. Оно происходит вследствие сгущения тока вблизи угловой точки  $A$  (рис. 1), в области с характерным размером порядка  $\Delta \cong \rho_2/(\mu_0 V)$ , где  $\rho_2$  — удельное сопротивление,  $V$  — скорость тела [3, 4].

В данной работе рассмотрен способ снижения токовой нагрузки в твердотельном контакте путем использования материала с анизотропной (ортотропной) проводимостью и изучается токораспределение в теле, состоящем из большого числа изолированных проводящих слоев с удельным сопротивлением  $\rho_1(x)$ , толщина которых удовлетворяет условию  $\delta_1 \ll \Delta \ll d$ , а толщина изоляции  $\delta_2 \ll d$  ( $d$  — толщина тела (якоря)). При этих условиях можно приближенно считать распределение удельного сопротивления в области 1 непрерывным:  $\rho_a(x) = \rho_1(x)[1 + \delta_2(x)/\delta_1(x)]$ . Плотность тока в якоре (область 2, рис. 1) имеет лишь составляющую  $j_y$ , поэтому уравнение диффузии поля в стенку якоря с индукцией  $B = B_z$  в системе координат якоря запишем в виде

$$\frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\rho_a(x)}{\mu_0} \frac{\partial B}{\partial x} \right], \quad (1)$$

где  $E_x$  — продольная составляющая напряженности электрического поля;  $B$  и  $\rho_a$  не зависят от координаты  $y$ ; следовательно,  $\partial E_x/\partial y$  также является функцией лишь координаты  $x$ , а  $E_x$  линейно зависит от  $y$ . При этом  $E_x(x, 0) = j_x(x, 0)\rho_2$ ,  $E_x(x, -h) = -j_x\rho_2$  ( $j_x$  — составляющая плотности тока в рельсе). Таким образом,  $E_x = j_x(x, 0)\rho_2(1 + 2y/h)$ , и окончательно уравнение (1) приводится к виду

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \rho_2 j_x(x, 0) \frac{2}{h} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho_a(x)}{\mu_0} \frac{\partial B}{\partial x} \right). \quad (2)$$

Граничными условиями являются  $B(0) = B_e$ ,  $B(d) = 0$ . Плотность тока  $j_x(x, 0) = -j_x(x, h)$  можно найти путем расчета поля в рельсах. Обычно используется условие квазистационарности  $|\partial \mathbf{B}/\partial t| \ll |(\mathbf{V} \nabla \mathbf{B})|$  ( $\mathbf{V}$  — скорость тела). Тогда для поля в рельсе с индукцией  $B = B_z$  ( $B_x = B_y = 0$ ) имеем [3]

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} + \frac{1}{\Delta} \frac{\partial B}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

( $\Delta = \rho/(\mu_0 V)$  — толщина скоростного скин-слоя). Численное решение уравнений (2), (3) показало, что применение тела с ортотропной проводимостью позволяет резко снизить нагрев. Например, в случае  $\rho_a = 10^{-6}$  Ом·м,  $V = 2 \cdot 10^5$  м/с,  $B = 10$  Тл максималь-

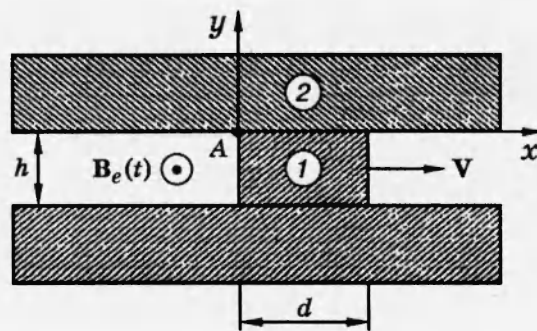


Рис. 1. Схема рельсового ускорителя:  
1 — ускоряемое тело; 2 — контактные рельсы

ная мощность джоулева нагрева составила  $2 \cdot 10^{12}$  Вт/м<sup>3</sup>, что примерно в 8 раз меньше, чем в среде с изотропной проводимостью. Основное внимание здесь уделено возможности дальнейшего снижения нагрева путем принудительного распределения тока по толщине якоря, как и в аналогичной задаче для неподвижных тел [5–7] путем выбора оптимальной зависимости  $\rho_a(x)$ .

Функция Грина для уравнения (3) рассчитана Ю. А. Дрейзиным и А. А. Кулаковым и имеет вид [8]

$$B^*(x_2, y_2) = \frac{1}{4\pi\Delta} \frac{y_2}{r_{12}} \exp[-(x_2 - x)/2\Delta] K_1(r_{12}/2\Delta), \quad (4)$$

где  $r_{12}$  — расстояние между точками 1( $x, 0$ ) и 2( $x_2, y_2$ );  $K_1$  — функция Макдональда. Формула (4) позволяет рассчитать индукцию в рельсах при произвольном распределении индукции на границе:

$$B(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} B^*(x_2, 0) B(x, 0) dx. \quad (5)$$

Дальнейшие преобразования (см. приложение) дают возможность связать касательную и нормальную составляющие плотности тока на границе:

$$j_x(x, 0) = -\frac{1}{4\pi\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(x - \xi)/2\Delta] \{K_0[|(x - \xi)/2\Delta] - K_1[(x - \xi)/2\Delta]\} j_n(\xi) d\xi \quad (6)$$

( $j_n(x) = -(1/\mu_0) \partial B / \partial x$ ). Исключая  $j_x(x, 0)$  с помощью уравнения (2), получим интегродифференциальное уравнение для индукции в области контакта  $0 < x < d$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\rho_a(x)}{\mu_0} \frac{\partial B}{\partial x} \right] - \frac{\rho_2}{2\pi h \Delta \mu_0} \int_0^d \exp\left[-\frac{x - \xi}{2\Delta}\right] \left\{ K_0\left[\frac{x - \xi}{2\Delta}\right] - \right. \\ \left. - K_1\left[\frac{x - \xi}{2\Delta}\right] \right\} \frac{\partial B(\xi)}{\partial \xi} d\xi = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Вместо решения прямой задачи (расчета поля в ускоряемом теле при заданной зависимости  $\rho_a(x)$ ) целесообразно поставить обратную задачу — выбор  $\rho_a(x) = \rho'_a(x)$  по заданному распределению плотности тока  $j_y(x)$ . Простейшим примером такой задачи является слу-

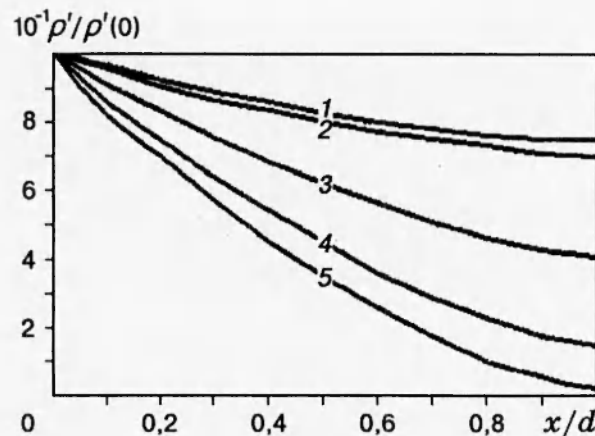


Рис. 2. Распределение удельного сопротивления для режима  $J(x) = \text{const}$ :  
 1 —  $P_1 = 0,00126$ ,  $P_2 = 0,1$ ; 2 —  $P_1 = 0,00126$ ,  $P_2 = 0,05$ ; 3 —  $P_1 = 0,00025$ ,  $P_2 = 0,1$ ; 4 —  $P_1 = 0,000126$ ,  $P_2 = 0,1$ ; 5 —  $P_1 = 0,000025$ ,  $P_2 = 0,15$

чай, когда скин-эффект в ускоряемом теле выражен слабо и членом  $\partial B/\partial t$  в уравнении (7) можно пренебречь. Тогда из этого уравнения для зависимости удельного сопротивления получим

$$\rho'_a(x') = \rho_a(0) - \frac{\rho_2}{\pi \Delta h j(x')} \int_0^{x'} \int_0^{d'} T'(\lambda' - \xi') j(\xi') d\xi' d\lambda',$$

$$T'(\lambda' - \xi') = \exp[-(\lambda' - \xi')] \{K_0 [|\lambda' - \xi'|] - K_1 [(\lambda' - \xi')]\},$$

где  $\rho_a(0)$  — удельное сопротивление на внутренней поверхности якоря;  $x' = x/2\Delta$ ;  $\xi' = \xi/2\Delta$ ;  $\lambda' = \lambda/2\Delta$ ;  $\lambda$  — переменная интегрирования. Отношение  $\rho'_a(x')/\rho_a(0)$  зависит от двух безразмерных параметров:  $P_1 = \rho_2^2/[\mu_0 \pi V h \rho_a(0)]$  и  $\bar{F}_2 = \rho_2 d/[h \rho_a(0)]$ . Вид зависимости  $\rho'_a(x')/\rho_a(0)$  определяется только относительным распределением тока. В частности, при  $j_y(x) = \text{const}$  решение имеет вид

$$\rho'_a(x') = \rho_a(0) \left\{ 1 - P_1 \int_0^{x'} \int_0^{d'} T'(\lambda' - \xi') d\xi' d\lambda' \right\}. \quad (8)$$

На рис. 2 приведены результаты использования этой формулы для следующих параметров системы:  $\rho_a(0) = 10^{-5}$  Ом · м (что соответствует удельному сопротивлению углеродистого графита), сопротивление стального рельса  $\rho_2 \cong 10^{-6}$  Ом · м.

Результаты численного решения задачи в диапазоне параметров  $P_1 = 10^{-4} \div 10^{-3}$  и  $P_2 = 0,005 \div 0,02$  свидетельствуют о возможности обеспечения заданного токораспределения при использовании допустимых с технической точки зрения распределений удельного сопротивления по проводящим слоям анизотропного тела. Рассматриваемым режимам соответствует плавно убывающая в пределах от  $10^{-5}$  до  $10^{-6} \div 10^{-7}$  Ом · м зависимость удельного сопротивления. В упомянутом выше частном случае ( $V = 2 \cdot 10^3$  м/с,  $B = 10$  Тл,  $\rho_a = \rho_2 = 10^{-6}$  Ом · м) переход от равномерного распределения сопротивления  $\rho_a = \text{const}$  к  $\rho'_a(x)$ , которое обеспечивает постоянную плотность тока (8), дает выигрыш в мощности нагрева в 5 раз. В этом примере  $q_{\text{max}}$  может быть снижена до  $4 \cdot 10^{11}$  Вт/м<sup>3</sup>.

Выбор распределения плотности тока вида  $j_y = \text{const}$  не является оптимальным: внутренние слои якоря, где  $\rho_a$  выше, нагреваются сильнее, чем наружные. Более правильным является обеспечение такой зависимости  $j_y(x)$ , при которой все слои имеют одинаковую тепловую нагрузку, т. е. в каждой точке с координатой  $x$  выполняется условие постоянства мощности [7]. Таким образом, в сечении тела имеем

$$j_y^2(x) \rho_a(x) = \varphi^*(t), \quad (9)$$

где  $\varphi^*(t)$  не зависит от  $x$ , но может быть функцией времени.

Преобразуем (3) в уравнение для плотности тока  $j_y(x) = -(1/\mu_0)\partial B/\partial x$ . Для этого проинтегрируем его почленно по  $x$ :

$$\mu_0 \frac{\partial j_y}{\partial t} = -\frac{2\rho_2}{h} \frac{\partial j_x(x,0)}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\rho_a(x) j_y(x)).$$

Из условия (9) следует  $j_y(x) = \varphi^*(t)/\rho_a^{1/2}(x)$ . Далее, используя (6), получим уравнение

$$\frac{\mu_0}{\rho_a^{1/2}(x)} \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} = \varphi^*(t) \left\{ \frac{\rho_2}{2\pi\Delta h} \int_0^d \frac{\partial}{\partial x} T[(x-\xi)/2\Delta] \frac{d\xi}{\rho_a^{1/2}(\xi)} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho_a^{1/2}(x) \right\},$$

которое допускает решение при экспоненциальном изменении  $\varphi^*(t)$ , когда  $\varphi^*(t) = \varphi_0^* \exp(ct)$ . В этом случае приходим к нелинейному интегродифференциальному уравнению для функции  $g = \rho_a^{-1/2}(x)$ :

$$c\mu_0 g = \frac{\rho_2}{2\pi\Delta h} \int_0^d \theta[(x-\xi)/2\Delta] g(\xi) d\xi + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (1/g) \quad \left( \theta(t-x) = \frac{d}{dx} T(x-\xi) \right).$$

В случае постоянного поля ( $c=0$ ) уравнение несколько упрощается:

$$\frac{d}{dx} \left( \rho_a^{1/2}(x) \right) + \frac{\rho_2}{2\pi h \Delta} \int_0^d T(x-\xi) \frac{d\xi}{\rho_a^{1/2}(\xi)} = 0.$$

Введя обозначение

$$A(x', \xi') = \int_0^{x'} (K_0(x' - \xi') - K_1(x' - \xi')) \exp(\xi' - x') dx',$$

имеем нелинейное интегральное уравнение

$$\frac{1}{g'(x)} - \frac{1}{g'(0)} = -\frac{1}{R_1} \int_0^{R_2} A(x', \xi') g'(\xi') d\xi' \quad (10)$$

( $g'(x) = \rho_a^{1/2}(x)$ ), которое может быть решено путем замены интеграла конечной суммой. Вид зависимости  $g'(x)$ , а следовательно, и  $\rho_a(x)$  определяется тремя безразмерными параметрами:  $R_1 = \pi\mu_0 h/2\rho_2$ ,  $R_2 = \mu_0 V d/2\rho_2$  и  $R_3 = (\rho_2/\rho_a(0))^{1/2}$ . Редуцированная система нелинейных алгебраических уравнений, соответствующих уравнению (10), была решена численно методом Ньютона. Следует отметить, что процесс итераций сходится не при всех комбинациях безразмерных параметров  $R_{1,2,3}$ . Тем не менее для ряда сочетаний этих параметров решения получены и представлены на рис. 3.

Можно дать оценку эффективности снижения джоулева нагрева при реализации условия постоянной по координате мощности тепловыделения в сравнении с максимальной

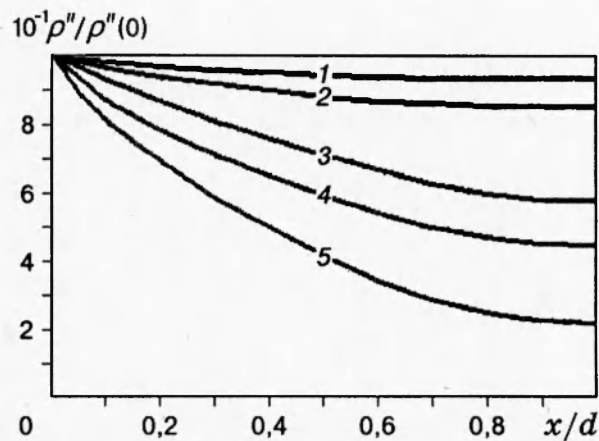


Рис. 3. Распределение удельного сопротивления для режима  $dq/dt = \text{const}(x)$ :

1 —  $R_1 = 39,6$ ,  $R_2 = 0,63$ ,  $R_3 = 1$ ; 2 —  $R_1 = 39,6$ ,  $R_2 = 6,3$ ,  $R_3 = 0,25$  ( $R_1 = 39,6$ ,  $R_2 = 2,52$ ,  $R_3 = 0,5$ ); 3 —  $R_1 = 39,6$ ,  $R_2 = 12,6$ ,  $R_3 = 0,25$ ; 4 —  $R_1 = 198$ ,  $R_2 = 6,3$ ,  $R_3 = 1$ ; 5 —  $R_1 = 158$ ,  $R_2 = 6,3$ ,  $R_3 = 1$  ( $R_1 = 39,6$ ,  $R_2 = 6,3$ ,  $R_3 = 0,5$ )

скоростью тепловыделения при  $j(x) = \text{const}$ . В первом случае

$$j'(0) = \frac{B_0}{\mu_0 d}$$

Поэтому мощность тепловыделения в точке  $x = 0$  есть

$$q'(0) = \frac{\rho_a'(0) B_0^2}{\mu_0^2 d^2} \quad (11)$$

Во втором режиме ( $\dot{q}'(x) = \text{const}$ )

$$\frac{d}{dx} (j''^2(x) \rho_a''(x)) = 0,$$

откуда  $j''(x) = j''(0) (\rho_a''(x)/\rho_a''(0))^{1/2}$ . Интегрируя соотношение  $j = -(1/\mu_0) \partial B / \partial x$ , с учетом последнего равенства получим

$$B_0 = \mu_0 j_0'' \int_0^d (\rho_a''(x)/\rho_a''(0))^{1/2} dx,$$

откуда

$$j_0'' = \frac{B_0}{\mu_0 d_{\text{эфф}}} \left( d_{\text{эфф}} = \int_0^d (\rho_a''(x)/\rho_a''(0))^{1/2} dx \right).$$

Используя последнее выражение, для нагрева поверхности якоря находим

$$q''(0) = \frac{B_0^2 \rho_a''(0)}{\mu_0^2 d_{\text{эфф}}^2} \quad (12)$$

Сопоставляя (11) и (12), убеждаемся в том, что переход от распределения  $\rho_a'(x)$ , дающего  $j = \text{const}$ , к распределению  $\rho_a''(x)$ , дающему  $\dot{q}' = \text{const}$ , дополнительно снижает

мощность тепловыделения в  $(d_{\text{эфф}}/d)^2$  раз. В рассмотренном примере это число близко к 4.

Полученные результаты позволяют оптимизировать распределение мощности тепловыделения в зоне скользящего контакта. Однако реальное распределение температуры определяется также процессом теплопередачи от нагретого якоря к относительно холодному рельсу [9]. Поэтому окончательный ответ об эффективности предложенной оптимизации может быть дан при решении уравнения теплопроводности совместно с полевыми уравнениями.

**Приложение.** Магнитное поле в рельсе выражается через поле на границе и фундаментальное решение (4) по формуле

$$B(x_2, y_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} B^*(x_2, y_2) B(x, 0) dx.$$

Так, в случае точечного контакта имеем

$$B(x_2, y_2) = \frac{B_0 y_2}{4\pi\Delta} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{r_{12}} \exp\left(-\frac{x_2 - x_1}{2\Delta}\right) K_1\left(\frac{r_{12}}{2\Delta}\right) dx_1 \quad (r_{12} = \sqrt{y_2^2 + (x_2 - x_1)^2}).$$

Используя интегральное представление функции  $K_1$

$$\frac{y_2/(2\Delta)}{\sqrt{y_2^2 + (x_2 - x_1)^2}} K_1\left(\frac{1}{2\Delta} \sqrt{y_2^2 + (x_2 - x_1)^2}\right) = \int_0^{\infty} \exp(-y_2 \sqrt{t^2 + a^2}) \cos(|x_2 - x_1|t) dt,$$

а затем проведя интегрирование по переменной  $x_1$ , получим следующее выражение для магнитного поля произвольной точки при определенных ранее граничных условиях:

$$B(x_2, y_2) = \frac{B_0 \exp(-\alpha x_2)}{2\pi} \int_0^{\infty} \exp\left(-y_2 \sqrt{t^2 + a^2}\right) \left(\frac{\alpha \cos(x_2 t)}{\alpha^2 + t^2} - \frac{t \sin(x_2 t)}{\alpha^2 + t^2}\right) dt.$$

Здесь  $\alpha = 1/(2\Delta)$ ;  $t$  — переменная, связанная с интегральным представлением функции  $K_1$ .

Отсюда можно получить выражение для  $x$ -компоненты плотности тока:

$$j_x(x_2, y_2) = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B(x_2, y_2)}{\partial y_2} = -\frac{B_0 \exp(-\alpha x_2)}{2\pi\mu_0} \left( \alpha K_0(\alpha \sqrt{x_2^2 + y_2^2}) - \alpha K_1(\alpha \sqrt{x_2^2 + y_2^2}) \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \right). \quad (\text{П. 1})$$

Первоочередной интерес для нас представляет значение плотности тока на границе областей (в зоне контакта), т. е.

$$j_x(x_2, 0) = -\frac{B_0 \exp(-\alpha x_2) \alpha}{2\pi\mu_0} \left( K_0(\alpha|x_2|) - K_1(\alpha|x_2|) \text{sign}(x_2) \right).$$

Для оценки этих величин можно воспользоваться асимптотическими зависимостями функций Макдональда и получить выражение для плотности тока в области перед зоной контакта ( $\alpha x_2 \rightarrow \infty$ ) и за контактом ( $\alpha x_2 \rightarrow -\infty$ ). В результате в зоне перед контактом

(sign( $x_2$ ) > 0)

$$j_x(x_2, 0) \rightarrow \frac{B_0 \exp(-\alpha x_2) \sqrt{\Delta}}{4\mu_0 \sqrt{\pi x_2} x_2},$$

за контактом

$$j_x(x_2, 0) \rightarrow \frac{B_0}{2\mu_0 \sqrt{\pi |x_2| \Delta}}.$$

Анализ полученных зависимостей позволяет сделать вывод о наличии явно выраженных особенностей при  $x_2 \rightarrow 0$ , т. е. в зоне точечного контакта.

Рассмотрим, какое влияние будет оказывать переход от точечного контакта к произвольному распределению нормальной составляющей плотности тока на границе.

Выражение для  $x$ -компоненты плотности тока для этого случая можно получить, если в (П. 1) вместо множителя  $i' = B_0/\mu_0$  ввести  $di(x_1) = j_n(x_1) dx_1$ , заменить  $x_2$  на  $x_2 - x_1$  и провести интегрирование. В результате указанных операций выражение (5) преобразуется к виду

$$j_x(x_2, 0) = -\frac{1}{4\pi\Delta} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha(x_2 - x_1)) (K_0(\alpha|x_2 - x_1|) - K_1(\alpha|x_2 - x_1|) \times \\ \times \text{sign}(x_2 - x_1)) j_n(x_1) dx_1.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Barber J. P., McDonald C. L. A comparison of armature performance. IEEE, Trans. on Magnetics, 1986, MAG-22, N 6.
2. Thornhill L. D., Battch J. H., Brown J. L. Armature options for hypervelocity railguns. IEEE, Trans. on Magnetics, 1989, MAG-25, N 1.
3. Long G. C. Railgun current density distribution. IEEE, Trans. on Magnetics, 1986, MAG-22, N 6. P. 1597-1601.
4. Young F. T., Huges W. F. Rail and armature current distributions in electromagnetic launchers. IEEE, Trans. on Magnetics, 1982, MAG-18, N 1. P. 33-45.
5. Карпова И. М., Титков В. В., Шнеерсон Г. А. Вихревые токи в неоднородных средах и проблема снижения джоулева нагрева в сильном импульсном магнитном поле // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1988. № 3. С. 122-127.
6. Шнеерсон Г. А. Поля и переходные процессы в аппаратуре сверхсильных токов. 2-е изд. М.: Энергоатомиздат, 1992.
7. Шнеерсон Г. А. О минимизации джоулева нагрева при диффузии магнитного поля в среду с проводимостью, зависящей от координаты // Письма в ЖТФ. 1992. Т. 18, вып. 6. С. 18-21.
8. Глинов А. П., Кулаков А. А. Об асимптотике распределения магнитного поля в РЭУ в зоне скинирования тока. М., 1992. (Препр. ИАЭ-5491/1).
9. Станкевич С. В., Швецов Г. А. Предельные скорости при ускорении пластин магнитным полем // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 3. С. 10-17.

Поступила в редакцию 30/IX 1994 г.,  
в окончательном варианте — 14/III 1995 г.